システム制御情報学会論文誌，Vol. 18, No. 7, pp. 261–267, 2005

論　文

拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御による狭帯域周波数外乱の振動絶縁制御*

千田　有一†・石原　義之‡・大富　浩一§

Vibration Isolation Control for Narrow-Band Frequency Disturbances via Extended $\mathcal{H}_\infty$ Control*

Yuichi CHIDA† , Yoshiyuki ISHIHARA‡ and Koichi OHTOMI§

In this paper, we consider a vibration isolation control problem in case that narrow-band frequency disturbances are applied to a system. The frequency shaping method by $\mathcal{H}_\infty$ control is suitable for the problem. But we can't locate closed-loop poles in preferable region even if we use the robust stability-degree assignment method, because poles of weighting functions of the generalized system become undetectable modes. In order to overcome this problem, we use extended $\mathcal{H}_\infty$ control combined with the robust stability-degree assignment method. By the method, we can design a controller that provides desirable frequency shaping and preferable closed-loop poles location at the same time. The performance of the designed controller is conformed by experiments.

1.　はじめに

本論文では，振動絶縁機構に対するアクティブ制御問題について考える．制御系の設計において，システムに加わる外乱周波数が既知の場合，周波数整形によってその周波数での絶縁性能を高めることは容易である．これは，アクティブ制御を利用する大きな利点であり，古典的な手法としてノッチフィルタを利用した方法が提案されている [8]．一方，国際宇宙ステーションに搭載される回転機械においても，回転体の偏重心に起因する振動外乱を絶縁するための振動絶縁機構を用意しており，アクティブ制御によって振動絶縁効果を高めている [3,4]．文献 [3,4] ではノッチフィルタとローパスフィルタを併用した古典的な手法が用いられている．

しかしながら，古典的手法では制御器パラメータのわずかな変化で絶縁性能が大きく変化するなど，制御器の調整が難しい場合がある [1,2]．そのため，システマティックで直感的に設計できる方法が望ましい．文献 [1,2] では $\mathcal{H}_\infty$ 制御を用いた周波数成形による設計方法が示され，実験によりその有効性が検証されている．しかし，減衰性の低い共振極や零点（反共振点）を含んだ制御対象では，$\mathcal{H}_\infty$ 制御器が虚軸近傍の閉ループ極を生じさせる場合もある．これを回避するためには，ロバスト安定度指定法 [9,10] などによって，閉ループ極の配置に制約を加える方法が知られている．しかしながら，文献 [1,2] の問題では，重み関数極に虚軸近傍の極を含む必要があるため，安定度指定法を用いると，それらのモードが不安定な不可観測（あるいは不可制御）モードとなるために，標準 $\mathcal{H}_\infty$ 制御理論を適用することができなかった．

そこで，本論文ではこの問題点を回避するため，美多，劉らによって提案された拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御 [6,7,5] を用いることを考える．拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題では，不安定重み関数を許容するため，ロバスト安定度指定法によって重み関数極が不安定化された場合でも解くことができる．ただし，拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御については，実問題を想定した応用例は示されておらず，応用上の注意点が広く認識されているとはいえない．たとえば，標準 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題と同じ拡大系を用いると，拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御の可解条件を満たさない場合があるなど応用上の制約がある．これに対し，本論文では可解条件を満たす拡大系を示すと共に，ロバスト

* 原稿受付　2004 年 12 月 24 日
† 信州大学 工学部 Department of Mechanical Systems Engineering, Shinshu University; 4-17-1, Wakasato, Nagano 380-8553, JAPAN
‡ 信州大学 大学院 工学系研究科 Graduate School of Engineering, Shinshu University; 4-17-1, Wakasato, Nagano 380-8553, JAPAN
§ （株）東芝 研究開発センター R&D Center Toshiba Corporation; 1, Komukai Toshiba-cho, Saiwai-ku, Kawasaki 212-8582, JAPAN
Key Words: vibration isolation control, extended $\mathcal{H}_\infty$ control, frequency shaping.

