

割り込み型分岐管の本管内乱流剥離 (分岐角度が 45° の場合に対する理論的解析)

嵩 哲 夫 清泉女学院大学人間学部文化心理学科
石 田 汎 信州大学工学部電気電子工学科
西 正 明 生活科学教育講座
大久保由美子 山梨英和大学大学院人間文化研究科

キーワード：割り込み型分岐管，管内流れ，自由流線理論，境界層理論，剥離点

1 緒論

割り込み型分岐管は，実際の配管において多数使用されている。そこにおける流れは乱流の場合が多く，剥離，再付着，二次流れなどを伴い複雑である。そのため，これまでは分岐損失係数を測定するにとどまるものが多く，流動機構に対する理論的検討はほとんどなされていないように思われる。

そこで，割り込み型分岐管内流れを特徴づける重要な因子の一つである本管内において生ずる境界層剥離点を研究することにした。既に流れが層流の場合に対しては，分岐角度，面積比，レイノルズ数および流量比による変化を境界層理論に基づいて解析し，実験結果と比較考察した結果を報告した [1]~[3]。

本論文においては，工学上重要な流れが乱流で分岐角度が 45° の場合に対し，90° [4] と 135° [5] の場合と同様に，本管内剥離点を境界層理論に基づいて解析し，面積比，本管上流側管路長さ，レイノルズ数および流量比の変化に対する影響を考察したので報告する。

なお，ここで得られた結果は，最近活発に研究が行われている生理流体力学における循環器系の動脈内血流および呼吸器系吸気の気管支内流動を考察する際に有益な情報を提供することが期待される。

2 理論的解析

2.1 自由流線理論による解析

前報 [2] において示したように，分岐角度 θ_p が 45° の場合，支管入り口上流側角 E (図 1 参照) からの剥離を伴う二次元割り込み型分岐管内の流れは，自由流線理論により解析することができる。

すなわち，解析に関わる写像平面は， z -平面 (物理平面)，ホドグラフ平面， ζ -平面および t -平面の 4 つであり，それらは式 (1) から式 (3) までに示される写像関数により関連づけられる。ただし，本報において用いられる記号は，前報と同様に定義するものとする。

$$w = dW/dz = qe^{-i\theta} = u_x - iu_y \quad (1)$$

$$w/V_2 = \zeta \quad (2)$$

$$t = \zeta^{\pi/(2\theta_p)} \quad (3)$$

ここで， $v_1 = V_1/V_2$ ， $v_3 = V_3/V_2$ とする。ただし，図 1(c) の点 A, A', \bar{A} , \bar{A}' に吹き出し，点 B, \bar{B} と点 C, C', \bar{C} , \bar{C}' に吸い込みをおくものとし， W は複素ポテンシャル， q は z -平面上における流れの合速度の大きさ， u_x および u_y は q の x および y 軸方向成分， V_1 および V_3 は本管無限上流および下流における流れの速度， V_2 は支管入り口上流側角 E から剥離した流れの支管無限下流における速度とする。

いま，管路各部分を図 1 に示すように，文字 A, B, C, D および E により表す。本管上流および下流に添え字 1 および 3，支管に添え字 2 を付与し，流路幅を h で表すとき，式 (4) の関係がなりたつものとする。

