数学教育の一視点

味木　博

§1　序論　大学の教養課程における数学の理念とは何であるか．われわれはこの小論においてこのような大問題に論及しようとは思わない．率直にいって，極めて至難なわざともいえるからである．もし，かりにこのような理念にもとずいて講ぜられる数学があれば恐らく数学の発展に底流する思想性とそれによって構成されるカリキュラム及び講義内容が則応しなければならない．しかもそのような教養の数学は自然科学やその他の学問に従事する者に大きな裨益をもたらすのみならず，数学それ自体の研究にたずさわる学徒にも大きな影響を与えるものでなければならない．しかしながら，現今「教養の数学」，「教養としての数学」等数多くの書物が刊行されているが，この理念にこたえる定評ある書物の出現をみないのはその困難さを示す証左ともいえるであろう．こゝでいう教養の数学とはあくまで大学における教養課程としての数学を指している．さて Euclid 以来の古典的数学からいくたの発展段階をへて今日のいわゆる現代数学が形成されたが，現代数学の根底に流れる基本的概念を“数学的構造”（mathematical structure）としてとらえる立場〔1〕があり，この考えにそって高校数学の改編をはかる一つの試み〔2〕がなされ，われわれもこの考えにそうて教養の数学をある程度再編成することができると思われるけれど矢張前述の論文〔1〕において指摘されるとおり，今日の数学教育が永く「物理数学教育」の伝統の下に培かわれているところからみて仲々容易ならないものであろうと思考する．しかしはじめにのべたとおりこの小論においてわれわれの意図するところは教養課程の数学の理念とか，そのカリキュラムの構成等ではなく，むしろもっとそれ以前の段階，つまり数学の基礎段階においていかにより明確に数学を理解するかの一つの方法として数学と論理との関係，およびしばしば数学で用いられる種々の言葉についての私見をのべてみたいと考える．なおいうまでもないことであるが，数学的概念や言葉，記号は定義される限り唯一つの意味，内容が対応されるものであることを強調しておこう．

§2　数学と論理　数学と論理との関係をのべるためには，われわれは記号論理学の方法に依存することが最も得策であろう．そのために，はじめに命題（Proposition）を定義しよう．**命題**とは**真偽**の**確定**した文章である．たとえば，“2は3より小さい”（簡単に $2<3$ とかく），“ベートーヴェンはドイツ人である”，“雪は黒い”，“5わる2は3である”（簡単に $5\div2=3$ とかく）等数限りなくある．一般に命題を表わすのに A, B, C, … 等の文字を用いる．また上の最初の2例は真命題で，後の2例は偽命題である．真命題に対しては1または $\mathbb{T}$（True の略）の値を，偽命題には0または $\mathbb{F}$（false の略）の値を対応させる．これらの値を総称して**真理値**（Truth value）という．さて命題を結合する（つまり新しい命題をつくる）基礎になる規則を説明しよう〔3〕．

（i）否定（not），$\neg$（negation）．命題Aを否定した命題を $\neg A$（$\sim A$ とかいてもよい）で表わす．これは“**Aでない**”とよむ．命題 $\neg A$ はAが真のとき偽，偽のとき真である（定義!!）．

このことを表に示せば

A	$\neg$A
1	0
0	1

このような表を **真理表**（Truth table）という．一例をあげれば，命題Aを“$2<3$”とすれば $\neg$A は“$2<3$ でない”，すなわち，“$2\geqq 3$”となり偽命題である．

（ii）**論理和**（or），$\vee$（disjunction）． 2つの命題 A，B に対し，命題 A$\vee$B を“A または B”とよむ．A$\vee$B は A，B ともに偽のとき偽であり，A か B か少なくとも一方が真のとき真である（定義!!）．

これを真理表として示せば，

A	B	A$\vee$B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

たとえば，命題Aを“$2<3$”，命題Bを“雪は黒い”とすれば，命題 A$\vee$B は“$2<3$ かまたは雪は黒い”で真命題である．もう少し例をあげよう．

例 1．6は合成数かまたは完全数である．この命題は命題 Aとして“6は合成数である”（真命題），B として“6は完全数である”（真命題）とすれば，A$\vee$B で表わされ真命題となる．

例 2．私のつぎの授業は英語かまたは数学である．

命題Aとして“私のつぎの授業は英語である”，Bとして“私のつぎの授業は数学である”とするとき，A$\vee$Bと表わすことはできない．例1，例2 も同じ“または”がつかわれているが“または”のつかい方としては厳に区別しなければならない．いいかえれば例2においては A が成立すれば（真であれば），B は成立しない（偽となる）か，A が成立しなければ（偽であれば），B が成立する（真である）ときのみ真となる命題である．例1の $\vee$ と区別してこれを A$\circledvee$B（または A$\underline{\vee}$B，A$\oplus$B 等）で表わされる〔4〕．真理表で示せば明快である．

A	B	A$\circledvee$B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

表中第2行に注意されたい．なお数学で用いられる“または”は $\vee$（inclusive or）であって，$\underline{\vee}$（exclusive or）は日常的会話や文章の中にしばしばみられる．また，$\vee$ の記号はラテン語の vel（または）の頭文字 v から由来する〔5〕．

(iii)　**論理積** (and), ∧ (conjunction).　2つの命題 A, Bに対し命題 A∧B を "**Aかつ**B" とよむ. A, B ともに真のとき真であり, AかBか少なくとも一方が偽ならば偽である (定義!!). 真理表で示せば,

A	B	A∧B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

たとえば, 命題 A を "2＜3", Bを "雪は黒い" とすれば命題 A∧B は "2＜3かつ雪は黒い" となり偽命題となる. この ∧ は数学で用いられる場合も日常的会話や文章の中で用いられる場合も同じで区別する必要がない.