安定度指定法を併用することによって閉ループ極を望ましい領域に配置した解が得られることを示す．用いた制御対象は，文献 [3,4] の回転機械と特徴が類似した 2 慣性ばねマス実験装置である．制御性能は実験によって検証を行った．

2. 制御対象と振動絶縁制御問題

制御対象は，Fig.1 に示す実験システムである．運動方程式は次式となる．

$$J_1\ddot{\theta_1}+K_1l_1^2(\theta_1-\theta_2)+C_1l_1^2(\dot{\theta_1}-\dot{\theta_2})+C_2\dot{\theta_1}=f+d \quad (1)$$

$$J_2\ddot{\theta_2}+K_2l_2^2\theta_2+K_1l_1^2(\theta_2-\theta_1)+C_1l_1^2(\dot{\theta_2}-\dot{\theta_1})=-f \quad (2)$$

ここで J_1,J_2 は慣性モーメント，K_1,K_2 はバネ定数，C_1,C_2 は粘性定数，l_1,l_2 はバネの連結部と回転中心の距離，θ_1,θ_2 は回転角である．J_1 内部に固定されたモータにより，J_1 と J_2 に相互作用的に制御入力 f（回転力）を加える．また，外乱トルク d は下部モータにより J_1 に加えられる．このシステムは，二つの共振モードを持った振動系となっている．振動外乱 d が J_1 に加わると，J_1 と同時に J_2 も振動する．J_2 の振動はバネ K_2 を介して外部に伝達する[1]．そこで，制御力 f を用いて，d による振動が J_2 に伝わらないように振動絶縁する．つまり，外乱 d に対して，回転角 θ_2 の変位を抑える．

制御系設計のため，制御対象モデルをシステム同定実験によって求めた [1,2]．その結果，7 次元のモデルが得られ，1 次共振モードが 0.65[Hz]，2 次モードは 9.13[Hz] となった．制御対象モデルのボード線図を Fig. 2 に示す．一方，振動外乱は 3[Hz] の単一周波数正弦波 $d=A\sin 6\pi t$ を想定した．実システムにおいては，外乱振動周波数の変動が予想されるが，これについては制御系設計時に別途考慮した．以下では，次の制御系設計目標を達成する制御器を設計する．

[制御系設計目標]

1. 共振減衰性：0.65[Hz] と 9.13[Hz] の共振モードに適当な減衰を付加する．
2. 振動絶縁性：3[Hz] 近傍の狭帯域周波数外乱の影響を θ_2 に伝達しない．
3. 制御応答性：虚軸近傍の閉ループ極を回避し，適当な領域に配置する．

リアルタイム制御系は PC とカウンタボード，D/A ボードを用いて構築し，サンプリング周期 10[ms] のディジタル制御系とした．回転角は各軸に搭載したロータリエンコーダで検出し，数値的な差分演算により相対速度 $\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2$ を求める．制御器は連続時間領域で設計し，双一次変換により離散化して実装した．

[1] J_1 が回転体を搭載した部分，d が回転体のアンバランス振動力，J_2 が回転体支持部，K_2 が支持部固定部材と考えれば，文献 [3,4] と定性的に同じ構造となっている．

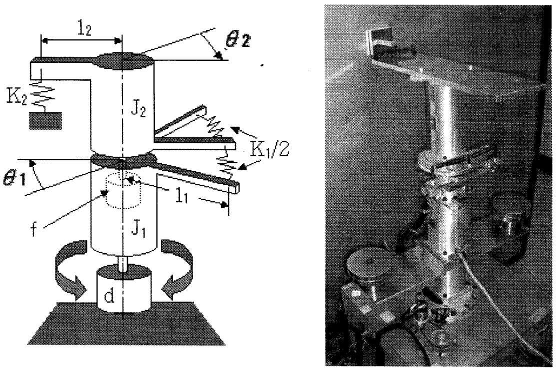

Fig. 1 Experimental system

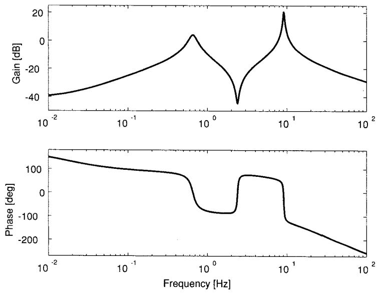

Fig. 2 Bode plot of controlled system

3. 標準 $\mathcal{H}_\infty$ 制御による設計と問題点

3.1 標準 $\mathcal{H}_\infty$ 制御

次の一般化プラントを考える．

$$\dot{x}=Ax+B_1w+B_2u \quad (3)$$

$$z=C_1x+D_{11}w+D_{12}u \quad (4)$$

$$y=C_2x+D_{21}w+D_{22}u \quad (5)$$

x, w, u, z, y は状態変数，外乱入力，制御入力，制御量，観測量を表し，それぞれの次数を n, r, p, m, q とする．また，簡単化のため $D_{11}=0$, $D_{22}=0$ とし D_{12} は行フルランク，D_{21} は列フルランクと仮定する．このとき疑似逆行列 $D^\dagger$ と正規直交基底 $D^\perp$ は以下で定義される．

$$\begin{bmatrix} D_{12}^\dagger \\ D_{12}^\perp \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{12} & (D_{12}^\perp)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}=I \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} D_{21} \\ (D_{21}^\perp)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{21}^\dagger & D_{12}^\perp \end{bmatrix}=I \quad (7)$$