$$h_1 = h_2 + h_3 \quad (4)$$

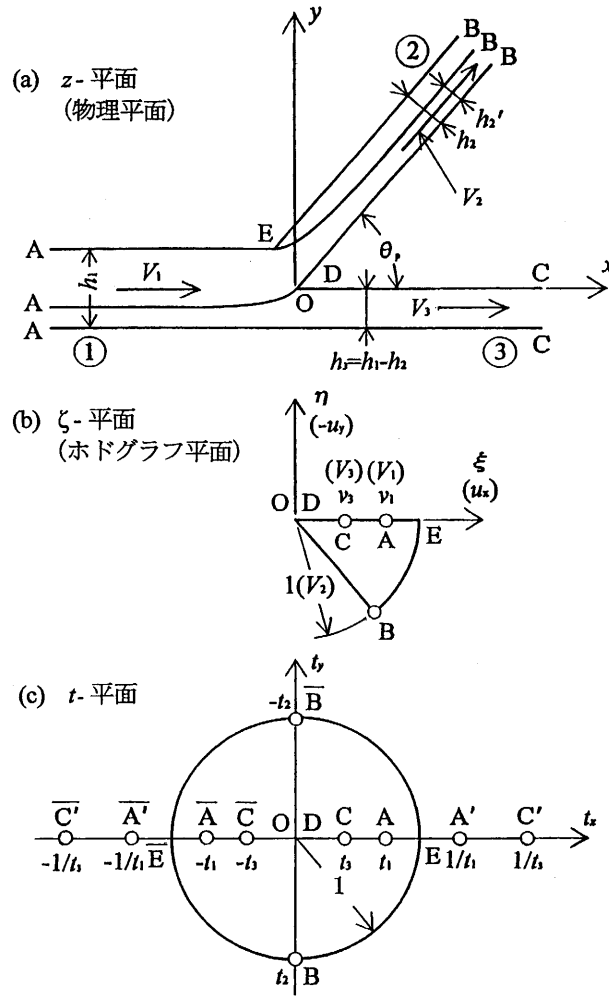


図1 写像平面

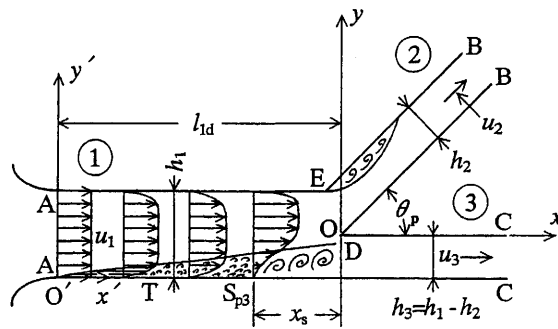


図2 分岐管内流れと座標系

ここで、支管入り口上流側角 E から剥離した流れの無限下流における幅を h'_2 とすると、連続の式は式 (5) のように表せる [2]。

$$h_1 \nu_1 = h'_2 + h_3 \nu_3 \quad (5)$$

本管と支管の面積比を m とし、 $\alpha = h_2/h_1 = 1/m$ および $\beta = h_3/h_1$ とおくと、式 (4) から

$$1 = \alpha + \beta, \quad (0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1) \quad (6)$$

の関係が得られる。 k を本管下流における流量の全流量に対する比とすると、

$$\nu_3 = kh_1 \nu_1 / h_3 = (k/\beta) \nu_1 = \{k/(1-\alpha)\} \nu_1 \quad (7)$$

が得られる。また、支管内における流れの収縮係数 C_c は、式 (8) のように表せる。

$$C_c = h'_2/h_2 = \{(1-k)/\alpha\} \nu_1 \quad (8)$$

ただし、解析においては $\nu_1 > \nu_3$ の場合を対象とするので、上述の関係を考慮すると、式 (9) が得られる。

$$1 - (\alpha/\nu_1) < k < 1 - \alpha \quad (9)$$

式 (2), (3) において $\theta_p = \pi/4$ とおけば、分岐角度が 45° の割り込み型分岐管における流線の形状を求めることができる [2]。

2.2 圧力分布

流体の密度を ρ 、壁面上任意の位置における圧力を p 、本管無限上流における圧力を p_1 とすると、ベルヌーイの定理により次式がなりたつ。

$$p_1 + (1/2)\rho V_1^2 = p + (1/2)\rho q^2 \quad (10)$$

ゆえに、上式および式 (1) と (2) の関係により、流路壁面上の圧力分布を表す無次元数 C_p は式 (11) により示される。ここでは、これを圧力係数と呼ぶことにする。

$$C_p = (p - p_1) / \{(1/2)\rho V_1^2\} = 1 - (|\zeta|/\nu_1)^2 \quad (11)$$

2.3 本管壁面上における剥離点の理論的解析

既に報告した分岐角度が 90° および 135° の場合 [4],[5] と同様に、図 2 に示すような、実用上よく見かける分岐部上流側管路長さ l_{1d} が短く、境界層が十分に発達していないような管路における本管壁面 AC 上における剥離点を理論的に考察する。

