

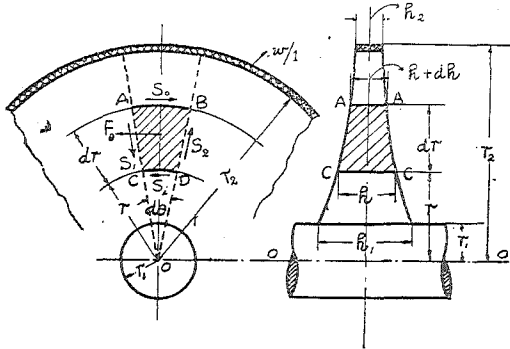
# 角加速度を有する回転円板の応力と その破損限界について (第5報)

竹 多 勇\*

(信州大学 工学部機械工学科教室)

## I 緒 言

蒸気タービン翼車に於ける様に、厚さが双曲線的に変化する円板が車軸に焼嵌めされ、角加速度を有し乍ら回転する場合に、円板に生ずる応力の一般式を求めた。而して普通設計に使用されている一定速度の場合の応力式と比較検討した結果、内周縁の応力は  $\dot{\omega}/\omega^2$  の値と共に著しく上昇する事を認めた。<sup>(2)(3)(4)(5)</sup> 又先に機械学会に於て筆者の発表した



第 1 図

一定厚の円板の応力は、特別の場合として一般式中に  $\alpha=0$  と置いて誘導されることを指摘した。主応力の最大値は内周縁に於て生ずるから、内周縁の主応力を基として、現在各種材料に対して認められている材料破損の限界に関する諸学説に従つて、破損限界曲線を求めて、これを比較した。車軸には角加速度と反対方向に振りモーメントが作用する事は勿論である。

## II 剪断応力 $\tau_{r\theta}$

第1図に示す様に、回転円板がその厚さが変化している時、微小部分を考え切線方向の力の平衡式を作ると、

$$S_0 - S_1 + S_2 d\theta/2 + S_1 dr/2 - F_\theta = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \tau_{r\theta} h r d\theta, & S_0 &= (\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} \cdot dr) (h + dh) (r + dr) d\theta \\ S_1 &= \tau_{r\theta} h dr, & S_2 &= \tau_{r\theta} h dr = S_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$F_\theta$  は角加速度に起因する切線方向の慣性力であり、 $\gamma$  を円板材料の比重量、 $\omega$ 、 $\dot{\omega}$  を夫々角速度、角加速度とする。

$$F_\theta = \frac{\gamma}{g} h r^2 \dot{\omega} d\theta dr, \quad \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} \quad (2')$$

(1) 中には半径及切線方向の垂直応力  $\sigma_r$ 、 $\sigma_\theta$  が全然含まれず、剪断応力  $\tau_{r\theta}$  のみが関係する。(1)と(2)より高次の微小量を省略して(3)を得る。

\* 信州大学教授

$$2 \tau_{r\theta} h + \tau_{r\theta} r \frac{dh}{dr} + \frac{d\tau_{r\theta}}{dr} hr = \frac{r}{g} hr^2 \dot{\omega} \quad (3)$$

$$\text{即ち} \quad d(r^2 h \tau_{r\theta}) / r dr = \frac{r}{g} hr^2 \dot{\omega} \quad (3')$$

今円板の厚さ $h$ が双曲線的に変化するものと仮定すると、 $h$ は次式で与えられる。

$$h = C/r^\alpha \quad (\alpha \geq 1, C \text{は定数}) \quad (4)$$

(4)を(3')に代入して積分すると、 $\tau_{r\theta}$ が求められる。

$$\tau_{r\theta} = \frac{r}{g} r^2 \dot{\omega} / (4-\alpha) + A/r^2 h \quad (5)$$

$A$ は積分常数であり、外周縁の境界条件から決定される。外周縁 $r=r_2$ には一様な分布質量が附着して居り、その円周上単位長さ当りの重さを $w$ 、それに起因する切線方向の慣性力を $f_\theta$ とすると、 $f_\theta = \frac{w}{g} r_2 \dot{\omega}$ となる。外周縁にて $h=h_2 = C/r_2^\alpha$ であるから、剪断応力 $q_\theta = f_\theta / h_2$ が負の方向(反時計方向)に作用する。

$$q_\theta = \frac{w}{gC} r_2^{\alpha+1} \dot{\omega} \quad (6)$$

故に外周 $r=r_2$ に於ける境界条件は $\tau_{r\theta} = -q_\theta$ となる。

$$\text{即ち} \quad \frac{r}{g} r_2^2 \dot{\omega} / (4-\alpha) + A/r_2^2 h_2 = - \frac{w}{g} r_2^{\alpha+1} \dot{\omega} / C \quad \text{より} A \text{が求められる。}$$

$$A = - \left\{ \frac{r}{g} r_2^{4-\alpha} \dot{\omega} C / (4-\alpha) + \frac{w}{g} r_2^{\alpha+1} \dot{\omega} \right\} \quad (7)$$

内周縁では円板が車軸に焼嵌めされて、剪断応力により振りモーメントを伝達し得るものとし、焼嵌めに因る応力は考えないことにする。

今 $W$ を外周縁の全附着質量、 $W_d$ を円板自身の全重量とすると、

$$W_d = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \gamma h dr = 2\pi \gamma C r_2^{(2-\alpha)} (n^{2-\alpha} - 1) / (2-\alpha) \quad n^{2-\alpha} \quad \left. \begin{array}{l} W = 2\pi r_2 w, \\ \end{array} \right\} \quad (8)$$

従つて、

$$C = (2-\alpha) n^{2-\alpha} W_d / 2\pi \gamma (n^{2-\alpha} - 1) r_2^{2-\alpha} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (9)$$

但し $n=r_2/r_1 > 1$ である。(5), (7), (9), を用いて剪断応力 $\tau_{r\theta}$ は次の様になる。

$$\tau_{r\theta} = -\sigma_1 (\dot{\omega} / \omega^2) \{ (\lambda^{\alpha-2} - \lambda^2) / (4-\alpha) + \mu \lambda^{\alpha-2} (1 - 1/n^{2-\alpha}) / (2-\alpha) \} \quad (10)$$