(iv)　**含意** (if …, then), → (implication). 2つの命題 A, B に対し, 命題 A→B を "**もしAならば,** Bである" とよむ. A→B は A が真で, B が偽のときにのみ偽で, それ以外の場合は真である (定義!!). 真理表で示せば,

A	B	A→B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

たとえば, 命題Aを "2＜3", Bを "雪は黒い" とすれば命題 A→B は "もし2＜3ならば, 雪は黒い" となり偽命題となる. また命題 A を "5÷2＝3", Bを "2＜3" とすれば命題 A→B は "もし5÷2＝3ならば, 2＜3" となり真命題である. こゝで注意したいことは上の真理表の下段の2つの行で, 命題 A→B は A が偽のとき, B の真, 偽にかゝわらず真命題となるということで, これは古典的な論理学にはない記号論理学の大きな特長である. 数学の論理はつねにこの記号論理学に依存し大いに役立っている. 後でその例をあげよう. さらにもう一つ注意する. 上の真理表の第三行目に命題 A→B は A が真で, B が偽の場合に限って偽となっている. この場合 A→B を否定すれば真命題となる筈である. すなわち, A が真で, B が偽でないならば A→B は真となる. いいかえれば
ㄱ(A∧(ㄱB)) と表わすことができる.

(v)　**等値関係** (if and only if), ↔ (equivalent).　2つの命題 A, B に対し, 命題 A↔B は "AとBは**等値関係をもつ**" とよむ. A, B がともに真か, ともに偽のときに限って A↔B は真である (定義!!). たとえば命題 A を "2＜3", Bを "5÷2＝3" とすれば A↔B は偽命題である. 真理表で示せば,

A	B	A↔B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

以上われわれは5つの規則，否定，論理和，論理積，含意，等値関係を定義した．そしてそれぞれに用いられた演算 $\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ を総称して**論理記号**（logical symbol，または logical connective）とよぶ．このうち否定 $\neg$ は1項演算で，その他は2項演算であることをつけ加えておこう．われわれはこれらの演算を用い，命題を結合して新しい命題，すなわち，**結合命題**がつくられる．結合命題はそれを構成する各命題の真偽によって真または偽が確定することはいうまでもない．これは真理表によって確かめればよい．たとえば，結合命題 $A \vee [(\neg A) \wedge B]$ は，

A	B	$A \vee [(\neg A) \wedge B]$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

こゝで一つの注意を与える．いままで，われわれは命題 A，B，C，… を任意の命題として考えてきたが，このことより文字 A，B，C，… を変数 X，Y，Z，… とみなし，X，Y，Z，… に命題，もしくは結合命題を代入することができると約束する．いわば"実数 a" という場合，a は任意の実数を表わし，a の中にどんな実数でも代入できるという考え方と同じである．このように結合命題として表わされる式を**論理式**（well formed formula）とよぶ．さて2つの結合命題 X，Y に対し，それぞれの真理表が全く一致する場合に X と Y は**等値**であるとよび，$X \equiv Y$ とかく．この式を**等値式**という．

例 4

A	B	$\neg(A \vee B)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

A	B	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

よって，$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$.

例4にならって以下の等値式がえられる．

（1）　$X \equiv X$　（同一律）

（2）　$(\neg\neg X) \equiv X$　（二重否定）

（3）　$(X \vee Y) \equiv (Y \vee X)$，$(X \wedge Y) \equiv (Y \wedge X)$，$(X \leftrightarrow Y) \equiv (Y \leftrightarrow X)$　（交換律）

（4）　$(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \equiv (X \leftrightarrow Z)$　（移動律）

（5）　$(X \rightarrow Y) \equiv [(\neg Y) \rightarrow (\neg X)]$，$X \leftrightarrow Y \equiv [(\neg X) \leftrightarrow (\neg Y)]$　（対偶律）

（6）　$(X \vee X) \equiv X$，$(X \wedge X) \equiv X$　（ベキ等律）

（7）　$(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$，$(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$　（結合律）

（8）　$X \wedge (Y \vee Z) \equiv [(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)]$，$X \vee (Y \wedge Z) \equiv [(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)]$
（分配律）

とくに，

（9）　$X \wedge (X \vee Y) \equiv X$，$X \vee (X \wedge Y) \equiv X$　（吸収律）

(10) $[(X \wedge Y) \to Z] \equiv [X \to (Y \to Z)]$ (移出律)

(11) $\neg(X \vee Y) \equiv [(\neg X) \wedge (\neg Y)]$, $\neg(X \wedge Y) \equiv [(\neg X) \vee (\neg Y)]$
(de Morgan の公式)

(12) $(X \leftrightarrow Y) \equiv [(\neg X) \vee Y] \wedge [(\neg Y) \vee X]$, $(X \leftrightarrow Y) \equiv (X \wedge Y) \vee [(\neg X) \wedge (\neg Y)]$

(13) $(X \leftrightarrow Y) \equiv [(X \to Y) \wedge (Y \to X)]$

§2の最後で注意したことから

(14) $(X \to Y) \equiv \neg[X \wedge (\neg Y)]$

こゝで (14) に de Morgan の公式 (11) を適用すれば

(15) $(X \to Y) \equiv [(\neg X) \vee Y]$

これより (2) を適用すれば

(16) $(X \vee Y) \equiv [\neg X) \to Y]$

すなわち，XまたはY ($X \vee Y$) は“もしXでなければY”とよむことができる．

(3) より

(17) $[(\neg X) \to Y] \equiv [(\neg Y) \to X] \equiv X \vee Y$

また (17) のXに$\neg X$を代入すれば (2) より

(18) $(X \to Y) \equiv [(\neg Y) \to (\neg X)]$ (対偶律)