図 2 において、ノズル出口の点 A を新しい座標系の原点 O' とし、座標を x' と y' とすると、自由流線理論を用いた解析において定義した座標 x と y との間に、 $x' = x + l_{1d}$ 、 $y' = y + h_3$ の関係がある。

いま、壁面 AC に垂直な境界層内の圧力は一定で、その値は二次元ポテンシャル流れの場合 [2] における AC 上の速度から求めることができるものとする [4],[5]。また、境界層は、まず、図 2 に示すノズル出口の点 A から一様流中におかれた平板に沿う層流境界層として Blasius の解析結果 [6] に従って発達し、つぎに Hansen [7] による実験式

$$Re_{x'_T} = (u_1 x'_T / \nu) = 3.2 \times 10^5 \quad (12)$$

で与えられる遷移点 $T(x' = x'_T)$ において、ただちに乱流境界層に遷移するものとする。ここで、 u_1 は本管上流における流れの平均速度、 ν は動粘度である。ただし、点 T における層流および乱流境界層の運動量厚

δ_2 は等しいものとする。乱流境界層に遷移した後は、式 (13) で示される Gruschwitz の形状係数^[8] η_g が 0.8 に到達した点において剥離するものとする。

$$\eta_g = 1 - \{u(\delta_2)\}^2/U^2 \quad (13)$$

ここで、 $u(\delta_2)$ は壁面から $y' = \delta_2$ の位置における流速、 U は壁面 AC に沿う外部流れの速度であるが、二次元ポテンシャル流れの場合における壁面 AC 上における速度から求められるものとする。すなわち、

$$U = (d\phi/d\xi)(d\xi/dx') \quad (14)$$

である。ここで、 ϕ は複素ポテンシャル W の実部で、速度ポテンシャルである。 U は z -平面上においては壁面 AC 上の点であるから、 ζ -平面上においては、 $\nu_3 \leq \xi \leq \nu_1$ 、 $\eta = 0$ 上にある。また、式 (14) から次の関係が得られる。

$$U' = (dU/dx') = (dU/d\xi)(d\xi/dx') \quad (15)$$

Gruschwitz によれば、 η_g は、 C_1 と C_2 を定数として、次式により求めることができる^[9]。

$$\delta_2 \frac{d(U^2 \eta_g)}{dx'} + C_1(U^2 \eta_g) = C_2 U^2 \quad (16)$$

境界層の運動量厚さ δ_2 は、Prandtl による次式^[10] にしたがって変化するものとする。

$$\delta_2 \left(\frac{U \delta_2}{\nu} \right)^{1/4} = \frac{0.0160}{U^4} \left(\int_{x'_T}^{x'} U^4 dx' + C_3 \right) \quad (17)$$

式 (17) における積分の結果を具体的に示すと次式となる。 ξ_T は x'_T に対応する ξ -平面における実軸上の値である。

$$\begin{aligned} \int_{x'_T}^{x'} U^4 dx' = & \frac{h_1 V_1^4}{\pi} \left[\ln \frac{v_1 - \xi}{v_1 + \xi} + 2 \tan^{-1} \frac{\xi}{v_1} + \frac{1}{v_1^6} \left(\ln \frac{(1/v_1) - \xi}{(1/v_1) + \xi} + 2 \tan^{-1}(v_1 \xi) \right) \right. \\ & - k^4 \left(\ln \frac{\xi - v_3}{\xi + v_3} + 2 \tan^{-1} \frac{\xi}{v_3} + \frac{1}{v_3^6} \left(\ln \frac{(1/v_3) - \xi}{(1/v_3) + \xi} + 2 \tan^{-1}(v_3 \xi) \right) \right) \\ & \left. + \frac{\sqrt{2}(1-k)}{v_1^3} \left(\ln \frac{\xi^2 - \sqrt{2}\xi + 1}{\xi^2 + \sqrt{2}\xi + 1} + 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}\xi}{1 - \xi^2} \right) \right]_{\xi_T}^{\xi} \quad (18) \end{aligned}$$

