凸関数の理論

西　川　　　耿

§1. 高校の数学における関数の凹凸の扱い

1変数関数の凹凸については，高校の数学の「微分・積分」の中に初めて登場するが，関数のグラフの接線が引けることを前提としている。平成元年度現在，文部省検定済の高校教科書「微分・積分」は18点あるが，そのうちの11点について関数が区間Ｉで凸であることの定義を調べて見ると，いずれも関数のグラフの形状として述べられ，その内訳は次の３通りであった。

Ⅰ. 区間Ｉで接線の傾きが増加すること。

Ⅱ. グラフ上の任意の２点を結ぶ線分がグラフより上方にあること。

Ⅲ. グラフの任意の接線に対して，グラフが接線より下側にないこと。

Ⅰを採用しているのは東京図書，学研等の６点，Ⅱを採用しているのは旺文社等４点，Ⅲを採用しているのは数研出版の１点であった。Ⅱの定義を見る限りではグラフの接線が引けることを前提にしていないが，これを採用している教科書はすべて，Ⅱの定義の直後に，Ⅰの状態からⅡが結論されることを説明し，接線が引けることを既定の事実として扱っている。その説明の方法は，平均値の定理を利用して論理的に証明しているもの（旺文社，池田書店），図形的な直観に訴えているもの（帝国書院，実教出版）の２通りに分かれている。なお，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲが同値であることを述べているものは皆無であった。

関数fが与えられた区間で凹なることは，当然のことながら凸関数の定義と双対的なこと，すなわち，表現方法は種々あるものの，$f(x)=-g(x)$ なる関数gが凸関数なることと同等に定義され，さらに点$(a, f(a))$が曲線$y=f(x)$の変曲点なることは$x=a$の前後で曲線の凹凸が入れ変わることと定義されている。高校生を対象にする場合は，接線が引けることを前提としているのでこれで問題はない。

§2. 専門書における関数の凹凸の扱い

専門書として大学生用に書かれた「微分積分学」又はそれに類する題名の書籍について凸関数の定義を見ると，多くは関数の微分可能性を前提にして，§1におけるⅠ又はⅡを採用していて，Ⅱを採用しているものは極めて僅かであり，この傾向は少くともこの20年近く続いている。そしてⅡを採用する場合，導関数の存在が不要なことを明記しているものはさらに僅かである。

［1］は，微分可能，さらには連続性まで仮定しないことを明記した上で凸関数の定義をしている僅かな例であるが，凸関数の理論全般については当方の期待には至っていない。

変曲点については，高校の教科書と同様に「その点の左右で関数の凹凸が変わること」なる定義を採用しているものが極めて多い。

接線が引けることを明記しているのならば問題はないが，そうでなければ不十分なのであり，そのような不十分な専門書が多いことは私の1つの発見であった。凸関数の定義に微分可能性の仮定が不要なことを明記している［3］，凸関数について比較的詳しく扱っている［1］もそのような例である。

なお，凸関数は（凹関数も）開区間で連続であることを論述してあるものは現在のところ見当らない。

微分積分学の専門書として最高峰との評価を得ている［4］では凸関数の定義を§1に述べたIIによって与え，一方，この分野の専門書としては最も程度の高いものの1つと言われている［6］では，「区間Iの任意の2点と p，q と，任意の $\lambda(0<\lambda<1)$ に対して，$f(\lambda p+(1-\lambda)q)\leqq\lambda f(p)+(1-\lambda)f(q)$ を満たす関数 f」を凸関数の定義として与えている。これは§1で分類した定義のIIと本質的に同じであり，［2］，［5］の比較的程度の高い専門書もこの定義を採用している。

なお，§1で述べた凸関数の定義I，II，IIIが同値なることを明確に証明してあるのは多くの「微分積分学」関連の専門書の中で［1］以外には見当らない。

一方，［6］では凸関数に関する内容は，調査した専門書の中では最も詳しく，4ページほど費やされているが，これも私の期待からは十分ではない。

私が微分積分学を講義する際，教科書を使用する場合は記載内容を補って講義することはよくあるが，個々の内容について深入りする時間的余裕は極めて少なく，教科書を使用しない場合でも解析学の基本的内容の理解を与える必要から，特別の事項について詳述する時間的余裕はやはり殆んどないのが現状である。凸関数の理論についても90分の講義時間を2回分近く使って行ったことが2度あっただけであり，それでも時間不足となり，それを補うためにプリントを与えて，受講生各自の自主的勉学にまかせたが，自力で学ぶのはかなり困難であったようである。