がえられる．

(19) $X \vee Y \equiv [(X \to Y) \to Y]$

さて，命題とは真偽の確定した文章であるが，たとえば“ニュートンは自然科学者である”という命題に対し，“ニュートン”を a, “自然科学者である”をPとすれば $P(a)$ とかくことができる．いま a にアインシュタインを代入すれば命題 P(アインシュタイン) は真命題となるが a に“シェークスピア”を代入すれば命題 P(シェークスピア) は偽命題となる．a は**個体** (individual constant), P は個体 a についてのべられる**性質** (または条件) (述語) を表わす．個体はいろいろかわりうるので一般に $P(x)$ とかきこれを“**x は性質Pをもつ**”とよぶ．このような x を**変数** (variable), $P(x)$ を**一変数の命題関数** (propositional function of one variable) という．こゝで x のとりうる範囲を必らず明示しなければならない．この範囲を**個体領域** (individual domain) とよび Ω で表わす．たとえば Ω を実数全体の集合とすれば“$x \geqq 1$” (xは1より小ではない) は一変数の命題関数である．全く同様にして2変数以上の命題関数を考えることができる．たとえば“$x < y$” (x は y より小さい) は Ω を実数全体の集合とするとき直積 $\Omega \times \Omega$ を個体領域とする2変数の命題関数である．さて，これらの命題関数に対しても 演算 $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ を用いることができる．たとえば2つの命題関数 $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ をそれぞれ“$x^2 + y^2 \geqq 1$”, “$x^2 + y^2 \leqq 1$”とすれば命題関数 $P_1(x, y) \wedge P_2(x, y)$ は“$x^2 + y^2 \geqq 1 \wedge x^2 + y^2 \leqq 1$”すなわち，“$x^2 + y^2 = 1$”を表わし，$P_1(x, y) \vee P_2(x, y)$ は“$x^2 + y^2 \geqq 1 \vee x^2 + y^2 \leqq 1$”，すなわち，平面全体を表わし，$\neg P_1(x, y)$ は“$x^2 + y^2 \geqq 1$ でない”，すなわち“$x^2 + y^2 < 1$”となる．また，x, y を実数，命題関数 $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ をそれぞれ“$x = y$”, “$x^2 = y^2$”とすれば $P_1(x, y) \to P_2(x, y)$ は“$x = y \to x^2 = y^2$”で表わされる．さらに x, y を実数，$P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ を“$x > y$”, “$x^3 > y^3$”とすれば命題関数 $P_1(x, y) \leftrightarrow P_2(x, y)$ は“$x > y \leftrightarrow x^3 > y^3$”となる．さてわれわれはこゝで新しい2つの論理記号 $\forall$, $\exists$ を導入しよう．これは上述の5つの論理記号に匹適する重要な演算で，数

学を学ぶ上に大きな役割を演ずるものである．まづ論理記号 $\forall$ から説明する．個体領域を Ω，命題関数を $\mathrm{P}(x)$ とするとき，$(\forall x)\mathrm{P}(x)$ とかいて，"**すべての** x **に対し** $\mathrm{P}(x)$ **は真である**（あるいは**成立する**）" とよむ．たとえば Ω を実数全体の集合，$\mathrm{P}(x)$ を "$x^2 \geqq 0$" とすれば $(\forall x)(x^2 \geqq 0)$ は "すべての実数 x に対し $x^2 \geqq 0$ は真である" ということになる．また Ω をすべての整数の集合とするとき，命題関数 "すべての整数 x は有理数である" を $(\forall x)$(x は有理数である）とかくことができる．論理記号 $\forall$ は**全称記号**（universal quantifier）とよばれ，any（任意の）の頭文字 A を倒立させたもので，これは数学では文字 A が集合や命題，その他多くの場合に用いられるのでこれと区別する必要があるからである．つぎに論理記号 $\exists$ についてのべる．いま，個体領域を Ω，命題関数を $\mathrm{P}(x)$ とするとき，$(\exists x)\mathrm{P}(x)$ とかいて "$\mathrm{P}(x)$ が真となるような**ある** x **が存在する**" とよむ．たとえば，個体領域 Ω をすべての自然数の集合，命題関数 $\mathrm{P}(x)$ を "$x > 1$" とすれば $(\exists x)\mathrm{P}(x)$ は $(\exists x)(x > 1)$ とかかれ，たとえば $x = 2, 3, 4, \cdots$ 等に対しては真となる．もし，Ω を負の整数の集合とすれば $(\exists x)(x > 1)$ は偽となる．また，2変数の命題関数 $\mathrm{P}(x, y)$ を "$x^2 + y^2 \geqq 1$" とすれば $(\exists x)(\exists y)\mathrm{P}(x, y)$ は $(\exists x)(\exists y)(x^2 + y^2 \geqq 1)$ とかかれ，たとえば平面上の点 (0, 1), (2, 3), $\cdots$ 等に対して真となる．論理記号 $\exists$ は**存在記号**（existential quantifier）とよばれ，"some, there exist"（**ある，存在する**）を意味し，exist の頭文字 E を裏返してかかれたもので，$\forall$ の場合と同様に数学では文字 E がいろいろ他の意味で用いられるのでそれと区別する必要があるからである．こゝで特筆しておきたいことは $\forall$ と $\exists$ との間に論理的に密接な関係があることで，以下にそれをのべよう．命題関数を $\mathrm{P}(x)$ とするとき

(20)　$\neg[(\forall x)\mathrm{P}(x)] \equiv (\exists x)[\neg \mathrm{P}(x)]$, $\neg[(\exists x)\mathrm{P}(x)] \equiv (\forall x)[\neg \mathrm{P}(x)]$