また，$\mathcal{H}_\infty$ 制御器の存在性に関わる前提条件として以下の仮定 A)，B) を設定する．

A1) (A,B_2) は可安定

A2) $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}=n+p,\ \forall\omega$

B1) (A,C_2) は可検出

B2) $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}=n+q,\ \forall\omega$

以上の設定のもとで，標準$\mathcal{H}_\infty$制御問題は出力フィードバック制御$u=C(s)y$によって閉ループ系を内部安定にし，かつ，閉ループ系のwからzまでの伝達関数が

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty<1 \tag{8}$$

を満たす$C(s)$を求めることである．

[定理1] 標準$\mathcal{H}_\infty$制御問題の可解条件は仮定A)，B)のもとで以下の1)〜3)が成り立つことである．

1) 次式が安定化解$X\geq 0$を持つ．

$$X(A-B_2D_{12}^{\dagger}C_1)+(A-B_2D_{12}^{\dagger}C_1)^{\mathrm{T}}X+X(B_1B_1^{\mathrm{T}} -B_2E_{12}^{-1}B_2^{\mathrm{T}})X+(D_{12}^{\perp}C_1)^{\mathrm{T}}D_{12}^{\perp}C_1=0 \tag{9}$$

したがって，以下のA_Xは安定である．ただし，$E_{12}:=D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12}$.

$$A_X=A-B_2D_{12}^{\dagger}C_1+(B_1B_1^{\mathrm{T}}-B_2E_{12}^{-1}B_2^{\mathrm{T}})X \tag{10}$$

2) 次式が安定化解$Y\geq 0$を持つ．

$$Y(A-B_1D_{21}^{\dagger}C_2)^{\mathrm{T}}+(A-B_1D_{21}^{\dagger}C_2)Y+Y(C_1^{\mathrm{T}}C_1 -C_2^{\mathrm{T}}E_{21}^{-1}C_2)Y+B_1D_{21}^{\perp}(B_1D_{21}^{\perp})^{\mathrm{T}}=0 \tag{11}$$

したがって，以下のA_Yは安定である．ただし，$E_{21}:=D_{21}D_{21}^{\mathrm{T}}$.

$$A_Y=A-B_1D_{21}^{\dagger}C_2+Y(C_1^{\mathrm{T}}C_1-C_2^{\mathrm{T}}E_{12}^{-1}C_2) \tag{12}$$

3)

$$\rho(XY)<1 \tag{13}$$

以上の可解条件が満たされると，$\mathcal{H}_\infty$制御器の中心解は次式で与えられる．

$$C(s)=-F_\infty(sI-\hat{A})^{-1}ZL_\infty \tag{14}$$

$$\begin{cases}\hat{A}=A+B_1B_1^{\mathrm{T}}X+B_2F_\infty+ZL_\infty\hat{C}_2\\ \hat{C}_2=C_2+D_{21}B_1^{\mathrm{T}}X\\ F_\infty=-D_{12}^{\dagger}C_1-E_{12}^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X\\ L_\infty=-B_1D_{21}^{\dagger}-YC_2^{\mathrm{T}}E_{21}^{-1}\\ Z=(I-YX)^{-1}\end{cases} \tag{15}$$

3.2 標準$\mathcal{H}_\infty$制御による設計の問題点

文献[1,2]では，Fig. 3に示される拡大系をもとに標準$\mathcal{H}_\infty$制御器を求めている．Fig. 3において$P(s)$は制御対象，$C(s)$は制御器，$W_n(s),W_r(s),W_s(s)$はそれぞれ重み関数であり，εは定数重みである．また，dは振動外乱，$u=f$は制御入力であり，出力はそれぞれ$y_1=\theta_2$，$y_2=\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2$となっている．ここで，$d$から$y_1=\theta_2$までの閉ループ系伝達関数が振動絶縁性能を表しているので，重み関数$W_n(s)$を用いて直接的に振動絶縁性能が指定できる．そこで，3[Hz]でゲインピークを持つ重み関数$W_n(s)$を指定し，絶縁性能を高めた．その場合，結果として$W_n(s)$は虚軸に近い極（$s=-0.0943\pm j18.849$）を持ってしまう．以上の設定で制御器を求め，制御実験によって所望の効果を確認した[1,2]．しかし，閉ループ極には非常に虚軸に近いものが存在していた．これは，制御対象の共振モードに対応する極と，制御器の零点との相殺によって生じたものである．そのような閉ループ極が存在すると，制御応答の劣化が懸念される．そこで，ロバスト安定度指定法[9,10]を併用し，閉ループ極配置に制約を付けることを考える．安定度指定法を用いると，振動モードの減衰性が安定度の指定によって容易に付加されるので，拡大系が簡略化でき，低次の制御器が得られるというメリットがある．