但し $\lambda=r/r_2$ ,  $\sigma_1 = \frac{r}{g} r_2^2 \omega^2$ ,  $\mu=W/W_d$ である。 $\sigma_1$ の意義は円板の外半径に等しい平均半径を有し、円板自身と同質の材料にて作られた円輪が角速度 $\omega$ で回転する時に生ずるたが応力である。而して $\sigma_1$ は単に式の簡易化のため便利のため導入したに過ぎない。

### III 車軸に作用する振りモーメント

内周縁 $r=r_1$ では $\lambda=1/n$ ;  $\tau_{r\theta}$ の値を $(\tau_{r\theta})_{r=r_1}$ とすると、(10)に依つて、

$$(\tau_{r\theta})_{r=r_1} = -\sigma_1 (\dot{\omega} / \omega^2) \{ (n^{2-\alpha} - 1/n^2) / (4-\alpha) + \mu (n^{2-\alpha} - 1) / (2-\alpha) \} \quad (11)$$

円板の軸方向の単位長さ当りの振りモーメントを $M_t$ とすると、

$$M_t = 2\pi r_1^2 (\tau_{r\theta})_{r=r_1} = -M_i (\dot{\omega}/\omega^2) \{ (1/n^\alpha - 1/n^4)/(4-\alpha) + \mu(1/n^\alpha - 1/n^2)/(2-\alpha) \} \quad (12)$$

但し便利のため  $M_i = 2\pi \sigma_i r_2^2$  と置いた。(12)を書き更めると、

$$-M_t/M_i = K_3 (\dot{\omega}/\omega^2) \quad (12)'$$

(12)'によると、 $M_t/M_i$  は  $\dot{\omega}/\omega^2$  に対して直線的に変化する。但し

$$K_3 = (1/n^\alpha - 1/n^4)/(4-\alpha) + \mu(1/n^\alpha - 1/n^2)/(2-\alpha) \quad (12)''$$

(第2図参照)

#### IV 垂直応力 $\sigma_r, \sigma_\theta$

円板の微小部分の半径方向の力の平衡式とフックの弾性法則から、半径及切線方向の垂直応力  $\sigma_r, \sigma_\theta$  は一般に次の式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \{E/(1-\nu^2)\} \{ (3+\nu) ar^2 + (\phi_1+\nu) B_1 r^{\phi_1-1} + (\phi_2+\nu) B_2 r^{\phi_2-1} \} \\ \sigma_\theta &= \{E/(1-\nu^2)\} \{ (1+3\nu) ar^2 + (1+\phi_1\nu) B_1 r^{\phi_1-1} + (1+\phi_2\nu) B_2 r^{\phi_2-1} \} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \alpha/2 + \sqrt{\alpha^2/4 + \alpha\nu + 1}, \quad \phi_2 = \alpha/2 - \sqrt{\alpha^2/4 + \alpha\nu + 1} \\ \phi_1 + \phi_2 &= \alpha, \quad a = - (1-\nu^2) r\omega^2/Eg \{8-\alpha(3+\nu)\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$E$ はヤング率、 $\nu$ はポアソン比、 $B_1$ 及 $B_2$ は積分常数である。内外周縁に於ける境界条件として。

$$\sigma_r = 0 \quad (r=r_1); \quad \sigma_r = p_r \quad (r=r_2) \quad (15)$$

$p_r$ は外周縁に等分布した附着質量の遠心力に起因する半径方向の垂直応力の値である。

$$p_r = W r_2 \omega^2 / g h_2 = w \omega^2 r_2^{\alpha+1} / g \cdot C \quad (16)$$

(15)の条件から次の2式を得る。

$$(\phi_1+\nu) B_1 r_1^{\phi_1-1} + (\phi_2+\nu) B_2 r_1^{\phi_2-1} = -(3+\nu) ar_1^2 \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} (\phi_1+\nu) B_1 r_2^{\phi_1-1} + (\phi_2+\nu) B_2 r_2^{\phi_2-1} \\ = -(3+\nu) ar_2^2 + (1-\nu^2) w \omega^2 r_2^{\alpha+1} / EgC \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(17), (18)より $B_1, B_2$ が決定される。

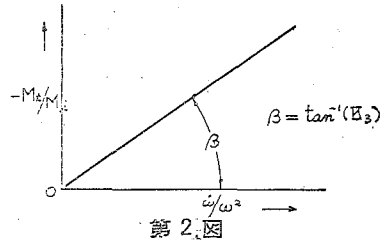
今

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} (\phi_1+\nu) r_1^{\phi_1-1}, & (\phi_2+\nu) r_1^{\phi_2-1} \\ (\phi_1+\nu) r_2^{\phi_1-1}, & (\phi_2+\nu) r_2^{\phi_2-1} \end{vmatrix} \\ &= (\phi_1+\nu) (\phi_2+\nu) (r_1^{\phi_1} r_2^{\phi_2} - r_1^{\phi_2} r_2^{\phi_1}) / r_1 r_2 \end{aligned}$$

と置くと、

$$B_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -(3+\nu) ar_1^2, & (\phi_2+\nu) r_1^{\phi_2-1} \\ \{-(3+\nu) ar_2^2 + (1-\nu^2) w \omega^2 r_2^{\alpha+1} / EgC\}, & (\phi_2+\nu) r_2^{\phi_2-1} \end{vmatrix}$$

$$B_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} (\phi_1+\nu) r_1^{\phi_1-1}, & -(3+\nu) ar_1^2 \\ (\phi_1+\nu) r_2^{\phi_1-1}, & \{-(3+\nu) ar_2^2 + (1-\nu^2) w \omega^2 r_2^{\alpha+1} / EgC\} \end{vmatrix}$$



(14)の關係を用いて簡単にすると、

$$B_1 = - (1-\nu^2)(\sigma_i / E) n^{\alpha-2} \left[ (3+\nu)(1/n^{\phi_2-1-1}/n^2) / \{8-\alpha(3+\nu)\} \right. \\ \left. + \mu(1-n^{\alpha-2}) / (2-\alpha)n^{\phi_2-1} \right] / (\phi_1+\nu) \Gamma_2^{\phi_1-1} (n^{\phi_2-1}-n^{\phi_1-1}) \quad (19)$$

$$B_2 = - (1-\nu^2)(\sigma_i / E) n^{\alpha-2} \left[ (3+\nu)(1/n^2-1/n^{\phi_1-1}) / \{8-\alpha(3+\nu)\} \right. \\ \left. - \mu(1-n^{\alpha-2}) / (2-\alpha) n^{\phi_1-1} \right] / (\phi_2+\nu) \Gamma_2^{\phi_2-1} (n^{\phi_2-1}-n^{\phi_1-1}) \quad (20)$$