なお、前報まで^{[4],[5]}において報告したように、自由流線理論の解析結果によると、仮定した流れが得られるのは、対象とする θ_p と m に対して 1 つの流量比 k_0 に対してである。 θ_p が 45° の場合の k_0 は、 m が 2.0 に対して 0.37983...、3.0 に対して 0.56729... および 4.0 に対して 0.66873... である。 k_0 以外においては、分流線一本管上流からの流れを支管と本管下流へ分かつ流線一上のせき止め点 D の近傍に障壁—その両側において速度と圧力が異なるような流れの中に突き出た厚みのない剛板—が現れる。ただし、障壁は割り込み型分岐管で分岐角度が 90° および 135° の場合においても、壁面 AC 近傍の流れにはほとんど影響を及ぼさないものとみなされるので、 45° の場合においてもこれを無視できるものとする。

3 計算結果とその考察

3.1 計算条件

計算で対象とした分岐管の面積比 m の値は、2.0、3.0 および 4.0 の 3 種類である。管路横断面形状は長方形であり、その深さは 100mm、本管上流側管路幅 h_1 は 50mm で一定であるものと仮定する。管路の縦横比 (管路深さの幅に対する比) は、流れを二次元と仮定した理論的解析結果と比較するには大きくする必要が

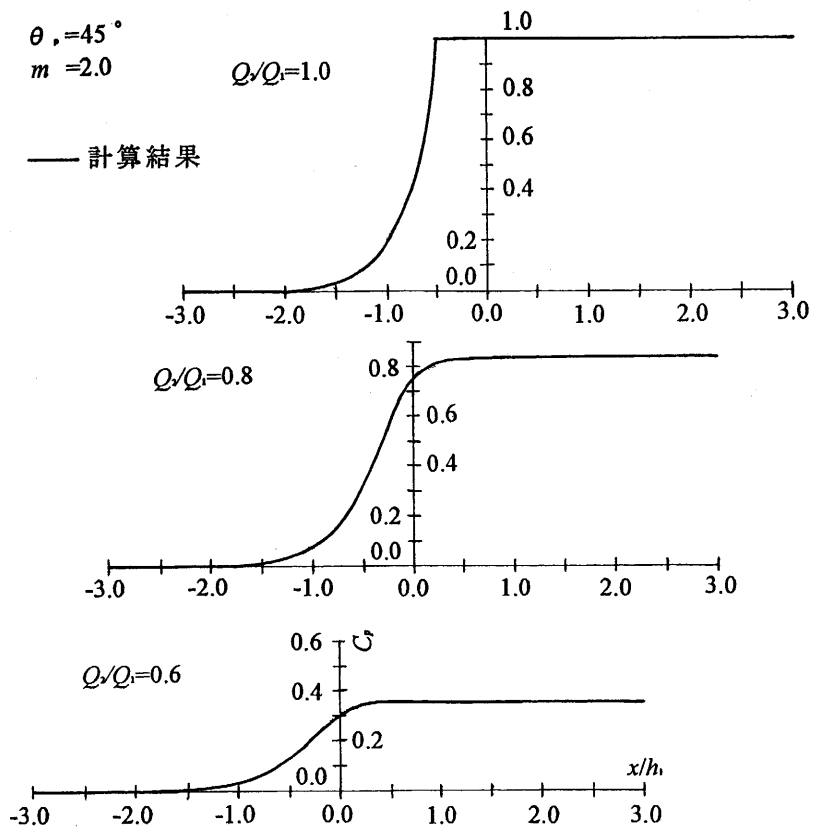


図4 本管壁面 AC 上における圧力分布 ($m = 2.0$ の場合)

