QUELQUES PROPRIÉTÉS CONCERNANT LES CATÉGORIES MORPHOLOGIQUES

Par

Hiroshi AMAKI

La notion de catégorie grammaticale élémentaire a été introduite par R. L. Dobrušin dans son travail [1]. S. Marcus a donné une certaine extension de celle de Dobrušin et l'a appelé catégorie morphologique. La notion extrêment fundamentale qui concerne la catégorie morphologique est celle d'ensembles initiaux. Dans son travail [4], S. Marcus aussi explore, en détail, le rapport entre les catégories morphologiques et les ensembles initiaux. Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques propriétés qui concernent ces notions, à l'aide de la théorie des ensembles. La terminologie et les notations sont celles de [3] et [5]. Considérons un ensemble non vide Γ dont les éléments sont nommés mots. Désignons par T le demi-groupe libre engendré pre Γ. Toute partie Φ de T est un langage sur Γ. Tout élément de T sera une **phrase** sur Γ. Les phrases de Φ sont dites **marquées** ou **repérées** par rapport à Φ. On appelle **contexte** sur Γ tout couple ordonné (f_1, f_2), où f_1 et f_2 sont des phrases sur Γ. Soient $x \in \Gamma$ et $y \in \Gamma$. On dit que x **domine** y et on écrit $x \rightarrow y$, si pour tout contexte (f_1, f_2) la relation $f_1xf_2 \in \Phi$ implique la relation $f_1yf_2 \in \Phi$. La relation $\rightarrow$ est dite la **relation de domination**, et a été étudiée, en détail, par S. Marcus dans [6]. Il est aisé de voir que la relation $\rightarrow$ est réfléxive et transitive sur Γ. Si l'on a, à la fois, $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow x$, alors on dit que x et y sont **équivalents**, et on écrit $x \leftrightarrow y$. Il est facile à voir que la relation $\leftrightarrow$ est celle d' équivalence. Posons $S(x) = \{y/x \leftrightarrow y\}$. L'ensemble $S(x)$ est, par définition, la **famille** du mot x. La notion de famille est due à O. S. Koulagina [2], et elle joue un rôle profondément important dans la linguistique descriptive. Soit, maintenant, une partie $A \subseteqq \Gamma$. Posons $^*A = \{x \,/\, x \in \Gamma \wedge x \rightarrow A$ pour tout $y \in A\}$. On dira que A est **initial**, s'il n'existe aucun élément $x \notin A$ tel que $x \rightarrow A$ (c'est-à-dire, si $x \rightarrow A$, alors $x \in A$). De même, posons $A^* = \{x \,/\, x \in \Gamma \wedge A \rightarrow x$ pour tout $y \in A\}$. On a, alors, la proposition suivante, à l'aide de la théorie des ensembles [8].

Proposition 1. Pour deux parties A et B de Γ, on a

(1) Si $A \subseteqq B$, alors $^*A \supseteqq {^*B}$ et $A^* \supseteqq B^*$.

(2) $A \subseteqq (^*A)^*$ et $A \subseteqq {^*(A^*)}$

(3) $(^*(A^*))^* = A^*$ et $^*((^*A)^*) = {^*A}$

Démonstration. (1) et (2) sont des conséquences immédiates de la définition de la relation $\rightarrow$. Pour obtenir (3), en vertu de (1) et (2), on a évidemment

$*A \supseteqq *((*A)*)$ et $A^* \supseteqq (*(A^*))^*$. D'autre part, dans (2) en remplaçant A par A^*, on obtient $A^* \subseteqq (*(A^*))^*$ et $*A \subseteqq *((*A)^*)$, et la formule (3) est ainsi établie.

Dans la suite, désignons A^* par A_1.

Proposition 2. Pour un ensemble non initial A, il existe un ensemble initial contenant A.

Démonstration. Pour définition, on a $A \to A_1$ et $*(A_1) \to A_1$. Posons $**(A_1) = \{x / x \to *(A_1)\}$. En tenant compte du fait que la relation $\to$ est transitive, on a $**(A_1) \to A_1$. De la définition même de $*(A_1)$, on déduit que $**(A_1) = \subseteqq *(A_1)$, c'est-à-dire $*(A_1)$ est initial. D'autre part, en vertu de (2) de la proposition 1, on obtient $A \subseteqq *(A_1)$ et la proposition 2 est ainsi démontrée.