以上のような経緯から凸関数の理論を論文としてまとめておくことに思い至った。

なお，証明は一般的なものは出来るだけ簡単に述べるにとどめた。

§3.　凸関数の定義

命題1.　関数 f が区間Iで定義されているとき，$a<b<c$ なるIの任意の3点 a，b，c に対して次の3つは同値である：

（1）　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqq\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

（2）　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqq\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\leqq\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

（3）　$f(b)\leqq\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}(b-a)+f(a)$

（証明） (1)と(3)は式の単なる同値変形によって，一方から他方が導かれ，(2) ⇨ (1)は明らかである。

(1) ⇨ (2)については，一般に

$\dfrac{x_1}{y_1} \leqq \dfrac{x_2}{y_2}$ で y_1，$y_2 > 0$ ならば，$\dfrac{x_1}{y_1} \leqq \dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2} \leqq \dfrac{y_2}{y_2}$ が成立することからただちにわかる。

定義． この命題の条件を満たす関数 f を区間 I における凸関数といい，また，このとき関数 f は区間 I で凸，又は下に凸であるという。また，この命題における不等式‘$\leqq$’をすべて‘$<$’でおきかえても(1)〜(3)は同値であり，それを満たす関数 f を区間 I における狭義の凸関数という。

上の定義は §1 における凸関数の定義のⅡと本質的に同じものである。

定義． この命題における不等式‘$\leqq$’をすべて‘$\geqq$’でおきかえても(1)〜(3)は同値であり，そのとき関数 f を区間 I における凹関数といい，また，このとき関数 f は区間 I で凹である，又は上に凸であるという。狭義の凹関数も自然に定義される。

㊟ 命題 1 の(3)より，関数 f が区間 I で凸なることは，xy 平面上の集合 $\{(x,\ y) \mid y \geqq f(x)\}$ が凸集合なることと同値である。

命題 2. 区間 I で定義された関数 f について，次は同値である：

(1) f は区間 I で凸である。

(2) I の任意の 2 点 x_1，x_2 及び $\lambda_1+\lambda_2=1$ なる任意の正の値 λ_1，λ_2 に対し，
$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \leqq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$

(3) I の任意の n 点 x_1，x_2，……，x_n 及び $\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n=1$ なる任意の正の値 λ_1，λ_2，……，λ_n に対し，

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

（証明） (1) ⇔ (2) $x_1 < x_2$ とすると $x_1 < \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 < x_2$ だから(1)は

$$\frac{f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)-f(x_1)}{(\lambda_1 x_1+\lambda_2)-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}{x_2-(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}$$

と同値であり，この式から同値変形によりただちに(2)を得る。

(3) ⇨ (2)は当然である。

(2) ⇨ (3) (2)が成り立つと仮定すると，(3)が $n=2$ のとき成り立つことを意味する。そこで $n \geqq 3$ とし，$n-1$ について(3)が成立すると仮定する。

$$\mu=1-\lambda_n,\ a=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\mu}x_i \text{ とおくと}$$

$$\mu+\lambda_n=1,\ \mu>0,\ \lambda_n>0 \text{ だから}$$

(2)の仮定より，

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=f\left(\mu\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\mu}x_i+\lambda_n x_n\right)$$
$$=f(\mu a+\lambda_n x_n)$$
$$\leqq \mu f(a)+\lambda_n f(x_n)$$

ここで，$\dfrac{\lambda_i}{\mu}=\mu_i\ (i=1,\cdots\cdots,\ n-1)$ とおくと

$$a=\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i a_i,\ \sum_{i=1}^{n-1}\mu_i=1,\ \mu_i>0 \text{ だから}$$

帰納法の仮定より

$$f(a)=f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i x_i\right)\leqq\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i f(x_i)=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i f(x_i)$$

従って

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqq\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i f(x_i)+\lambda_n f(x_n)$$

となり，n のときも成立することがわかった。これによって，任意の自然数 n について(3)が成立することが証明された。

定理 3. 関数 f が区間Ⅰで凸ならば，Ⅰの内点の集合 Int(I) で右微分可能，かつ左微分可能であり，Ⅰの任意の内点 a に対して

$$f'_-(a)\leqq f'_+(a).$$

特に f は Int(I) で連続である。

従って開区間における凸関数は（もちろん凹関数も）連続関数である。

（証明） Ⅰの任意の内点 a に対して，$x<a<y$ なるⅠの点 x，y を任意にとると，条件より，

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x}\leqq\frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