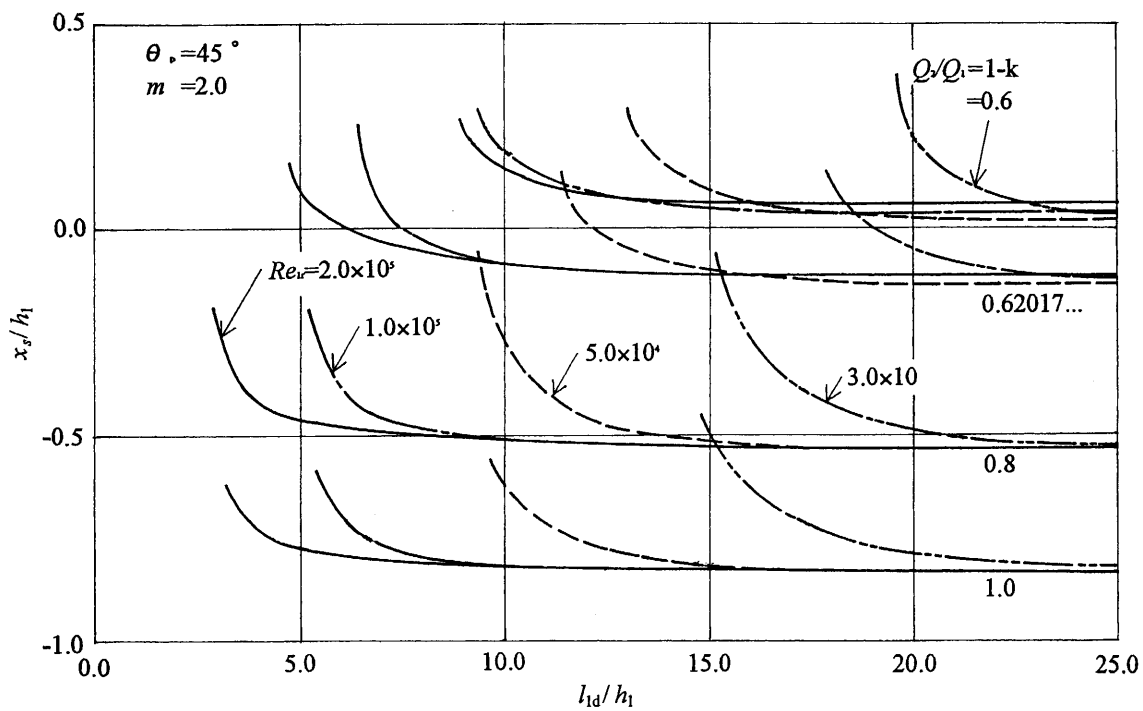


図5 本管壁面 AC 上における剥離点 ($m = 2.0$ の場合)