Proposition 3. Etant donnés des ensembles A^α pour tout $\alpha \in J$, on a $(\bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha)_1 = \bigcap_{\alpha\in J} A_1^\alpha$. où désigne par A_1^α l'ensemble $(A^\alpha)_1$.

Démonstration. D'abord, en tenant compte de $\bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha \supseteqq A^\alpha$, en vertu de (1) de proposition 1, on a $(\bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha)_1 \subseteqq A_1^\alpha$ et donc, $(\bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha)_1 \subseteqq \bigcap_{\alpha\in J} A_1^\alpha$. Montrons que l'inclusion inverse a lieu. Soit, maintenant, $x \in \bigcap_{\alpha\in J} A_1^\alpha$. Du fait que x appartient, à la fois, à A_1^α pour tout $\alpha \in J$, il s'ensuit que $A^\alpha \to x$ pour tout $\alpha \in J$. Puisque pour chaque $\alpha \in J$, la relation $A^\alpha \to x$ a lieu, on a $\bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha \to x$, et donc, $x \in (\bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha)_1$. La proposition 3 est ainsi démontrée.

Proposition 4. Etant donnés des ensembles A^α pour tout $\alpha \in J$, on a $*(\bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha) = \bigcap_{\alpha\in J} *A^\alpha$, où désigne par $*A^\alpha$ l'ensemble $*(A^\alpha)$.

Démonstration. En vertu de (1) de la proposition 1, il est évident que $*(\bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha) \subseteqq \bigcap_{\alpha\in J} *A^\alpha$. Donc, il reste à prouver que l'inclusion $\bigcap_{\alpha\in J} *A \subseteqq *(\bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha)$ a lieu. Soit, maintenant, $x \in \bigcap_{\alpha\in J} *A^\alpha$. Alors, vu que x, appartient, à la fois, à $*A^\alpha$ pour tout $\alpha \in J$, on obtient $x \to A^\alpha$ pour tout $\alpha \in J$, et donc, $x \to \bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha$. Par conséquent, on a $x \in *(\bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha)$, c'est-à-dire $\bigcap_{\alpha\in J} *A^\alpha \subseteqq *(\bigcup_{\alpha\in J} A^\alpha)$. La proposition 4 est ainsi établie.

Maintenant, posons $G(A) = A \cup A_1$. Par définition, l'ensemble $G(A)$ est la **catégorie morphologique** (engendrée par A). Alors, on a des propositions suivantes.

Proposition 5. Pour un ensemble non initial A, il y a une catégorie morphologique engendrée par certain ensemble initial contenant A.

Démonstration. On commence par montrer que $*A$ est un ensemble initial. Posons $**A = \{x / x \to *A$ pour tout $y \in *A\}$. On a, alors, la relation $**A \to A$. D'autre part, en vertu de la définition de $*A$, $*A \to A$. Par suite, d'après la transitivité de la relation $\to$, on déduit que $**A \to A$, et on a donc $**A \subseteqq *A$. Maintenant, posons $(*A)_1 = \{x / *A \to x\}$. On a évidemment la relation $*A \to (*A)_1$. Mais, en utilisant (2) de la proposition 1, on obtient $A \subseteqq *A \cup (*A)_1$, d'où $A \subseteqq G(*A)$. La proposition 5 est ainsi démontrée.

Proposition 6. Si A et B sont deux parties de Γ, et $A \to B$, alors on a $G(B)$

$\subseteq G(A)$.

Démonstration. Par hypothèse, $A \to B$ et $B \to B_1$. Donc, en vertu de la transitivité de la relation $\to$, on obtient $A \to B_1$. Par suite, de la définition même de A_1, il s'ensuit que $B_1 \subseteq A_1$. D'autre part, il est évident que $B \subseteq A_1$. Or, posons $G(A) = A \cup A_1$ et $G(B) = B \cup B_1$. Du fait que $B_1 \subseteq A_1$ et $B \subseteq A_1$, il résulte que $G(B) \subseteq G(A)$.