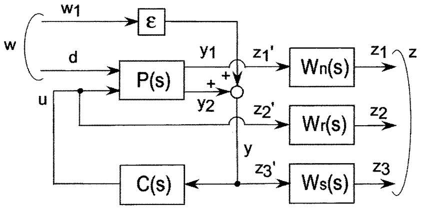

Fig. 3 Augmented system for standard $\mathcal{H}_\infty$ design

[ロバスト安定度指定法の手順]

1. 安定度αを指定する．
2. 拡大系のA行列を$\tilde{A}:=A+\alpha I$に置き換える．
3. Aの代わりに$\tilde{A}$を用いて標準$\mathcal{H}_\infty$制御問題を解く．
4. 得られた制御器のA行列$\tilde{A}_c$を$A_c-\alpha I$に置き換える[1]．

ロバスト安定度指定法では，安定領域を$s=-\alpha$に制限して$\mathcal{H}_\infty$制御問題を解くため，すべての閉ループ極を$s=-\alpha$より左側に配置することができる．また，同時に(8)式を満たす．そこで，ロバスト安定度指定法の適用を試みた．しかし，$\alpha>0.0943$となる安定度を設定すると，拡大系の(A,C_2)が不可検出となり問題が解けなくなってしまった．これは，重み関数$W_n(s)$として虚軸に非常に近い極$s=-0.0943\pm j18.849$を持つためである．

4. 拡張$\mathcal{H}_\infty$制御による制御系設計

4.1 拡張$\mathcal{H}_\infty$制御

拡張$\mathcal{H}_\infty$制御[5–7]では不安定な重み関数の存在を許すので，前節の問題を回避することができる．以下では文献[6]の方法を用いて制御器を設計する．ただし，本論文の問題では出力端にのみ重み関数を付加しているので，仮定B1),B2)の条件を緩和した拡張$\mathcal{H}_\infty$制御を適用する．文献[6]によれば，仮定B)が成り立たない場合，仮定B)を緩和した次の条件を導入する．

B1') すべての(A,C_2)の不安定な不可観測モード極は重み関数極に限られる．

B2') 行フルランクなUが存在し

$$U(A-B_1D_{21}^{\dagger}C_2)=A_zU,\quad UB_1D_{21}^{\perp}=0 \tag{16}$$

[1]以下では，アフィン変換後の行列は~をつけて表す．

$$\mathcal{R}(U^T)\bigcap\mathcal{O}=\emptyset \tag{17}$$

を満たす．A_z は (A,C_2) の不安定な不可観測モードである．また，$\mathcal{R}$ は値域を表し，$\mathcal{O}$ は (C_2,A) の可観測空間 $\mathcal{O}=\sum_{i=0}^{n-1}(A^T)^i\mathcal{R}(C_2^T)$ である．ただし，$\lambda_i(A_z)$ から導かれる可能性のあるもの以外，$G_{21}(s)$ は $j\omega$ 不変零点を持たない．

(16) 式の条件は A_z が $(A-B_1D_{21}^{\dagger}C_2, B_1D_{21}^{\perp})$ の不可制御モードとなることに等価である．

[定義 1]（疑似安定化解） 以下の条件を満たすとき，行列 Y を疑似安定化解という．

(1) Y は (11) 式の実対称解である．
(2) Y は $UY=0$ を満たす．
(3) (12) 式の A_Y の固有値で，$\lambda_i(A_z)$ 以外のものは安定である．

[定理 2] 仮定 A1)，A2)，B1)，B2) が成り立つとき，$\mathcal{H}_\infty$ 制御器は (14) 式,(15) 式において，Y を疑似安定化解に代えたもので与えられる．