ここで y を固定して $x\rightarrow a-0$ とすると，命題1の(2)より，左辺は増加してしかもこの不等式より，上に有界である。

従って $f'_-(a)$ が存在して，

$$f'_-(a)\leqq\frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

この式の右辺で $y \to a+0$ とすると，再び命題 1 の(2)より，右辺は減少して，しかも下に有界である。

従って，$f'_+(a)$ が存在して

$$f'_-(a) \leqq f'_+(a)$$

特に点 a において右連続かつ左連続，すなわち連続である。

命題 4. 関数 f が区間 I で凸ならば，I の任意の 2 つの内点 a, b $(a<b)$ に対して

$$f'_+(a) \leqq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqq f'_-(b)$$

（証明） $a<x<b$ なる x をとれば，命題 1 の(2)より

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

この不等式において，最左辺で $x \to a+0$ として題意の左側の不等式を，最右辺で $x \to b-0$ として題意の右側の不等式を得る。

定理 5. 関数 f が区間 I で微分可能なとき，次の 2 つは同値である：

(1) f は区門 I で凸である。

(2) f の導関数 f' は I で増加である。

（証明） (1) ⇒ (2)は 命題 4 からただちにわかる。(2) ⇒ (1) I の任意の 3 点 x_1, x_2, x_3 $(x_1<x_2<x_3)$ に対して，平均値の定理より

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(c_2)$$

なる c_1, c_2 $(x_1<c_1<x_2<c_2<x_3)$ が存在し，(2)の条件より，f は I で凸である。

系. 関数 f が区間 I で 2 回微分可能なとき次の 2 つは同値である：

(1) f は I で凸あでる。

(2) I のすべての x に対して $f'(x) \geqq 0$.

（証明） 関数 f が 2 回微分可能なとき，定理 5 の(2)とこの系の(2)が同値だからである。

（応用） n 個の正の値に対して，その相加平均と相乗平均の大小関係を証明するのに種々の方法があるが，$f(x)=-\log x$ なる関数 f に定理 5 と命題 2 の(3)を応用して行う鮮やかな方法もその 1 つである。

§ 4. 1 点における関数の凹凸

関数の 1 点における凹凸について記述してある微分積分学の専門書は殆ど存在しない。わ

ずかに［2］にはそれが定義されているが区間における関数の凹凸の定義がない。

［2］における定義は「曲線上の点Aにおける接線が曲線より下側にあるとき，その曲線は点Aで凸，又は下に凸であるという。」であり，接線が引けることを前提にしている。これは§1で論じた高校教科書のⅢの方法による関数の区間における凸の定義を1点に限ったものであり，従って接線が存在する場合には，区間における凹凸と点における凹凸の関係が論じられるのが自然の成り行きと思われるが，［2］ではその記述は全くないのである。

さて，私は関数の1点における凹凸についての定義を次のように与えることを提案する。そこには関数の微分可能性はもとより，連続性も仮定しない：

定義． 点aおよびその近傍で定義された関数fにおいて，aを含む適当な区間において

$$f(x) \geqq f(a)+A(x-a)$$

を満たす定数Aが存在するとき，関数fは点aにおいて凸であるという。さらに，$x \neq a$ ならば，

$$f(x) > f(a)+\mathrm{A}(x-a)$$

と出来るとき，fはaにおいて狭義の凸であるという。

関数が1点において凹，狭義の凹なる定義も不等式の向きを逆にして同様に定義される。

命題 6. 関数fが区間Ⅰで定義されているとき，Ⅰの任意の内点aに対して次が成立する：

(1) fがaで右微分可能なるとき，fがaで凸ならば，「aで凸」の定義におけるAについて，　$\mathrm{A} \leqq f'_{+}(a)$

(2) fがaで左微分可能なるとき，fがaで凸ならば，「aで凸」の定義におけるAについて，　$\mathrm{A} \geqq f'_{-}(a)$

(3) fがaで微分可能なるとき，fがaで凸ならば，「aで凸」の定義におけるAはただ1つ存在して，$\mathrm{A} = f'(a)$

（証明）　容易であるので省略する。

系． (1) 関数fが点aで右微分可能かつ左微分可能なるとき，fがaで凸なるための必要十分条件は，$f'_{-}(a) \leqq f'_{+}(a)$ なることである。