(13), (19), (20)より垂直応力 $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ を得る。

$$\sigma_r = \sigma_i n^{\alpha-2} \left[ (3+\nu) \left\{ (1/n^2-1/n^{\phi_1-1}) \lambda^{\phi_2-1} - (1/n^2-1/n^{\phi_2-1}) \lambda^{\phi_1-1} \right\} / \{8-\alpha(3+\nu)\} \right. \\ \left. + \mu (1-n^{\alpha-2}) (\lambda^{\phi_1-1}/n^{\phi_2-1} - \lambda^{\phi_2-1}/n^{\phi_1-1}) / (2-\alpha) \right] / (n^{\phi_1-1} - n^{\phi_2-1}) \\ - (3+\nu) \sigma_i \lambda^2 / \{8-\alpha(3+\nu)\} \quad (21)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_i n^{\alpha-2} \left[ (3+\nu) \left\{ (1+\phi_2\nu) \lambda^{\phi_2-1} (1/n^2-1/n^{\phi_1-1}) / (\phi_2+\nu) \right. \right. \\ \left. \left. - (1+\phi_1\nu) (1/n^2-1/n^{\phi_2-1}) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1+\nu) \right\} / \{8-\alpha(3+\nu)\} \right. \\ \left. + \mu(1-n^{\alpha-2}) \left\{ (1+\phi_1\nu) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1+\nu) n^{\phi_2-1} \right. \right. \\ \left. \left. - (1+\phi_2\nu) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2+\nu) n^{\phi_1-1} \right\} / (2-\alpha) \right] / (n^{\phi_1-1} - n^{\phi_2-1}) \\ - (1+3\nu) \sigma_i \lambda^2 / \{8-\alpha(3+\nu)\} \quad (22)$$

## V 主 応 力 の 値

IIで求めた剪断応力 $\tau_{r\theta}$ とIVで求めた垂直応力 $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ より主応力を計算する事が出来る。今簡単にするため、次の様に置く。

$$\sigma_r = C_1 \sigma_i ; \sigma_\theta = C_2 \sigma_i ; \tau_{r\theta} = -K_2 (\dot{\omega}/\omega^2) \sigma_i \quad (23)$$

(23)より主応力 $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ 及最大剪断応力 $\tau_m$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_i \left\{ (C_1 + C_2)/2 + \sqrt{(C_1 - C_2)^2/4 + K_2^2 (\dot{\omega}/\omega^2)^2} \right\} \\ \sigma_2 &= \sigma_i \left\{ (C_1 + C_2)/2 - \sqrt{(C_1 - C_2)^2/4 + K_2^2 (\dot{\omega}/\omega^2)^2} \right\} \\ \tau_m &= \sigma_i \sqrt{(C_1 + C_2)^2/4 + K_2^2 (\dot{\omega}/\omega^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$(C_1 + C_2)/2 = K_1$  ;  $(C_1 - C_2)/2 = K_1'$  と置くと、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_i \left\{ K_1 + \sqrt{K_1'^2 + K_2^2 (\dot{\omega}/\omega^2)^2} \right\}, \sigma_2 = \sigma_i \left\{ K_1 - \sqrt{K_1'^2 + K_2^2 (\dot{\omega}/\omega^2)^2} \right\} \\ \tau_m &= \sigma_i \sqrt{K_1'^2 + K_2^2 (\dot{\omega}/\omega^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

(10), (21), (22) から  $C_1^2$ ,  $C_2$ ,  $K_2$ ,  $K_1$ ,  $K_1'$  の値を得る。

$$C_1 = n^{\alpha-2} \left[ (3+\nu) (1/n^2-1/n^{\phi_1-1}) \lambda^{\phi_1-1} - (1/n^2-1/n^{\phi_2-1}) \lambda^{\phi_1-1} \right] / \{8-\alpha(3+\nu)\} \\ + \mu(1-n^{\alpha-2}) (\lambda^{\phi_1-1}/n^{\phi_2-1} - \lambda^{\phi_2-1}/n^{\phi_1-1}) / (2-\alpha) \Big] / (n^{\phi_1-1} - n^{\phi_2-1}) \\ - (3+\nu) \lambda^2 / \{8-\alpha(3+\nu)\} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & n^{\alpha-2} \left\{ (3+\nu) \left\{ (1+\phi_2\nu) (1/n^2-1/n^{\phi_1-1}) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2+\nu) \right. \right. \\
& - (1+\phi_1\nu) (1/n^2-1/n^{\phi_2-1}) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1+\nu) \left. \right\} / \{8-\alpha(3+\nu)\} \\
& + \mu(1-n^{\alpha-2}) \left\{ (1+\phi_1\nu) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1+\nu) n^{\phi_2-1} \right. \\
& \left. - (1+\phi_2\nu) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2+\nu) n^{\phi_1-1} \right\} / (n^{\phi_1-1} - n^{\phi_2-1}) \\
& - (1+3\nu) \lambda^2 / \{8-\alpha(3+\nu)\} \quad (26)
\end{aligned}$$