Proposition 7. Si B est un ensemble initial et $A^\alpha \to B$ pour tout $\alpha \in J$, alors on a $*B \supseteq *(\bigcup_{\alpha \in J} A^\alpha)$ et $B \supseteq \bigcup_{\alpha \in J} A^\alpha$.

Démonstration. On a évidemment $*A^\alpha \to B$, et donc, de la définition de $*B$, on déduit que $*B \supseteq *A^\alpha$ pour tout $\alpha \in J$, c'est-à-dire $*B \supseteq \bigcup_{\alpha \in J} *A^\alpha$. Mais, en tenant compte de $\bigcup_{\alpha \in J} *A^\alpha \supseteq \bigcap_{\alpha \in J} *A^\alpha$, en vertu de la proposition 3, il s'ensuit que $*B \supseteq *(\bigcup_{\alpha \in J} A^\alpha)$. Ensuite, vu que par hypothèse $A^\alpha \to B$ pour tout $\alpha \in J$, on a $*B \supseteq \bigcup_{\alpha \in J} A^\alpha$. Donc, de ce que B est initial, il résulte que $B \supseteq \bigcup_{\alpha \in J} A^\alpha$. La proposition 7 est ainsi démontrée.

Or, un ensemble de mots est dit **normal**, s'il est une somme des familles. Par exemple, les ensembles $*A$ et A_1 énoncés ci-dessus, sont normaux. Soit, maintenant, A un ensemble initial. Posons $\bar{A} = \bigcup_{x \in A} S(x)$, où désigne par $S(x)$ une famille de x. Un tel ensemble $\bar{A}$ est dit la **couverture** de A. Ces notions ont été données par S. Marcus dans [7]. Il est évident que la couverture de A est normal. On a des propositions suivantes.

Proposition 8. (1) $A \subseteq \bar{A}$

(2) Si $A \subseteq B$, alors $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

(3) $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$

(4) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(5) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

(6) $\overline{A - B} \supseteq \bar{A} - \bar{B}$

Démonstration. L'inclusion (1) est une conséquence immédiate de la définition même de $\bar{A}$. Pour établir (2), considérons un mot quelconque $x \in \bar{A}$. Par hypothèse, il y a une famille $S(y)$ telle que $x \in S(y)$ et $y \in A$. De ce que $A \subseteq B$ et de la définition même de $\bar{A}$, il s'ensuit que $x \in S(y) \subseteq \bar{B}$, et donc, $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. Comme démonstration de (3), vu que, en vertu de (1), $\bar{A} \subseteq \bar{\bar{A}}$, il suffit de prouver que $\bar{\bar{A}} \subseteq \bar{A}$. Soit $x \in \bar{\bar{A}}$. Vu que $\bar{\bar{A}}$ est la couverture de $\bar{A}$, il existe une famille $S(y)$ telle que $x \in S(y)$ et $y \in \bar{A}$, et donc, on a $x \leftrightarrow y$. Encore, d'après la définition de $\bar{A}$, il y a une famille $S(z)$ telle que $y \in S(z)$ et $z \in A$, et donc, $y \leftrightarrow z$. De ce que la relation $\leftrightarrow$ est transitive et de la définition de la famille, on déduit que $x \leftrightarrow z$ et $x \in S(z)$, c'est-à-dire $x \in \bar{A}$. Par conséquent, on a $\bar{\bar{A}} \subseteq \bar{A}$. Pour obtenir (4) il suffit de montrer que $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. Maintenant, soit $x \in \overline{A \cup B}$. Alors, il existe une famille $S(y)$ telle que $x \in S(y)$ et ou bien $y \in A$ ou bien $y \in B$. Si $y \in A$, alors on obtient $x \in \bar{A}$. Si $y \in B$, alors $y \in \bar{B}$, et on a donc $\overline{A \cup B} \subseteqq \bar{A} \cup \bar{B}$. Pour établir (5), on tient compte de (3). L'inclusion (6) est une conséquence immédiate de la définition de la couverture. Proposition 8 est complètement démontrée.