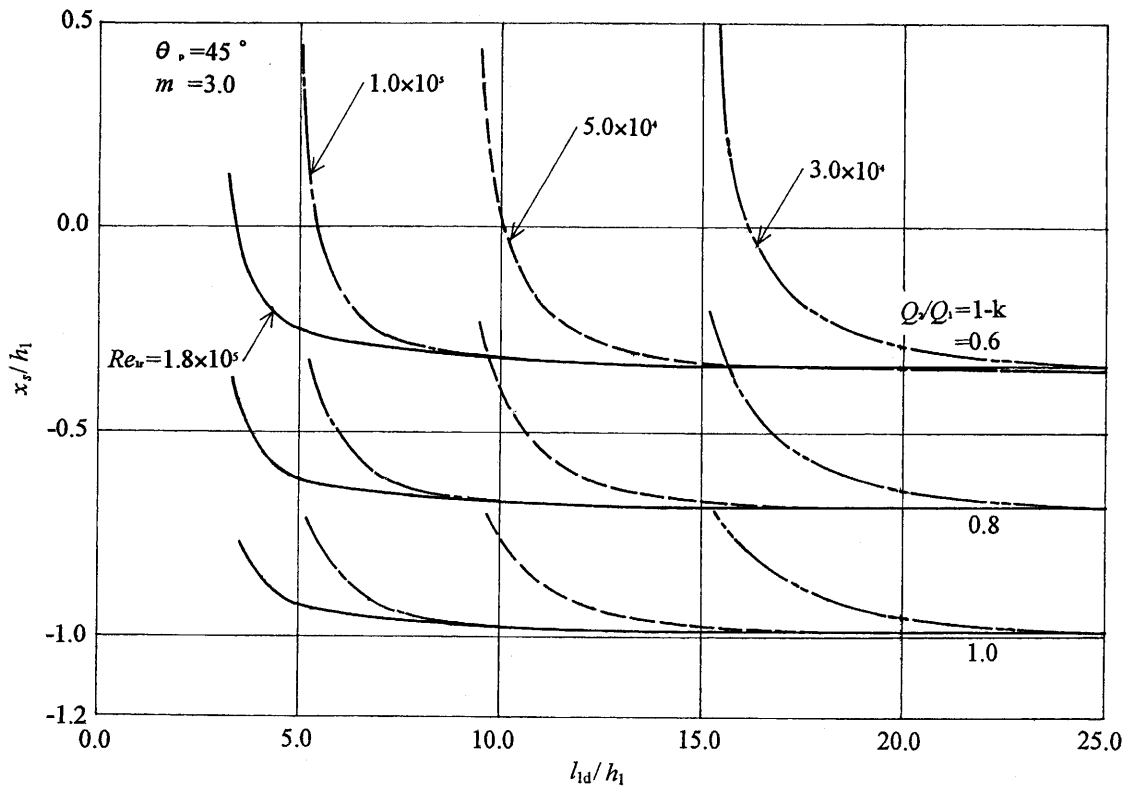


図6 本管壁面 AC 上における剥離点 ($m = 3.0$ の場合)