$$K_2 = (\lambda^{\alpha-2} - \lambda^2) / (4-\alpha) + \mu(1-1/n^{2-\alpha}) \lambda^{\alpha-2} / (2-\alpha) \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
K_1 = & n^{\alpha-2} \left\{ (3+\nu) \left\{ (1+\nu)(1+\phi_2) (1/n^2-1/n^{\phi_1-1}) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2+\nu) \right. \right. \\
& - (1+\nu)(1+\phi_1) (1/n^2-1/n^{\phi_2-1}) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1+\nu) \left. \right\} / \{8-\alpha(3+\nu)\} \\
& + \mu(1-n^{\alpha-2}) \left\{ (1+\nu)(1+\phi_1) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1+\nu) n^{\phi_2-1} \right. \\
& \left. - (1+\nu)(1+\phi_2) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2+\nu) n^{\phi_1-1} \right\} / (2-\alpha) \left. \right\} / 2(n^{\phi_1-1} - n^{\phi_2-1}) \\
& - 2(1+\nu) \lambda^2 / \{8-\alpha(3+\nu)\} \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1' = & n^{\alpha-2} \left\{ (3+\nu) \left\{ (1-\nu)(\phi_2-1) (1/n^2-1/n^{\phi_1-1}) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2+\nu) \right. \right. \\
& - (1-\nu)(\phi_1-1) (1/n^2-1/n^{\phi_2-1}) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1+\nu) \left. \right\} / \{8-\alpha(3+\nu)\} \\
& + \mu(1-n^{\alpha-2}) \left\{ (1-\nu)(\phi_1-1) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1+\nu) n^{\phi_2-1} \right. \\
& \left. - (1-\nu)(\phi_2-1) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2+\nu) n^{\phi_1-1} \right\} / (2-\alpha) \left. \right\} / 2(n^{\phi_1-1} - n^{\phi_2-1}) \\
& - (1-\nu) \lambda^2 / \{8-\alpha(3+\nu)\} \quad (29)
\end{aligned}$$

## Ⅶ 内周縁の主応力

内周縁  $r=r_1$  に於ける主応力の値は、Ⅴの諸式中に  $\lambda=1/n$  と置いて求められる。しかも内周の応力は最大となる事は想像し得る事であるから、此節で主応力値を求める事とする。

(25)によると、 $(C_1)_{r=r_1}=0$ 、又(26)より、

$$\begin{aligned}
(C_2)_{r=r_1} = & n^{\alpha-2} \left[ (3+\nu) \left\{ (1+\phi_2\nu) (1/n^2-1/n^{\phi_1-1}) / (\phi_2+\nu) n^{\phi_2-1} \right. \right. \\
& - (1+\phi_1\nu) (1/n^2-1/n^{\phi_2-1}) / (\phi_1+\nu) n^{\phi_1-1} \left. \right\} / \{8-\alpha(3+\nu)\} \\
& + \mu(1-n^{\alpha-2}) \left\{ (1+\phi_1\nu) / (\phi_1+\nu) n^{\phi_1+\phi_2-2} \right. \\
& \left. - (1+\phi_2\nu) / (\phi_2+\nu) n^{\phi_1+\phi_2-2} \right\} / (2-\alpha) \left. \right] / (n^{\phi_1-1} - n^{\phi_2-1}) \\
& - (1+3\nu) / \{8-\alpha(3+\nu)\} n^2 \quad (29)'
\end{aligned}$$

故に  $K_1 = -K_1' = C_2/2$  なる関係がある。(29)' 又は一般式(28)、(29)を用いて、

$$\begin{aligned}
K_1 = -K_1' = & \left[ (3+\nu) \left\{ (1+\phi_2\nu) (n^{\alpha-2}/n^{\phi_2+1}-1) / (\phi_2+\nu) \right. \right. \\
& - (1+\phi_1\nu) (n^{\alpha-2}/n^{\phi_1+1}-1) / (\phi_1+\nu) \left. \right\} / \{8-\alpha(3+\nu)\} \\
& + \mu(1-n^{\alpha-2}) \left\{ (1+\phi_1\nu) / (\phi_1+\nu) \right.
\end{aligned}$$

$$\frac{-(1+\phi_2\nu)/(\phi_2+\nu)\}/(2-\alpha)}{2(n^{\phi_1-1}-n^{\phi_2-1})} - (1+3\nu)/2\{8-\alpha(3+\nu)\}n^2 \quad (30)$$

(27)により,

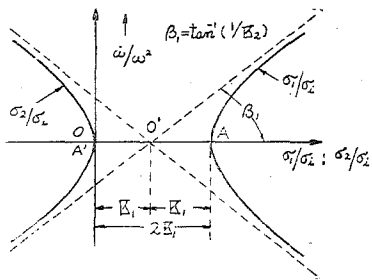
$$K_2 = (1/n^{\alpha-2}-1/n^2)/(4-\alpha) + \mu(1/n^{\alpha-2}-1)/(2-\alpha) \quad (31)$$

(30), (31)の $K_1$ 及 $K_2$ を用いて, 主応力は次の様に表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_i \{K_1 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2(\dot{\omega}/\omega^2)^2}\}, \quad \sigma_2 = \sigma_i \{K_1 - \sqrt{K_1^2 + K_2^2(\dot{\omega}/\omega^2)^2}\} \\ \tau_m &= \sigma_i \sqrt{K_1^2 + K_2^2(\dot{\omega}/\omega^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

(32)の $\sigma_1; \sigma_2$ の2式を变形すると,

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1/\sigma_i - K_1)^2 / K_1^2 - (\dot{\omega}/\omega^2)^2 / (K_1/K_2)^2 &= 1 \\ (\sigma_2/\sigma_i - K_1)^2 / K_1^2 - (\dot{\omega}/\omega^2)^2 / (K_1/K_2)^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$



第 3 図

$\sigma_1/\sigma_i, \dot{\omega}/\omega^2$ を座標にとると, 双曲線となる。又  $\sigma_2/\sigma_i$  の曲線は此の双曲線の他の一枝である。(第3図参照)

(33)の $\tau_m$ の式より,

$$(\tau_m/\sigma_i)^2 / K_1^2 - (\dot{\omega}/\omega^2)^2 / (K_1/K_2)^2 = 1 \quad (34)$$

$\tau_m/\sigma_i, \dot{\omega}/\omega^2$ を座標にとると, (34)も亦双曲線となる。(第4図参照)即ち内周縁の主応力 $\sigma_1; \sigma_2$ 及最大剪断応力 $\tau_m$ は角加速度 $\dot{\omega}$ の増加と共に双曲線的に著しく増加する事が認められる。

VII 特別の場合,  $\alpha=0$

円板の厚さが一定の場合には,  $\alpha=0$ に相当する。この場合は一般式から直ちに求められる。

$$\phi_1=1, \quad \phi_2=-1 \quad (35)$$

(28), (29)より,

$$K_1 = (3+\nu)\{(1+1/n^2)-2(1+\nu)\lambda^2/(3+\nu)\}/8 + \mu/2 \quad (36)$$

$$K_1' = -(3+\nu)\{1/n^2\lambda^2 + (1-\nu)\lambda^2/(3+\nu)\}/8 - \mu/2n^2\lambda^2 \quad (37)$$