Proposition 9. Quel que soit l'ensemble A, on a $*(\bar{A}) = \overline{(*A)} = *A$.

Démonstration. On commence par démontrer que $\overline{(*A)} = A$. En vertu de (1) de la proposition 8, on a $\overline{(*A)} \supseteqq *A$, et donc, il suffit de prouver que $\overline{(*A)} \subseteqq *A$. Soit $x \in \overline{(*A)}$. Il existe une famille $S(y)$ telle que $x \in S(y)$ et $y \in *A$. Par suite, les relations $x \leftrightarrow y$ et $y \rightarrow A$ entraînent $x \rightarrow A$, et donc $x \in *A$. Puis, montrons que $*(\bar{A}) = *A$. On a évidemment que $*(\bar{A}) \supseteqq *A$. Par suite, il reste à montrer que l'inclusion inverse a lieu. Soit, maintenant, $x \in *(\bar{A})$. Du fait que $x \rightarrow \bar{A}$ et $A \subseteqq \bar{A}$, il s'ensuit que $x \rightarrow A$, et donc, $x \in *A$. Par conséquent, on a $*(\bar{A}) = \overline{(*A)} = A$, et la proposition 9 est ainsi établiée.

Or, par définition, un ensemble initial A est **involutif**, si $A_1 \subseteqq A$.

Cette notion a été donnée par S. Marcus dans [7]. Alors, on a la proposition suivante.

Proposition 10. Si A et B sont involutifs et $A \rightarrow B$, alors on a $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$ et $\bar{B} \subseteqq \bar{A}$.

Démonstration. D'abord, soit $x \in \bar{A}$. D'après la définition de $\bar{A}$, il y a une famille $S(y)$ telle que $x \in S(y)$ et $y \in A$, et on a donc $x \leftrightarrow y$. Par hypothèse, vu que $A \rightarrow B$, on obtient $y \rightarrow B$. En vertu de la transitivité de la relation $\leftrightarrow$, il s'ensuit que $x \rightarrow B$. D'autre part, soit $z \in \bar{B}$. De même, il existe une famille $S(w)$ telle que $w \in B$ et $w \leftrightarrow z$. Par suite, en tenant compte du fait que $x \rightarrow B$, $w \leftrightarrow z$, et $w \in B$, on obtient $x \rightarrow z$, et donc $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$. Ensuite, vu que la relation $A \rightarrow B$ entraîne $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$, en vertu de la proposition 6, on a $G(\bar{B}) \subseteqq G(\bar{A})$, ou $G(\bar{A}) = \bar{A} \cup (\bar{A})_1$ et $G(B) = \bar{B} \cup (\bar{B})_1$. D'autre part, il est aisé de voir que $(\bar{A})_1 \subseteqq A_1$ et $(\bar{B})_1 \subseteqq B_1$. Par suite, de ce que A et B sont involutifs et en vertu de (1) de la proposition 8, il s'ensuit que $\bar{B} \subseteqq \bar{A}$. La proposition 10 est ainsi démontrée.

Bibliographie

[1] R. L. Dobrušin, Mathematical methods in linguistics, applications (in Russian), Mat. Prosveščenie 6, 52-59 (1961).

[2] O. S. Kulagina, On one method of defining grammatical notions on the basis of set theory (in Russian), Probl. Kibernetiki 1, 203-214 (1958).

[3] S. Marcus, Introduction mathématique à la linguistique structurale, Dunod, Paris, 1967, le chapitre V.

[4] S. Marcus, Sur la domination au sens de Kunze dans la linguistique algébrique, Rev. Roum. Math. pures et appl., Tome XIV, No. 3, p. 377-398, Bucarest, 1969.

[5] S. Marcus, Algebraic linguistics; analytical models, Academic press, 1967.

[6] S. Marcus, Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire I, Revue de math. pures et appl., Acad. R. P. R., 1962, 7, 1, 91-107.

[7] S. Marcus, Sur un modèle logique de la catégorie grammaticale élémentaire II, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen der Math., Bd. 8, S. 323-329 (1962).

[8] Par ex., voir B. Rotman and G. T. Kneebone, The theory of sets and transfinite numbers, Oldbourne, London, 1966.