(2) 関数fが点aで微分可能なるとき，fがaで凸なるための必要十分条件は，曲線 $y=f(x)$ の，点aにおける接線がaの近傍で曲線より上側にないことである。

（証明）　(1)は命題6の(1)，(2)より，(2)は命題6の(3)よりただちにわかる。

命題 7. 点aを内点として持つ区間で定義された関数fについて，fがaを含む適当な区間で凸ならば，fは点aで凸である。

（証明）　fがaを含む区間で凸のとき，定理3より，$f'_{-}(a) \leqq f'_{+}(a)$

従って命題6の系の(1)より，fは点aで凸である。

㊟　命題7の逆は成立しない，その例を以下に示そう：

(i) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

(ii) $g(x)=-x^2+|x|$

(iii) $h(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

以上の3つの関数 f, g, h はすべて，点0で凸であるが，0を含む任意の区間で凸ではない。f は点0において不連続な関数の例であり，g は点0において連続であるが微分不能な関数の例であり，h は点0において微分可能な関数の例である。

系. 関数 f が開区間Iで凸ならば，f はIのすべての点で凸である。

㊟ この系の逆の成立しないことは，上の㊟の (i) の例からもわかるが，f が連続関数のときは逆も成立する。それは後で示される。

なお，開区間とは，(a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$ 及び $(-\infty, \infty)$ なる形で表される区間のことである。

§ 5. 区間における凹凸と点における凹凸との関連

定義. 関数 f が区間Iで定義されているとする。Iの内点 a に対して，

$$\varphi_a(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (x\in \mathrm{I},\ x\neq a)$$

なる関数 φ_a を，点 a に対する関数 f の平均変動という。([6])

補題 8. 開区間Iで定義された関数 f について，次は同値である：

(1) f はIで凸である。

(2) Iの任意の点に対する f の平均変動は増加関数である。

(証明) (1) ⇒ (2) [6] の定理3，5 (P. 50) 参照

(2) ⇒ (1) 命題1の(2)からただちにわかる。

㊟ 命題7の系は，この補題からも容易に結論されることを注意しておく。

定理 9. 開区間Iで定義された関数 f について次の(1), (2)は同値であり，f がIで連続ならば(3)を含めて，f がIで微分可能ならば(4)も含めて同値である：

(1) f はIで凸である。

(2) Iのすべての点 a に対して，適当な定数 A_a があって，

$$f(x)\geqq f(a)+A_a(x-a) \quad (x\in \mathrm{I})$$

(3)　f はⅠのすべての点で凸である。

(4)　f の導関数 f' はⅠで増加である。

（証明）　(1)と(2)の同値性は容易であるので省略する。また(1) ⇒ (3)は命題７の系で済んでいる。

(3) ⇒ (1)　f がⅠの各点で凸でありながらⅠで凸でないと仮定する。このとき，Ⅰの適当な３点 a, b, c ($a<b<c$) があって，$\varphi_b(a)>\varphi_b(c)$,

ここで，点 $(a,\ f(a))$, 点 $(b,\ f(b))$ をそれぞれ A, B とかく。

このとき命題１の(2)より，

$$\varphi_a(b)>\varphi_a(c).$$

そこで，$M=\{\varphi_a(x)\mid a<x<c,\ \varphi_a(x)>\varphi_a(c)\}$ とおくと，$\varphi_a(b)\in M$ より，$M\neq\phi$.

f はⅠで連続だから φ_a は区間 $(a,\ c]$ で連続であり，従ってもし M が上に有界でなければ

$$\lim_{x\to a+0}\varphi_a(x)=\infty$$

従って点 A におけるグラフの右側接線が存在し，それは x 軸に垂直である。このことから，f は a の右近傍の各点で狭義の凹であることが結論され，(3)に矛盾する。

故に M は上に有界である。そこで，M の上限を α とおく。

$\alpha\notin M$ と仮定すると，φ_a は区間 $(a,\ c]$ で連続だから，

$$\lim_{x\to a+0}\varphi_a(x)=\alpha$$

従って点 A におけるグラフの右側接線の傾きは α であり，A の右近傍でグラフは接線の下側にある。このことから，f は点 a の右近傍の各点で狭義の凹であることが結論され，(3)に矛盾する。

故に $\alpha\in M$, すなわち α は M の最大値であり，$\varphi_a(b')=\alpha$ をみたす b' は容易にわかるように区間 $(a,\ c)$ で最大値をもつ。その値を b_0 とすると，f は点 b_0 で明らかに狭義の凹となり(3)に矛盾する。従って f はⅠで凸である。