(27)より,

$$K_2 = (1/\lambda^2 - \lambda^2)/4 + \mu(1-1/n^2)/2\lambda^2 \quad (38)$$

更に外周縁に分布質量が附着してゐない場合には $\mu=0$ として,

$$K_1 = (3+\nu)\{(1+1/n^2)-2(1+\nu)\lambda^2/(3+\nu)\}/8 \quad (39)^{(2)}$$

$$K_1' = -(3+\nu)\{1/n^2\lambda^2 + (1-\nu)\lambda^2/(3+\nu)\}/8 \quad (40)^{(3)}$$

$$K_2 = (1/\lambda^2 - \lambda^2)/4 \quad (41)^{(4)}$$

(12)より車軸に作用する振りモーメント $M_t$ は,

$$M_t = -M_i (\dot{\omega}/\omega^2) \{1-1/n^4\}/4 + \mu(1-1/n^2)/2 \quad (42)$$

更に外周縁に分布質量のない場合には $\mu=0$ と置いて、

$$M_t = -M_i (\dot{\omega}/\omega^2)(1-1/n^4)/4 \quad (43)^{(5)}$$

一定厚さで分布質量が外周縁に附着していない場合の式(39), (40), (41), (43)は筆者が前に別箇に誘導したものと一致している。而して主応力並に最大剪断応力は一般式(24)'によつて計算し得る事は勿論である。

### VIII $\alpha=2, \alpha=4$ の場合

$\alpha=2, \alpha=4$ の両場合は一般式が適用出来ないから、特別に取扱う必要がある。これ等の場合を要約する。 (i)  $\alpha=2$ の場合

$$(5)より, \quad \tau_{r\theta} = \gamma r^2 \dot{\omega}/2g + A/r^2 h \quad (44)$$

$$(4)より, \quad h = C/r^2 \quad (45)$$

$W_d = 2\pi \gamma C \log n$ となるから、

$$C = W_d / 2\pi \gamma \log n = r_2 w / \mu \gamma \log n \quad (46)$$

外周縁に於ける境界条件 $(\tau_{r\theta})_{r=r_2} = -q_\theta$ から、

$$A = -(\gamma r_2^2 \dot{\omega}/2g C + w r_2^3 \dot{\omega}/g) \quad (47)$$

(44), (45), (46), (47)を用いて、剪断応力は次の様になる。

$$\tau_{r\theta} = -\sigma_i \{(1-\lambda^2)/2 + \mu \log n\} (\dot{\omega}/\omega^2) = -\sigma_i (\dot{\omega}/\omega^2) K_2 \quad (48)$$

$$\text{但し } K_2 = (1-\lambda^2)/2 + \mu \log n \quad (49)$$

車軸に作用する振りモーメントを $M_t$ として、

$$M_t = 2\pi r_1^2 (\tau_{r\theta})_{r=r_1} \\ = -M_i (\dot{\omega}/\omega^2) \{(1-1/n^2)/2n^2 + \mu \log n/n^2\} = -M_i (\dot{\omega}/\omega^2) K_3 \quad (50)$$

$$\text{但し } K_3 = \{(1-1/n^2)/2n^2 + \mu \log n/n^2\} \quad (51)$$

$$(14)より \quad \phi_1 = 1 + \sqrt{2(1+\nu)}, \quad \phi_2 = 1 - \sqrt{2(1+\nu)} \quad (52)$$

(17), (18), 及(46)を用いて、積分常数 $B_1, B_2$ を求めると、

$$B_1 = -((1-\nu^2)/E) \sigma_i \{(3+\nu)(1/n^{\phi_2-1} - 1/n^2)/2(1-\nu) \\ + \mu \log n/n^{\phi_2-1}/(\phi_1+\nu) r_2^{\phi_1-1} (n^{\phi_2-1} - n^{\phi_1-1})\} \quad (53)$$

$$B_2 = ((1-\nu^2)/E) \sigma_i \{(3+\nu)(1/n^2 - 1/n^{\phi_1-1})/2(1-\nu) \\ - \mu \log n/n^{\phi_1-1}\} / (\phi_2+\nu) r_2^{\phi_2-1} (n^{\phi_2-1} - n^{\phi_1-1}) \quad (54)$$

(53), (54)を用いて(13)より、

$$\sigma_r = C_1 \sigma_i = \sigma_i \left[ (3+\nu) \left\{ (1/n^2 - 1/n^{\phi_1-1}) \lambda^{\phi_2-1} - (1/n^2 - 1/n^{\phi_2-1}) \lambda^{\phi_1-1} \right\} / 2(1-\nu) \right. \\ \left. + \mu (\lambda^{\phi_1-1} / n^{\phi_2-1} - n^{\phi_2-1} / n^{\phi_1-1}) \log n \right] / (n^{\phi_1-1} - n^{\phi_2-1}) \\ - (3+\nu) \lambda^2 / 2(1-\nu) \quad (55)$$