たとえば Ω をすべての自然数の集合とし，命題関数 $\mathrm{P}(x)$ を "x は素数である" とするとき，(20) の第一式左辺 $(\forall x)\mathrm{P}(x)$ は "すべての自然数 x は素数である" を表わし，$\neg[(\forall x)\mathrm{P}(x)]$ は "すべての自然数 x は素数ではない" ということになる．このとき，これは右辺 $(\exists x)[\neg \mathrm{P}(x)]$，すなわち "**ある** 自然数 x に対してその x は素数ではない" ということと等値になる．第2式左辺 $\neg[(\exists x)\mathrm{P}(x)]$ についてのべれば，"素数であるような自然数 x は存在しない" を表わし，これは右辺 $(\forall x)[\neg \mathrm{P}(x)]$ の "すべて自然数 x に対しその x は素数ではない" ということと等値になる。上の2つの等値式を de Morgan の公式とよび，もし Ω が空でない有限集合ならば de Morgan の公式 (11) となることを注意しておく．等値式 (21) はもっと厳密に証明することができる〔6〕．また，(20) の第一式で $\forall$ と $\exists$ をおきかえれば第2式がえられる．すなわち，**双対**(そうつい)**の原理**（principle of duality）が成り立っている．

さて，これらの全称記号 $\forall$，存在記号 $\exists$ を2変数の命題関数 $\mathrm{P}(x, y)$ に用いる場合はどうなるだろうか．つぎの4つの場合が考えられる．

$$(\forall x)(\forall y)\mathrm{P}(x, y),\ (\exists x)(\exists y)\mathrm{P}(x, y),\ (\forall x)(\exists y)\mathrm{P}(x, y),\ (\exists x)(\forall y)\mathrm{P}(x, y)$$

それぞれ，"すべての x，すべての y に対し $\mathrm{P}(x, y)$ は真である"，"ある x，ある y に対し $\mathrm{P}(x, y)$ は真である"，"すべての x に対し $\mathrm{P}(x, y)$ が真となるようなある y が存在する"，"すべての y に対し，$\mathrm{P}(x, y)$ が真となるようなある x が存在する" とよむ．これらの式に対して誤解を生ずることがないよう

$$(\forall x)[(\forall y)\mathrm{P}(x, y)],\ (\exists x)[(\exists y)\mathrm{P}(x, y)],\ (\forall x)[(\exists y)\mathrm{P}(x, y)],\ (\exists x)[(\forall y)\mathrm{P}(x, y)]$$

と括弧〔　〕をつけて考える方が分り易い（定義!!）．また第1式，第2式に対し

$(\forall x)(\forall y)P(x,\ y) \equiv (\forall y)(\forall x)P(x,\ y)$, $(\exists x)(\exists y)P(x,\ y) \equiv (\exists y)(\exists x)P(x,\ y)$

が成り立つけれど，第3式，第4式については等値式が成立しないことが証明できる〔7〕．すなわち，$\forall$ と $\exists$ の順序をかえることは許されない．この例については後でのべる．いま，上の第3式，第4式に de Morgan の公式（20）を適用すれば〔8〕，

(21)　$\neg(\forall x)(\exists y)P(x,\ y) \equiv (\exists x)(\forall y)[\neg P(x,\ y)]$,

$\neg(\exists x)(\forall y)P(x,\ y) \equiv (\forall x)(\exists y)[\neg P(x,\ y)]$

となる．以上の議論は3変数以上の命題関数についても全く同様である．

最後に，2つの結合命題 X，Y に対し，X，Y を構成する各命題の真偽にかかわらず命題 X→Y がつねに真であるとき，X→Y は**恒真**である（tautologous）といい，X⇒Yとかいて，"X から Y を導びく" または "X から Y がでる" とよむ．

たとえば a, b を正数とするとき，"$a < b \to a^2 < b^2$" は不等式の性質から $a^2 < ab < b^2$, よって $a^2 < b^2$, となり恒真である．すなわち，

$$a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

とかくことができる．また，2つの結合命題 X，Y に対し命題 X↔Y が恒真であるとき，X⟺Y とかいて "X と Y は**同値**である" または "XはY の必要かつ十分条件である" とよむ．たとえば，a, b, c を実数とするとき

$$ab = 0 \Longleftrightarrow (a=0 \lor b=0)$$

であることは明らかである．また一つの結合命題が，それを構成する各命題の真偽にかゝわらずつねに真であるとき，われわれはその結合命題を $\mathbb{I}$ で表わそう．もしつねに偽であればその結合命題は**恒偽**であるといい，$\mathbb{O}$ で表わすものとする．たとえば，命題 $X\land(\neg X)$ は恒偽であり命題 $X\lor(\neg X)$ は恒真である．このとき，

(22)　$(X\land\mathbb{I}) \equiv X$, $(X\lor\mathbb{O}) \equiv X$, $(X\land\mathbb{O}) \equiv \mathbb{O}$, $(X\lor\mathbb{I}) \equiv \mathbb{I}$

が成り立つ．また，つぎの等値式が成り立つ．

(23)　$[X\to(X\lor Y)] \equiv \mathbb{I}$, $[(X\land Y)\to X] \equiv \mathbb{I}$

さて数学において，X⇒Y を示す代りに，$[X\land(\neg Y)] \Rightarrow \mathbb{O}$ を証明する方法を用いる．この証明法を**背理法**（reductio ad absurdum）（従来帰謬法とよばれた）という．これは

$$\begin{aligned}[X\land(\neg Y)]\to\mathbb{O} &\equiv \neg[X\land(\neg Y)]\lor\mathbb{O} && ((14)\text{ より})\\ &\equiv (\neg X)\lor Y\lor\mathbb{O} && ((15)\text{ より})\\ &\equiv (\neg X)\lor Y && ((21)\text{ より})\\ &\equiv X\to Y && ((15)\text{ より})\end{aligned}$$