(1) $\Longleftrightarrow$ (4)は既に定理５で示されていた。

命題 10.　関数 f が点 a 及びその近傍で微分可能であるとき，導関数 f' が a で増加ならば，f は a で凸である。

（証明）　a の十分近くの x_1, x_2 ($x_1<a<x_2$) に対して，平均値の定理より，

$$\frac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1}=f'(c_1),\quad \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}=f'(c_2)$$

なる c_1, c_2 ($x_1<c_1<a<c_2<x_2$) が存在する。

c_1, c_2 は a にさらに十分近いから，条件より，

$$f'(c_1)\leqq f'(a)\leqq f'(c_2)$$

従って a の十分近くで

$$f(x) \geqq f(a)+f'(a)\ (x-a)$$

が成立，すなわち関数fは点aで凸である。

㊟　この命題の逆は成立しない。例えば，命題７の下の㊟の(iii)の例における

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

なる関数fは点０で狭義の凸であるが，導関数 f' は点０で増加でも減少でもない。

命題10の証明から，次の系が容易に導かれる：

系.　関数fが点aで２度微分可能なとき，

(1)　$f''(a)>0$ ならば，fはaで狭義の凸である。

(2)　$f''(a)<0$ ならば，fはaで狭義の凹である。

この節で論じて来たことを，次の定理でまとめる：

定理 11.　関数fが区間Ｉで２度微分可能なとき，次が成立する。

(1)　Ｉのすべてのxに対して $f''(x) \geqq 0$ ならば，fはＩで凸である。

(2)　Ｉのすべてのxに対して $f''(x)>0$ ならば，fはＩで狭義の凸である。

(3)　Ｉのすべてのxに対して $f''(x) \leqq 0$ ならば，fはＩで凹である。

(4)　Ｉのすべてのxに対して $f''(x)<0$ ならば，fはＩで狭義の凹である。

(5)　Ｉのすべてのxに対して $f''(x)=0$ ならば，fはＩで１次関数又は定数値関数である。

（証明）　(1)における条件と f' が増加であることが同値なことを利用して定理９に帰着させる方法もあり，直接 Taylor の定理を使用する方法もあるが，いずれも容易につき省略する。

なお，(1)，(3)，(5) の逆は成立するが，(2)，(4) の逆は成立しない。例えば，$f(x)=x^4$ なる関数fが(2)の逆が成立しない例である。

§6.　変 曲 点

凹凸については，関数のグラフの性質にとどまらず関数自身の性質としても定義されたが，変曲点については関数のグラフ，すなわち平面曲線の性質として定義される。我々は１価関数の表す曲線に限定した議論を継続する。

定義.　曲線 $y=f(x)$ の上の点 $C(a,\ f(a))$ において接線が存在し，さらに適当な正の値 δ が存在して，関数fが区間 $(a-\delta,\ a]$，$[a, a+\delta)$ の一方で狭義の，凸他方で狭義の凹となるとき，点Cをこの曲線の変曲点という。

この定義を単刀直入に言えば，曲線の狭義の凹凸が入れ換る点で，しかも接線が引けることであり，単に「曲線の凹凸の変換点」だけでは不十分なことは §2 でも述べた通りである。

また， 曲線 $y=\sqrt[3]{x^2}$ における原点のような場合は除かれることは当然である。

既に絶版となっているが，かなり権威のある専門書として知られていた［7］は変曲点を次のように定義している：「曲線上の点Pにおける接線がPにおいて曲線と互いに切り合うとき，点Pをこの曲線の彎曲点（歪曲点）という。」 この定義は一見して上の変曲点の定義と同値のように見え，これは［2］における変曲点の定義と同等であるが，私は最近になって次のような例を発見した：

$$f(x)=\begin{cases}2x^3+|x^3|\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

とするとき，曲線 $y=f(x)$ 上の原点 $(0,\ 0)$ における接線は x 軸に一致し，その接線と曲線は明らかに接点（0，0）において互いに切り合っている。ところがこの関数 f は，任意の正の値 δ に対して区間 $(-\delta,\ 0]$ においても，区間 $[0,\ \delta)$ においても凸でもなく，凹でもない。換言すれば原点はこの曲線の凹凸の変換点ではない。このような点も変曲点の定義に加えるべきであるとの主張も十分予想されるが，私はこの節の冒頭に行った定義に限るべきであると考えている。諸兄の判断を仰げれば幸いである。