$$\sigma_\theta = C_2 \sigma_i = \sigma_i \left[ (3+\nu) \left\{ (1+\phi_2\nu)(1/n^2 - 1/n^{\phi_1-1}) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2+\nu) \right. \right. \\ \left. \left. - (1+\phi_1\nu)(1/n^2 - 1/n^{\phi_2-1}) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1+\nu) \right\} / 2(1-\nu) \right. \\ \left. + \mu \{ (1+\phi_1\nu) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1+\nu) n^{\phi_2-1} \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (1 + \phi_2 \nu) \lambda^{\phi_2 - 1} / (\phi_2 + \nu) n^{\phi_1 - 1} \log n \Big] / (n^{\phi_1 - 1} - n^{\phi_2 - 1}) \\
& - (1 + 3\nu) \lambda^2 / 2(1 - \nu) \tag{56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1 = & \left[ (3 + \nu) \{ (1 + \phi_2) (1 + \nu) (1/n^2 - 1/n^{\phi_1 - 1}) \lambda^{\phi_2 - 1} / (\phi_2 + \nu) \right. \\
& - (1 + \phi_1) (1 + \nu) (1/n^2 - 1/n^{\phi_2 - 1}) \lambda^{\phi_1 - 1} / (\phi_1 + \nu) \Big] / 2(1 - \nu) \\
& + \mu \{ (1 + \phi_1) (1 + \nu) \lambda^{\phi_1 - 1} / (\phi_1 + \nu) n^{\phi_2 - 1} \\
& - (1 + \phi_2) (1 + \nu) \lambda^{\phi_2 - 1} / (\phi_2 + \nu) n^{\phi_1 - 1} \log n \Big] / 2(n^{\phi_1 - 1} - n^{\phi_2 - 1}) \\
& - (1 + \nu) \lambda^2 / (1 - \nu) \tag{57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1' = & \left[ (3 + \nu) \{ (1 - \nu) (\phi_2 - 1) (1/n^2 - 1/n^{\phi_1 - 1}) \lambda^{\phi_2 - 1} / (\phi_2 + \nu) \right. \\
& - (1 - \nu) (\phi_1 - 1) (1/n^2 - 1/n^{\phi_2 - 1}) \lambda^{\phi_1 - 1} / (\phi_1 + \nu) \Big] / 2(1 - \nu) \\
& + \mu \{ (1 - \nu) (\phi_1 - 1) \lambda^{\phi_1 - 1} / (\phi_1 + \nu) n^{\phi_2 - 1} \\
& - (1 - \nu) (\phi_2 - 1) \lambda^{\phi_2 - 1} / (\phi_2 + \nu) n^{\phi_1 - 1} \log n \Big] / 2(n^{\phi_1 - 1} - n^{\phi_2 - 1}) - \lambda^2 / 2 \tag{58}
\end{aligned}$$

(57), (58)を用い(24)'により主応力 $\sigma_1, \sigma_2$ , 最大剪断応力 $\tau_m$ が求められる。

内周縁に於ける $K_1, K_1'$ の値は(57)(58)中に $\lambda = 1/n$ と置いて得られる。

$$\begin{aligned}
K_1 = -K_1' = C_2/2 = & \left[ (3 + \nu) \{ (1 + \phi_2 \nu) (1/n^{\phi_2 + 1} - 1) / (\phi_2 + \nu) \right. \\
& - (1 + \phi_1 \nu) (1/n^{\phi_1 + 1} - 1) / (\phi_1 + \nu) \Big] / 2(1 - \nu) + \mu \{ (1 + \phi_1 \nu) / (\phi_1 + \nu) \\
& - (1 + \phi_2 \nu) / (\phi_2 + \nu) \log n \Big] / 2(n^{\phi_1 - 1} - n^{\phi_2 - 1}) \\
& - (1 + 3\nu) / 4(1 - \nu) n^2 \tag{59}
\end{aligned}$$

(49)中に $\lambda = 1/n$ と置いて,

$$K_2 = (1 - 1/n^2) / 2 + \mu \log n \tag{60}$$

内周縁の主応力 $\sigma_1, \sigma_2$ , 最大剪断応力 $\tau_m$ は(59), (60)を用い, (32)より求められる。

(ii)  $\alpha = 4$ の場合

(3)'より $\frac{d}{dr}(r^2 h r_{r\theta}) = \frac{\gamma}{g} h r^3 \dot{\omega}$ , 又(5)より $h = C/r^4$ ,  $h$ を前式に代入して積分すると

$$\tau_{r\theta} = (\gamma/g) \dot{\omega} r^2 \log r + A/r^2 h \tag{61}$$

外周縁の境界条件  $(\tau_{r\theta})_{r=r_2} = -q_{\theta}$  より,

$$A = - \{ (\gamma/g) \dot{\omega} C \log r_2 + (w/g) r_2^3 \dot{\omega} \} \tag{62}$$

然るに(9)より,

$$C = 2w r_2^3 / \gamma (n^2 - 1) \mu \tag{63}$$

(62), (63)を用いて(61)より剪断応力 $\tau_{r\theta}$ が求められる。

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = & -\sigma_i (\dot{\omega}/\omega^2) \{ -\lambda^2 \log \lambda + \mu (n^2 - 1) \lambda^2 / 2 \} \\
& = -\sigma_i (\dot{\omega}/\omega^2) K_2 \tag{64}
\end{aligned}$$

但し

$$K_2 = -\lambda^2 \log \lambda + \mu (n^2 - 1) \lambda^2 / 2 \tag{65}$$

車軸に作用する振りモーメントを $M_t$ として,

$$\begin{aligned}
M_t = & 2\pi r_1^2 (\tau_{r\theta})_{r=r_1} \\
& = -M_i (\dot{\omega}/\omega^2) \{ \log n + \mu (n^2 - 1) / 2 \} / n^2 = -M_i (\dot{\omega}/\omega^2) K_3 \tag{66}
\end{aligned}$$



但し 
$$K_3 = \{\log n + \mu(n^2 - 1)/2\} / n^4 \quad (67)$$

(14)中に $\alpha=4$ と置いて,

$$\phi_1 - 1 = 1 + \sqrt{4\nu + 5}, \quad \phi_2 - 1 = 1 - \sqrt{4\nu + 5} \quad (68)$$

(28), (29)中に $\alpha=4$ と置いて,

$$\begin{aligned} K_i = n^2 & \left[ -(3+\nu) \{ (1+\nu)(1+\phi_2) (1/n^2 - 1/n^{\phi_1-1}) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2 + \nu) \right. \\ & - (1+\nu)(1+\phi_1) (1/n^2 - 1/n^{\phi_2-1}) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1 + \nu) \} / 4(1+\nu) \\ & - \frac{\mu}{2} (1-n^2) \{ (1+\nu)(1+\phi_1) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1 + \nu) n^{\phi_2-1} \\ & \left. - (1+\nu)(1+\phi_2) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2 + \nu) n^{\phi_1-1} \} \right] / 2(n^{\phi_1-1} - n^{\phi_2-1}) + 1/2 \quad (69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_i' = n^2 & \left[ -(3+\nu) \{ (1-\nu)(\phi_2-1) (1/n^2 - 1/n^{\phi_1-1}) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2 + \nu) \right. \\ & - (1-\nu)(\phi_1-1) (1/n^2 - 1/n^{\phi_2-1}) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1 + \nu) \} / 4(1+\nu) \\ & - \frac{\mu}{2} (1-n^2) \{ (1-\nu)(\phi_2-1) \lambda^{\phi_2-1} / (\phi_2 + \nu) n^{\phi_1-1} \\ & \left. - (1-\nu)(\phi_1-1) \lambda^{\phi_1-1} / (\phi_1 + \nu) n^{\phi_2-1} \} \right] / 2(n^{\phi_1-1} - n^{\phi_2-1}) \\ & + 4(1-\nu) \lambda^2 / 4(1+\nu) \quad (70) \end{aligned}$$