により正しいことがわかる．

§3　数学と言葉．数学で用いられる言葉は記号，式等で表わされることが多いがそれにもかかわらず，なお多くの概念は言葉のみでかゝれる．われわれは§2 に補足を与えながら，あわせて，それらについての若干の私見をのべよう．§2 の頭初でのべた

（i）否定．これは論理記号として "$\neg$" を用いたが，他に ～，－ 等を用いる．この場合には，命題 A に対し，～A, $\bar{A}$ として用いられている．数学では，～ は同値律，－は集合の閉包（closure）をつくる記号として常用されているので，論理記号として用いる場合にはあまり適切ではないと考える．この否定記号にかぎらず，一般に数学では，各部門によ

って同じ記号が種々の意味で用いられるから，記号をみて速断してはならない．もう一例をあげると，集合Aの補集合（余集合ともよばれる）を A^c, C(A), $\bar{A}$ 等とかゝれる．補集合 $\bar{A}$ を A の閉包 $\bar{A}$ と混同したり，命題 A の否定 $\bar{A}$ と間違えたりしがちであるから十分注意してほしい．

(ii) 論理和．論理記号 $\vee$ は “または”, “あるいは” の意味で用いられていることはすでにのべたが，記号としては $\vee$ 以外にはみあたらない．2つの命題 A，B に対し $A \vee B$ かまたは $A.\vee.B$ とかいたりする．この記号は非常に有用で，たとえば2つの集合 A，Bの和集合 $A \cup B$ を A または B の**少くとも一つ**に属する要素の集合と定義する代りに $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$ とかくことができて，極めて明快である．もう一例をあげる．2次方程式 $x^2 - x - 2 = 0$ をとくとき

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) = 0$$

$$\text{よって } x = -1 \vee x = 2$$

とかくことができる．ついでながら，$x \in A$ の $\in$ は “belong to…” (…に属する) を意味し，G. Peano がはじめて使用した〔9〕．この語源は，“x ἐστί A” に由来する〔10〕．なお，$A \cup B$ の記号 $\cup$ は union または cup とよばれる．また，差集合 $A - B$ は集合 $\{x / x \in A \wedge x \notin B\}$ として定義される．さらに $(A - B) \cup (B - A)$ を $A \triangle B$ と表わす．これを A，B の対称差（symmetric difference）とよぶが，この演算は M. H. Stone により導入されたこともつけ加えておこう〔11〕（$\triangle$ の代りに記号 ◯ を用いている）．

(iii) 論理積．論理記号 $\wedge$ は “かつ”, “同時に” の意味で用いられていることはすでにのべたが記号としては $\wedge$ 以外のものは見あたらない．2つの命題 A，B に対し $A \wedge B$ かまたは $A.\wedge.B$ とか，場合によっては AB とかいて $\wedge$ を省略する．

この記号は非常に有用で，たとえば，2つの集合 A，B の共通部分 $A \cap B$ を A，B に共通に属する要素の集合と定義する代りに $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$ とかくことができて，極めて明快である．この $\wedge$ の語源は不明である．ついでながら，$A \cap B$ の記号 $\cap$ (intersection) は cap ともよばれている．

(iv) 含意．論理記号 $\rightarrow$ は “if …, then …” の意味で用いられているが，記号として $\supset$ を用いる場合もある．また，2つの集合 A，B に対し関数 $f: A \rightarrow B$ として $\rightarrow$ を用いたりあるいは数列の収束 $a_n \rightarrow \alpha$ の意味で $\rightarrow$ を用いたりその他多くの場合に $\rightarrow$ を用いるが同じ記号で他の概念を表わすことは数学ではしばしば行なわれるのでとくに注意してほしい．含意の記号 $\rightarrow$ と “導びく” (imply) という意味の記号 $\Rightarrow$ とは区別しなければならない．前者は命題の演算であり，後者は推論で用いられる記号である．このことは §2 の最後の部分で示した例をみれば分るであろう．

(v) 等値関係．論理記号 $\leftrightarrow$ は $\Longleftrightarrow$ と異なることはすでにのべた．前者は命題の演算であり，後者は推論で用いられる記号である．また，2つの結合命題 X，Y に対し，命題 $X \leftrightarrow Y$ がつねに真であるとき，$X \Longleftrightarrow Y$ とかかれることもさきにのべたとおりである．したがって，2つの結合命題 X，Y のそれぞれの真理表が全く一致する場合にはもちろん $X \Longleftrightarrow Y$ となる．よって上述の等値式 (1) − (21) において，“$\equiv$” の代りに “$\Longleftrightarrow$” でおきかえてもよい．また，等値式 (13) の $X \leftrightarrow Y \equiv (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ より $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$ は $X \Longleftrightarrow Y$ で表わされる．

(vi) 全称記号 $\forall$，存在記号 $\exists$．数学では $\forall$ に対応する言葉は any, all, every, each

(任意の，すべての，各々の）で，$\exists$ に対応する言葉は some, there exist（ある…，が存在する）である．したがって以上の言葉がつかわれる場合にはそれぞれ，$\forall$ または $\exists$ でおきかえて考えれば明確である．以下それらの例についてのべてみよう．解析概論〔10〕(p. 5) において，集合の上限について

"集合 S の上限 a とはつぎの条件 (1°), (2°) に適合する数である．

1°　S に属する**すべての**数 x に関して $x \leqq a$

2°　$a' < a$ とすれば，$a' < x$ なる**或る**数 x が S に属する"