なお，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ において接線が引けることは，関数 f の点 a における微分可能性を必ずしも要しない。例えば， $f(x)=\sqrt[3]{x}$ なる関数 f は点0で微分不能であるが，f の表す曲線上の点（0，0）における接線は y 軸に一致し，点（0，0）はこの曲線の変曲点である。

曲線の変曲点の定義の中で「狭義の」なる用語を除くことは出来ない。その例は，

$$f(x(=\begin{cases}-(x+1)^2 & (x<-1)\\ 0 & (1\leqq x<1)\\ (x-1)^2 & (1\leqq x)\end{cases}$$

なる関数 f は区間 $(-\infty,\ 1]$ で，凹，区間 $[-1,\ \infty)$ で凸であり，特に，区間 $[-1,\ 1]$ で凸かつ凹，すなわちグラフが直線状態にある。従って，f は区間 $(-\infty,\ -1]$ で凹， $[-1,\ \infty)$ で凸であり，また区間 $(-\infty,\ 1]$で，凹，$[1,\ \infty)$ で凸である。しかるに点 $(-1,\ 0)$ も点（1，0）も変曲点ではなく，f は点－1で凹，点1で凸である。但し，f は点－1で狭義の凹ではなく，点1で狭義の凸でもない。そこで：

［提案］ 上記のような場合，f は点－1で狭義の半凹，点1で狭義の半凸であると定義したらいかがであろうか。諸兄の御意見を伺いたいところである。

命題 12. 関数 f が点 a で2度微分可能なとき，点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点ならば，

$$f''(a)=0.$$

（証明） 命題10の系より，$f'(a)>0$ ならば，f は a で狭義の凸であり，$f'(a)<0$ ならば，f は a で狭義の凹であり，よって，$f''(a)\neq 0$ とすれば，点 $(a,\ f(a)$ は曲線の変曲点ではない。

この命題の逆，すなわち $f''(a)=0$ ならば点 $(a, f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点であるかどうかを判定するには，$x=a$ の前後における $f''(x)$ の符号の変化を調べる方法もあるが，点 a における f の更に高次の微分係数の符号により判定する次の方法がある：

定理 13. 関数 f が点 a で n 回微分可能で $f''(a)=f^{(3)}(a)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$ とする。

(1) n が偶数のとき，

(i) $f^{(n)}(a)>0$ ならば，f は a で狭義の凸である。

(ii) $f^{(n)}(a)<0$ ならば，f は a で狭義の凹である。

(2) n が奇数のとき，

点 $(a, f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。

（証明） f が C^n 級のときは証明は簡単で，Taylor の定理より

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

なる c が a と x の間に存在する。

条件より，

$$f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$f^{(n)}$ は連続だから，x が a に十分近いとき $f^{(n)}(c)$ は $f^{(n)}(a)$ と同符号となり，従ってこの式からすべての場合の結論が出される。

関数 f に「c^n級」の仮定がないときは少し工夫を要する。

このときは

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=f^{(n)}(a),\quad f^{(n-1)}(a)=0.$$

従って，$f^{(n-1)}(x)$ は a の十分近くで $(x-a)f^{(n)}(a)$ と同符号である。

一方， Taylor の定理と，$f''(a)=\cdots\cdots=f^{(n-2)}(a)=0$ より，

$$f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))=\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

なる c が a と x の間に存在する。

ここで x が a に十分近ければ，$f^{(n)}(c)(x-a)^{n-1}$ は，n が偶数のとき $f^{(n)}(a)$ と同符号であり，n が奇数のとき $x=a$ の前後で $f^{(n)}(a)$ と異符号から同符号に変化する。

これにより，やはりすべての場合の結論が出される。

㉗ 命題12，定理13における「変曲点」は，当節冒頭に定義したものに限っても，［2］，［7］による定義に拡張しても成立している。それは証明を見れば明らかであり，定理13における「変曲点」が現れる場合は実際には前者に限られた場合である。

参 考 文 献

［1］ 岸　正論：「微分積分学」学術図書出版

［2］ 桑垣　煥，河合良一郎：「微分学と積分学」学術図書出版

［3］ 佐藤祐吉，横手一郎：「基礎課程微分積分学」森北出版

［4］ 高木貞治：「解析概論」岩波書店

［5］ 戸田暢茂：「微分積分学要論」学術図書出版

［6］ 一松　信：「解析学序説（新版）上」裳華房

［7］ 末綱恕一，荒又秀夫：「微分積分学」冨山房