(65), (69), (70)を用い(24)より主応力 $\sigma_1, \sigma_2$ 最大剪断応力 $\tau_m$ が求められる。

内周縁に於ける $K_i, K_i'$ の値は(30)中に $\alpha=4$ と置いて,

$$\begin{aligned} K_i = -K_i' = & \left[ -(3+\nu) \{ (1+\phi_2\nu)(n^2/n^{\phi_2+1} - 1) / (\phi_2 + \nu) \right. \\ & - (1+\phi_1\nu)(n^2/n^{\phi_1+1} - 1) / (\phi_1 + \nu) \} / 4(1+\nu) \\ & \left. - \frac{\mu}{2} (1-n^2) \{ (1+\phi_1\nu) / (\phi_1 + \nu) - (1+\phi_2\nu) / (\phi_2 + \nu) \} \right] / 2(n^{\phi_1-1} - n^{\phi_2-1}) \\ & + (1+3\nu) / 8(1+\nu) n^2 \quad (71) \end{aligned}$$

又(65)より, 
$$K_2 = \log n / n^2 + \mu(1 - 1/n^2) / 2 \quad (72)$$

内周縁に於ける主応力 $\sigma_1, \sigma_2$ , 最大剪断応力 $\tau_m$ は(71), (72)を用い(32)より計算される。

## IX 破損限界曲線

理在各種の工業材料に就いて認められる材料破損に関する学説は多々あるが、最も普通通用しているものは次に述べる7箇の学説である。これ等の諸学説に従つて、円板の破損限界を表す曲線式を求めて見た。但し円板の主応力 $\sigma_1, \sigma_2$ の絶対値は内周縁で最大値をとるものであるから、内周縁に於ける応力を基にして計算した。今 $\sigma_0$ を破損限界応力とする時諸学説を式で示すと次の様になる。

(a) 最大主応力説

破損条件式は, 
$$\sigma_1 = \sigma_0 \quad (73)$$

(32)の $\sigma_1$ を用いて,

$$(\sigma_0 / \sigma_1 - K_1)^2 / K_1^2 - (\dot{\omega} / \omega^2)^2 / (K_1 / K_2)^2 = 1 \quad (74)$$

(b) 最大主歪説

内周縁で $\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 = \sigma_z = 0$ , 但し $\sigma_3 = \sigma_z$ に円板の軸方向の主応力で、今の場合

は中間応力となる。故に破損条件式は、

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma_0 \tag{75}$$

(32)の $\sigma_1, \sigma_2$ を代入して整理すると、

$$\{\sigma_0/\sigma_1 - K_1(1-\nu)\}^2 / \{K_1(1+\nu)\}^2 - (\dot{\omega}/\omega^2)^2 / (K_1/K_2)^2 = 1 \tag{76}$$

(c) 最大剪断応力説

破損条件式は、

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0 \tag{77}$$

(32)の $\sigma_1, \sigma_2$ を代入して整理すると、

$$(\sigma_0/\sigma_1)^2 / (2K_1)^2 - (\dot{\omega}/\omega^2)^2 / (K_1/K_2)^2 = 1 \tag{78}$$

(d) 内部摩擦説(滑り破損の場合)

破損条件式は、

$$\sigma_1 - k\sigma_2 = \sigma_0 \tag{79}$$

$$\text{但し } k = (1 - \sin\phi) / (1 + \sin\phi)$$

$$\mu_1 = \tan\phi = \text{内部摩擦係数}$$

} (80)

(32)の $\sigma_1, \sigma_2$ を代入して整理すると、

$$\{\sigma_0/\sigma_1 - K_1(1-k)\}^2 / \{K_1(1+k)\}^2 - (\dot{\omega}/\omega^2)^2 / (K_1/K_2)^2 = 1 \tag{81}$$

(e) 内部摩擦説(引張り破損の場合)

破損条件式は、

$$\sigma_1 - k'\sigma_2 = \sigma_0 \tag{82}$$

$$\text{但し } k' = (1 - \cos\phi) / (1 + \cos\phi) \tag{83}$$

(32)の $\sigma_1, \sigma_2$ を代入して整理すると、

$$\{\sigma_0/\sigma_1 - K_1(1-k')\}^2 / \{K_1(1+k')\}^2 - (\dot{\omega}/\omega^2)^2 / (K_1/K_2)^2 = 1 \tag{84}$$

(f) 全歪エネルギー説

破損条件式は、

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2 \tag{85}$$

(32)の $\sigma_1, \sigma_2$ を代入して整理すると、

$$(\sigma_0/\sigma_1)^2 / (2K_1)^2 - (\dot{\omega}/\omega^2)^2 / \{1/2(1+\nu)(K_1/K_2)\}^2 = 1 \tag{86}$$

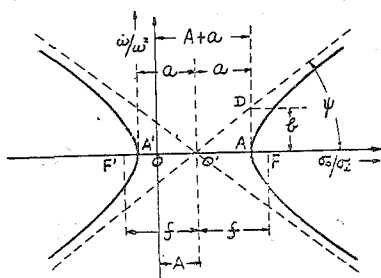
(g) 剪断歪エネルギー説

破損条件式は、

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2 \tag{87}$$

(32)の $\sigma_1, \sigma_2$ を代入して整理すると、

$$(\sigma_0/\sigma_1)^2 / (2K_1)^2 - (\dot{\omega}/\omega^2)^2 / \{2K_1/\sqrt{3}K_2\}^2 = 1 \tag{88}$$