とかかれてあるがこの場合，"すべての" と "或る" は正に $\forall$ と $\exists$ でおきかえるべきものである．

また，同書，同ページに集合 S の有界性について "集合 S に属する数が**すべて**一つの数 M よりも大〔あるいは小〕ではないとき，S は上方〔あるいは下方〕に有界である…" とのべられているが，この場合 "すべて" という言葉には $\forall$ をおきかえ，また文章の意味から "M が存在する" ということを看破して

$$(\exists M)(\forall x)[x \in S \to x \leqq M]$$

とかけば，通常の文章として眺めるよりも，極めて簡潔明快であると思われる．さらに，同書〔10〕(p. 87) に Archimedes の原則について

"ε と a とが**与えられた**正数ならば（ε がいかに小さく，a がいかに大きくても）$n\varepsilon > a$ になるような自然数 n が必らず**存在する**" とのべられているが，この場合 "与えられた正数" を "任意に与えられた正数" と解釈して $\forall$ を，"存在する" はそのまゝ $\exists$ でおきかえると

$$(\forall \varepsilon)(\forall a)(\exists n)[n\varepsilon > a]$$

ただし，ε, a は正数の集合を動き，n は自然数の集合を動く

とかくことができる．

また，ある区間 I で定義された関数 $y=f(x)$ が連続関数（または到る処連続であるといってもよい）であることはつぎのように表わされる．

$$(\forall \varepsilon)(\forall x)(\exists \delta)(\forall h)[|h| < \delta \to |f(x+h)-f(x)| < \varepsilon]$$

ただし，ε, δ は正数の集合を動き，h は実数の集合を動く．

この場合，もし

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x)(\forall h)[|h| < \delta \to |f(x+h)-f(x)| < \varepsilon]$$

とかけば $y=f(x)$ は区間 I で一様連続（または，平等連続といってもよい）(uniform continuity) となる〔12〕.

もう一つ例をあげると

ある区間 I で定義された関数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ が関数 $f(x)$ に収束することを

$$(\forall \varepsilon)(\forall x)(\exists n_0)(\forall n)[n_0 < n \to |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon]$$

ただし，ε は正数の集合を動き，n_0, n は自然数の集合を動く

とかくことができる．この場合，もし

$$(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(\forall x)(\forall n)[n_0 < n \to |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon]$$

とかけば，上の関数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ は区間 I において一様収束（または平等収束ともいう）(uniform convergence) するという〔13〕．ついでながら，これらの

一様連続，一様収束の概念は解析学において極めて重要な基礎概念であり，しかも初学者には仲々理解しがたいもののようである．こゝでもっと簡単な例〔14〕をあげよう．いま，x, y は自然数の集合を動き，命題関数 $\mathrm{P}(x, y)$ を“$x < y$”とすれば

$$(\forall x)(\exists y)(x < y)$$

は“どんな自然数 x に対しても $x < y$ なる自然数 y が存在する”ことを表わし，真命題であるが

$$(\exists y)(\forall x)(x < y)$$

は“すべての自然数 x よりも大きい自然数 y が存在する”ことを意味し，このような自然数は絶対存在しないのだから偽命題となる．

以上あげた数例でよく分るように $\forall$ と $\exists$ の順序がかわれば命題の意味内容が全然かわることを十分に留意しなければならない．しかし言葉で表わす文章はとかく冗長でしかも，意味が不明確になりがちであるから，その点このような式で表わす方がよりすぐれていると断言できるであろう．さらにつづけよう．解析概論〔10〕(p. 22) において

“さて，この l に関して，P が任意に A に近ずくとき，

$$\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} f(\mathrm{P}) = l \qquad (2)$$

であることを証明することができる．それを間接法でするために（2）を否定してみよう．（2）を否定することは，何を意味するか，それは，或る $\varepsilon > 0$ が存在して任意の $\delta > 0$ に対して

$$\mathrm{AP} < \delta,\ \mathrm{P} \neq \mathrm{A} \text{ でかつ } |f(\mathrm{P}) - l| \geqq \varepsilon$$

なる点が存在することである，……”とかかれてあるが，これを記号論理的な方法で示せばつぎのとおりである．（2）は

$$(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\mathrm{AP} < \delta \to |f(\mathrm{P}) - l| < \varepsilon)$$

で表わされるが，これを等値式 (15) により変形すると

$$\equiv (\forall\varepsilon)(\exists\delta)[\neg(\mathrm{AP} < \delta) \vee |f(\mathrm{P}) - l| < \varepsilon]$$

これを否定して，等値式（2），(11)，(21) を用いると

$$\neg(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\mathrm{AP} < \delta \to |f(\mathrm{P}) - l| < \varepsilon) \equiv (\exists\varepsilon)(\forall\delta)(\mathrm{AP} < \delta \wedge |f(\mathrm{P}) - l| \geqq \varepsilon)$$

となり上述の主張が正当化される．

また，解析概論〔10〕(p. 5) において

例5．“n が限りなく増大するとき，a_n が一定の数 α に限りなく近づくならば，数列 $\{a_n\}$ は α に収束する”（これを $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とかく）

とのべられているが，これを，われわれは

$$(\forall\varepsilon)(\exists n_o)(\forall n)(n > n_o \to |a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

とかくことができる．これを否定すれば全く同様にして

$$(\exists\varepsilon)(\forall n_o)(\exists n)[n > n_o \wedge |a_n - \alpha| \geqq \varepsilon]$$

これを文章でのべれば，ある正数 ε をとるとき，任意の自然数 n_o に対し $n > n_o$ なるある自然数 n が存在して $|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ となる．

さらに解析概論〔10〕(p. 6) において

“$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$|a_n| < \mathrm{M}$ なる定数 M がある．そうして $|\alpha| \leqq \mathrm{M}$”．

とのべられているが，われわれはこれを

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Rightarrow (\exists M)(\forall n)(|a_n| < M . \vee . |\alpha| \leqq M)$$

とかくことができる.