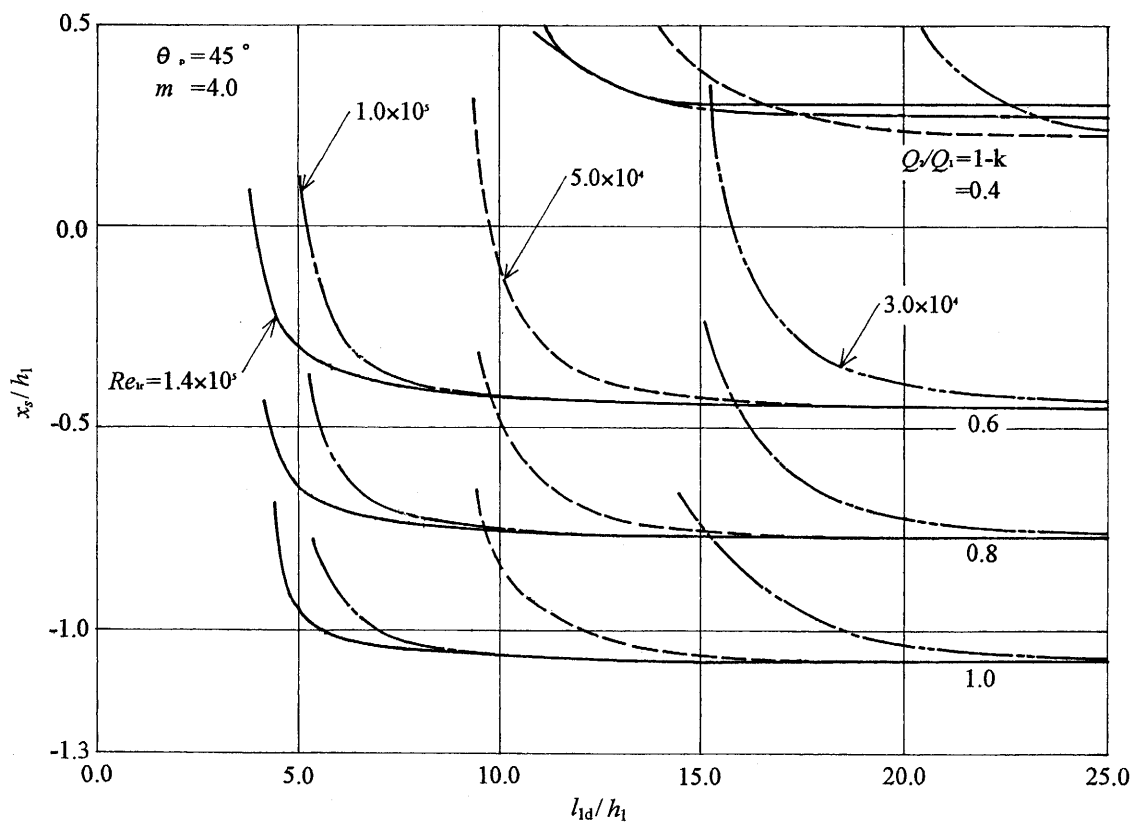


図7 本管壁面 AC 上における剥離点 ($m = 4.0$ の場合)

ことを示す。

これらの計算結果は、実験結果と比較する必要がある。また、それらの結果を含めた動脈において生じる損傷についての考察は、次報において述べる予定である。

4 結論

実用上重要な分岐角度が 45° の割り込み型分岐管の乱流における流動機構を知るため、管内の圧力分布と本管壁面上における剥離点を理論的に解析し、計算結果を示して検討した。

得られた結果を要約すれば、つぎのとおりである。

- (1) 自由流線理論に基づき壁面圧力分布を求めて考察した。
- (2) 境界層理論的手法により、乱流における本管壁面上における剥離点を解析した。
- (3) 長方形断面を有する分岐管路で乱流の場合について計算を行い、本管上流側管路長さ、面積比、レイノルズ数および流量比が変化する場合の本管壁面上における剥離点を考察した。

おわりに、計算に協力された藤井清美氏に感謝いたします。

参考文献

- [1] 嵩哲夫, 藤井清美, 田波精一, 佐藤久和, “割り込型分岐管内の流れ (第1報, 分岐角度が 90° で層流の場合における流動機構),” 空気調和・衛生工学会論文集, No. 27, pp.71-81 (1985).
- [2] 嵩哲夫, 藤井清美, “割り込み型分岐管内の流れ (第3報, 分岐角度が 45° で層流の場合における流動機構),” 空気調和・衛生工学会論文集, No. 58, pp.91-101 (1995).
- [3] 嵩哲夫, 藤井清美, 中島健一, “割り込み型分岐管内の流れ (第5報, 分岐角度が 135° で層流の場合における流動機構),” 空気調和・衛生工学会論文集, No. 66, pp.23-33 (1999-7).
- [4] 嵩哲夫, “割り込み型分岐管内の流動機構 (乱流で分岐角度が 90° の場合の本管内の剥離),” ターボ機械, 27-10, pp.610-620 (1999-10).
- [5] Suu, T., “Turbulent Flow Separation on Wall of Main Conduit in a 135° pipe Fitting,” Proc. 50th NCTAM, Scie. Counc. Jap., pp.311-320 (2001-10).
- [6] Schlichting, H., “Boundary Layer Theory (6th ed.),” McGraw-Hill Book Co., p.131 (1968).
- [7] 文献 [6], p.39.
- [8] 文献 [6], p.629.
- [9] 文献 [6], p.636.
- [10] 文献 [6], p.632.

(2005年9月12日 受理)