第 5 図

(74), (76), (78), (81), (84), (86), (88)は $\sigma_0/\sigma_1$ 及 $\dot{\omega}/\omega^2$ を座標にとると、共に双曲線を表す。今第5図を参照して、双曲線の要素を表で示すと次のようになる。(表1, 表2参照)但し表中の $K_1$ 及 $K_2$ の値は共に内周縁に於けるもので、一般の場合は(30), (31)で、 $\alpha=2$ の時は(59), (60)で $\alpha=4$ の時は(71), (72)で与えられる。

表 1

学説	中心O'の座標		中心より頂点Aまでの距離 = a	A D = b	原点Oより頂点Aまでの距離 = A+a
	A	B			
(a)	$K_1$	0	$K_1$	$K_1/K_2$	$2K_1$
(b)	$K_1(1-\nu)$	0	$K_1(1+\nu)$	$K_1/K_2$	$2K_1$
(c)	0	0	$2K_1$	$K_1/K_2$	$2K_1$
(d)	$K_1(1-k)$	0	$K_1(1+k)$	$K_1/K_2$	$2K_1$
(e)	$K_1(1-k')$	0	$K_1(1+k')$	$K_1/K_2$	$2K_1$
(f)	0	0	$2K_1$	$\sqrt{2/(1+\nu)}(K_1/K_2)$	$2K_1$
(g)	0	0	$2K_1$	$2K_1/\sqrt{3} K_2$	$2K_1$

表 2

学説	中心より焦点までの距離 = $O'F = OF' = f = \sqrt{a^2+b^2}$	離心率 $e = f/a = \sqrt{1+(b/a)^2}$	漸近線の傾斜角 = $\psi = \tan^{-1}(b/a)$
(a)	$K_1\sqrt{1+1/K_2^2}$	$\sqrt{1+1/K_2^2}$	$\tan^{-1}(1/K_2)$
(b)	$K_1\sqrt{(1+\nu)^2+1/K_2^2}$	$\sqrt{1+[(1+\nu)K_2]^2}$	$\tan^{-1}(1/(1+\nu)K_2)$
(c)	$K_1\sqrt{4+1/K_2^2}$	$\sqrt{1+4/K_2^2}$	$\tan^{-1}(1/2K_2)$
(d)	$K_1\sqrt{(1+k)^2+1/K_2^2}$	$\sqrt{1+[(1+k)K_2]^2}$	$\tan^{-1}(1/(1+k)K_2)$
(e)	$K_1\sqrt{(1+k')^2+1/K_2^2}$	$\sqrt{1+[(1+k')K_2]^2}$	$\tan^{-1}(1/(1+k')K_2)$
(f)	$K_1\sqrt{4+2/(1+\nu)K_2^2}$	$\sqrt{1+1/2(1+\nu)K_2^2}$	$\tan^{-1}(\sqrt{2/(1+\nu)}(1/2K_2))$
(g)	$2K_1\sqrt{1+1/3K_2^2}$	$\sqrt{1+1/3K_2^2}$	$\tan^{-1}(1/\sqrt{3}K_2)$

表1中の  $A+a=2K_1$  で学説の如何によらず一定である事は注目に値する。この理由はA点では  $\dot{\omega}=0$  であるから、 $\sigma_1=\sigma_\theta$  ;  $\sigma_2=\sigma_r=0$  で単純引張応力（一次元応力）状態にあるに因る。回転円板の強度に関する実験的研究については、鷗戸口教授の報告<sup>(6)</sup>がある。この実験では石こう製円板を用い一定角速度で破壊試験を行つた結果として破壊の限界は中西不二夫博士の平均応力説と一致する事が論じてある。然し  $\dot{\omega}/\omega^2$  がある値をとる場合は未だ報告を見ないから将来この方面の実験的の解決が重要だと考えられる。

### X 結 言

厚さ  $h$  が双曲線的に変化する回転円板が角加速度を有してある場合の応力状態の一般論を述べたが、数値的の計算は一切省略した。数値的計算については近い将来に報告する機会があると考え。近來ガスタービンの研究に伴つてその翼車の強度が論ぜられてゐる。例えば栖原博士<sup>(7)(8)</sup>の  $h = Ar^\alpha (1-\lambda r^\beta)^k$  で厚さが表される回転円板である。この様な場合にも角加速度があれば、筆者が茲で述べた方法が適用し得ると考えられる。

## 文 献

- (1) 大賀應二：蒸気及瓦斯タービン，425頁  
A, Stodola : Dampf und Gasturbinen : S. 325 (Auf.5)
- (2)(3)(4)(5) 筆者：角加速度を有する回転円板及び円筒の応力とその破損限界(第1,2,3,4報)(昭和27年9月，日本機械学会北陸地方講演会にて発表：精機学会誌に掲載予定)
- (6) 鶴戸口英善：回転体の強さについて (日本機械学会誌第55巻第402号,474頁)
- (7) 梶原豊太郎：厚さが $Ar^\alpha (1-\lambda r^\beta)^k$ で表される回転円板の応力 (日本機械学会論文集第7巻, 第10号)
- (8) 梶原豊太郎：ガスタービン翼車の応力計算について (日本機械学会論文集 第17巻 第58号 94頁)

**THE STRESS IN A ROTATING DISC WITH  
ANGULAR ACCELERATION AND THE LIMITING  
CURVES OF ITS FAILURE (5 TH REPORT)**

By

Yū TAKEDA\*

(Institute of Mechanical Engineering, Faculty  
of Engineering)

A disc with a hyperbolic profile whose thickness varies as  $1/r^\alpha$ , is widely used in steam turbine practices. When such a disc rotates with angular acceleration, it is important to find the general expressions of the principal stresses produced in it in order to see the effects of the acceleration. According to the results of our analytical calculations, a greater increase in the principal stresses is justified than when it rotates at a constant speed and this is mainly due to the shearing stress produced by tangential inertia force exerted on a mass element of the disc. By the principle of superposition, the shearing stress and the radial and hoop normal stress components produced by centrifugal force are superposed and the principal stresses can be found. Using the various theories concerning the failure of materials, the limiting curves of failure are deduced and compared with each other. Finally it is pointed out that our method of analysis may also be applied to the case where the disc has a variable thickness expressed by the equation  $h=Ar^\alpha \cdot (1-\mu r^\beta)^k$ , which Dr. T. Suhara has already proposed. The latter case is often met with in gas turbine practices.

---

\* Professor of Shinshu University.