また，2つの集合 A，B に対し，$A \subseteqq B$ は“A は B の部分集合である”ことを表わしているがこれを論理的に定義すれば

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

で表わされる．もし，A が空集合 ϕ（要素を全然もたない集合，定義!!）ならば

$$(\forall x)(x \in \phi \rightarrow x \in B)$$

となり，命題関数 $x \in \phi \rightarrow x \in B$ は“$x \in \phi$”が ϕ の定義より偽命題であることから§2,(iv)の含意→の定義より $(\forall x)(x \in \phi \rightarrow x \in B)$ は真命題となる．よって $\phi \subseteqq B$ が成り立つ．すなわち，空集合は任意の集合の部分集合である．これより，集合算の公式が空集合についてもそのまゝ成り立つことになる．

いままでわれわれは任意の x とか，すべての x を $(\forall x)$ とかいてきたが記号論理学では $(\forall x)$ のかわりに単に (x) とかいたりする．しかし $\forall$ の記号に慣れるまでは (x) ではなく $(\forall x)$ を用いた方がよい．また，$(\exists x)$ は記号論理学でもそのまま用いられている．この意味は“ある x”とか“少くとも一つの x が存在する”という意味で用いられていることはさきに示したとおりである．とくに“ただ一つ存在する”という場合に，$(\exists_1 x)$ とかくことがある．数学ではこの“**ただ一つ**”(one and only one) は“**一意的**”(unique) という言葉でおきかえることができる．したがって“一意的に存在する”とか“一意的に**確定する**”（単に確定するともいう）とかいう場合は $\exists_1$ でおきかえればよい．たとえば，2つの集合 A，B において各 $x(\in A)$ にただ一つの $y(\in B)$ が対応するときこの対応を A から **B の中への一意写像** (into mapping) または一意（一価）関数とよぶがこゝで用いられる“**一意**”は正しくただ一つの y が定まるということに他ならない．もし一つの x に2つ以上の y が対応するとき関数とよばないで**関係**という言葉をつかったりする（この場合，x に対応する値 y が存在しないときも含む）．また，数学では写像と関数とは同義語と考えてよい．とくに，代数学においては写像という言葉を常用している．さらに，A から B の中への一意写像において，B のすべての要素が対応するとき，A から **B の上への一意写像** (onto mapping) とよばれる．いま，この上への写像を f で表わし，各 $y(\in B)$ に対し $f(x) = y$ となる x がただ一つ存在すれば，この y に x を対応させる一意写像を f^{-1} とかいて f の逆関数という．このような f, f^{-1} が存在するとき，f を A から B への一対一写像（関数）という．この場合，f, f^{-1} の定義域，値域はそれぞれ，A，B；B，A となっている．また，f が一対一写像ならば f^{-1} も一対一写像であることは明らかであろう．このように，一対一写像においては定義域，値域が明確にされているが，このとき，もし2つの集合 A，B の間の対応の仕方のみに着目する場合には，A と B は一対一対応 (one to one correspondence) をなすという．一対一写像と一対一対応はこのような意味で区別される．

つぎに，前述の例5の命題 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を

“ε を如何に小さい正数とするも ε に対して整数 n_o を**適当に定める**と $n > n_o$ なる**凡ての** n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立するとき，α を数列 $\{a_n\}$ の極限という”〔15〕

とのべても，あるいは

“**任意の**正数 ε に対し**十分大きい** n をとれば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$

は α に収束する"

あるいは，すぐ上の命題において

"十分大きい n をとれば" の代りに "**殆んどすべての** n **に対し**" (almost all) または "**有限個の** a_n **を除いて**" とおきかえても宜しい．このように数学では同じ主張がいろいろな言葉でいい表わされることがあるので注意してほしい．ついでながら，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の lim は極限を表わすラテン語 limes から由来する〔16〕．さきに，§2 の最後の部分でのべた $X \Longleftrightarrow Y$ は "**X のときに限つて Y**" (X if and only if Y) とよんでもよいが近頃これを X iff Y とかいたりする．

また，x, y を正数とするとき，"$x < y \Rightarrow x^2 < y^2$ は**明らかである** (it is evident) または**容易に分る** (it is easily seen)" といういい方があるがこの場合 $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$ の証明を省略する用語としてつかわれているけれど，たとい証明が簡単であっても決しておろそかにせずいちいち証明を附する必要がある．さらに

"係数を有理数とする n 次の代数方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} \cdots + a_n = 0$$

の根の集合は可附番集合である"

という有名な定理 (G. Cantor) があるが，この証明をする場合にたとえば

"係数を整数とする n 次の代数方程式として証明しても一般性を失なわない"

といういい方がある．これは各係数が有理数の場合にその分母の最小公倍数をとって，分母を払えば各係数は整数となり，有理数の場合と同値な整係数の n 次の代数方程式がえられるからである．もっと簡単な例をあげれば

"実数係数の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0\,(a \neq 0)$ の根を求める場合，$x^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0$ の根を求めても一般性を失なわない" ということができる．このように "**一般性を失なわない**" (without the loss of generality) という用語がしばしばでてくるがたとい特別なやり方でやるように見えても決して一般性をそこなうことはないという意味である．さらに，"**3 以上 5 以下**の実数 x" というとき，われわれは "$3 \leqq x \leqq 5$" とかくが，以上，以下のつかい方はその端の数も含めることは今日では約束されているけれど，以前は極めてあいまいであった．

また，a, b を実数とするとき，"$a \leqq b$" は "$a = b \vee a < b$" の意味で普通使用されているが命題 "$a < b \to a \leqq b$" は等値式 (23) より恒真であるから，"$a < b \Rightarrow a \leqq b$" とかくことができる．たとえば，数列の極限（上述の例 5）において

$$(\forall\varepsilon)(\exists n_0)(\forall n)(n > n_0 \to |a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

の代りに

$$(\forall\varepsilon)(\exists n_0)(\forall n)(n > n_0 \to |a_n - \alpha| \leqq \varepsilon)$$

とかいてもよい（実はこの逆も真であることが証明できる）．

§4　結語．いままで，われわれは §2 において数学と論理との関連を記号論理学的方法にしたがって説明し，§3 において数学で用いられる言葉，記号，式等を論理式（簡単に，$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\to$，$\leftrightarrow$ の 5 つの規則ならびに $\forall$，$\exists$ を用いて表わされる式）との関連の中でとらえた．このことは数学においては論理と言葉とがいかに密接につながっているかを示すとともに，いささかの不明瞭さ，不明確さをも許さないものであることを強く物語っている．さらに数学において定義される概念は言葉や記号や式等でいい表わされるけれどつねに

確定した意味内容をもっているものである．これらのことを前提として強力な論理が壮大な数学体系を構築するものであろう．§3 で例示した種々の用語は数学の世界にとってはほんのひとかけらにすぎないものであるが，異った言葉で定義された文章が実は同じ概念であったり，同じ記号が異った概念で使用されたり，まことに自由奔放な無軌道さが看取され，しばしば初学者を途迷わせるものであろうと考えられるので，一つ，2つの例を引きながら，あえて煩雑さをいとわず陳述した．このような観点からも記号論理学的な方法がいかに論旨を明確にするものであるかが推定されるであろう．また，数学の研究の進歩によりそれまで使用された用語が今までの概念としては捨てられ，全く別の概念として蘇生して用いられることもある（たとえば normal を“標準的”という意味でつかった時代もあるがそれに対応する用語は今日では canonical，そして normal は“正規”と訳されている）のであわせて留意しなければならないと思う．最後にさらに一言つけ加えるならば，数学で用いられる概念や記号が歴史的にみて何時，誰によってはじめて発見，使用されたかを知っておくことは先駆者の偉業，足跡を探り，あわせてその概念，記号の数学的発展への寄与の深さをしることにもなりうるであろう．たとえば，演算記号 $+$，$-$ は15世紀後半，記号 $=$ は16世紀半ば，不等号 $<$，$>$ は17世紀前半に創案され，方程式における実根，虚根の名称は R. Descartes により与えられ，さらに“関数”（functio）の呼称は1692年 G. W. Leibniz によりはじめて用いられ，彼はまた微分記号 $\frac{dy}{dx}$，積分記号 $\int$ を導入した．また $\sqrt{-1}$ に i の記号を与えたり，関数 $y=f(x)$ の記法を用いた（1734年）のは L. Euler で，微分係数として $f'(x)$ の記法を使用したのは J. L. Lagrange である．さらに $a+ib$ を複素数とよんだのは C. F. Gauss で彼はまた a^2+b^2 を Norm とよんだ．$\sqrt{a^2+b^2}$ を Modulus とよんだのは J. R. Argand で複素平面のアイデアを最初に与えたのは Gauss とも Argand ともいわれている．また，偏微分係数 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ の記法は C. G. J. Jacobi がはじめて採用し，行列式を determinant とよんだのは A. L. Cauchy である．つぎに数学で用いられる“近傍”概念は K. Weierstrass により，§3 でのべた上限（下限）の概念は B. Bolzano，一様収束性は N. H. Abel により導入されたといわれている．また，行列の概念は 1858年 A. Cayley により，四元数は W. R. Hamilton，最大（小）極限集合 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,A_n$（$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,A_n$）は E. Borel により創造された．以上わずかながら，数学における極めて常識的な概念，記号についてふれたが，このような概念，記号が今日なお重要なものとして生き続けているにもかかわらず，教育上その歴史的背景への顧慮の不足を痛感しないわけにはいかない．

参 考 文 献

〔1〕 赤摂也，現代数学の思想と数学教育の現代化，思想1967年３月号，また，杉浦光夫，現代数学の思想について，数理科学1968年５月号を参照せよ．

〔2〕 新らしい数学教育，（高等学校）（数学教育現代化講座指導資料），1968.

〔3〕 D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Springer-verlag Berlin, 1949.

〔4〕 近藤洋逸，好並英司，論理学概論，岩波書店，1965. 他に $\underline{\vee}$，$\oplus$ の記号に対しては，それぞれ，矢野健太郎，集合と論理，日本評論社，1966, p. 3; 一松信，記号論理学，数学セミナー，1962年８月号をみよ．

〔5〕 ibid 〔4〕 p. 55.

〔6〕 前原昭二，数理論理学序説，共立全書，1966 または，ibid 〔3〕 p. 66.

〔7〕 ibid 〔3〕 p. 64, ibid 〔6〕 p. 157.

〔8〕 このことについてもっと厳密に証明できる．ibid 〔3〕 pp. 69-70.

〔9〕 F. Hausdorff, Mengenlehre, Walter de Gruyter & Co., 1927, p. 11.

〔10〕 高木貞治，解析概論，改訂第３版，岩波書店，1961, p. 11.

〔11〕 W. Sierpiński, Algèbre des Ensembles, Warszawa-WrocŁAW, 1951, p. 98.

〔12〕 たとえば，C. Kuratowski, Topologie volume I, Warszawa 1958, p. 14.

〔13〕 たとえば，ibid 〔3〕, pp. 56-57.

〔14〕 B. Rotman, G. T. Kneebone, The theory of sets and transfinite numbers, Oldbourne, London, 1966, p. 4.

〔15〕 藤原松三郎，微分積分学（数学解析第一編）第一巻，内田老鶴圃新社，1967, pp. 12-13.

〔16〕 ibid 〔15〕, p. 13.