4.2 拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御による制御系の設計

拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御とロバスト安定度指定法を併用して振動絶縁制御系を設計する．まず，標準 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題で用いた Fig. 3 の拡大系をそのまま用いることを考えたが，仮定 B2') を満たさないため可解とはならなかった．そこで，拡大系を修正し，Fig. 4 とした．Fig. 3 と Fig. 4 には，仮想外乱 w_1 の取り方，重み $W_s(s)$ の違いがある．拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題では，仮定 B2') を満たすように問題設定する必要があるが，$w_1=d$ とすることでこの条件を満たすことができる．また，安定度指定法によれば，応答性能を安定度によって指定できるので，$W_s(s)$ による伝達関数の成形は冗長であるため削除した．$P(s)$, $C(s)$, $W_n(s)$, $W_r(s)$ と ϵ の定義は Fig. 3 と同様であり，$W_n(s)$ によって振動絶縁性能が指定できる点も同様である．用いた重み関数は以下の通りである．ただし，$\xi_i,\varsigma_i,\omega_i$ は Table 1 に示す．

$$W_r=\frac{3.0\cdot10^3(s+10)^2}{(s+1000)(s+1005)}\cdot\frac{1/3s+10}{1/0.06s+1000} \tag{18}$$

$$W_n=\frac{0.281(s+0.1)^2}{(s+100)(s+101)}\prod_{i=1}^{3}\frac{s^2+2\xi_i\omega_i s+\omega_i^2}{s^2+2\varsigma_i\omega_i s+\omega_i^2} \tag{19}$$

$$\epsilon=10^{-5},\quad \alpha=2.4 \tag{20}$$

Fig. 5 に重み関数のゲイン線図を示す．3[Hz] での振動絶縁性能を高めるため，$W_n(s)$ には 3[Hz] に急峻なゲインのピークを持たせてある．また，安定度は $\alpha=2.4$ とし，すべての閉ループ極を $s=-2.4$ 未満の左半平面内に配置するとした．このとき，$W_n(s)$ は $s=-0.0754\pm j18.849$ を極として含むので，この極はアフィン変換後の系で不安定かつ不可検出な固有値となる．

設計手順に沿って説明する．まず，$P(s)$, $W_n(s)$, $W_r(s)$ の状態空間表現を次式とする．

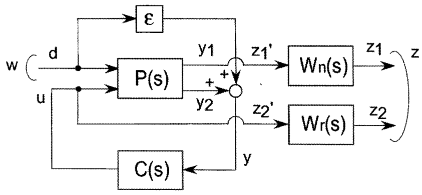

Fig. 4 Augmented system for pole placement $\mathcal{H}_\infty$ design

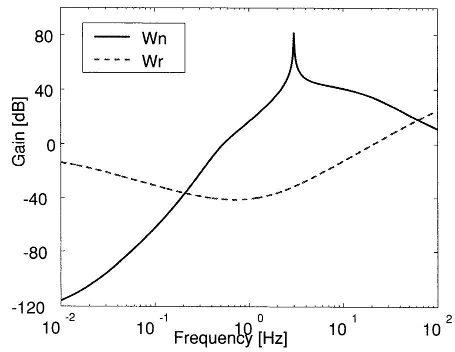

Fig. 5 Gain of weighting functions

Table 1 Parameters of $W_n(s)$

ξ_1	7.0	ς_1	0.004	ω_1	$3.00\cdot2\pi$
ξ_2	100.0	ς_2	0.5	ω_2	$0.50\cdot2\pi$
ξ_3	50.0	ς_3	1.75	ω_3	$9.0\cdot2\pi$

$$P(s)\ :\ \dot{x}_p=A_px_p+b_{p1}u+b_{p2}d \tag{21}$$

$$y_1=c_{p1}x_p=\theta_1,\ y_2=c_{p2}x_p=\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2 \tag{22}$$

$$W_n(s)\ :\ \dot{x}_n=A_nx_n+b_ny_1,\ z_1=c_nx_n+d_ny_1 \tag{23}$$

$$W_r(s)\ :\ \dot{x}_r=A_rx_r+b_ru,\ z_2=c_rx_r+d_ru \tag{24}$$

このとき，Fig. 4 の拡大系は次式で表される．

$$\left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} \begin{pmatrix} A_p & 0 & 0 \\ b_nc_{p1} & A_n & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{p2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{p1} \\ 0 \\ b_r \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} d_nc_{p1} & c_n & 0 \\ 0 & 0 & c_r \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ d_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_{p2} & 0 & 0 \end{pmatrix} & \epsilon & 0 \end{array}\right] \tag{25}$$

ロバスト安定度指定法を適用するため，(25) 式の A 行列内の行列を $v=s+\alpha$ によってアフィン変換する．それによって得られた $\tilde{A}:=A+\alpha I$, $\tilde{A}_p:=A_p+\alpha I$, $\tilde{A}_n:=A_n+\alpha I$, $\tilde{A}_r:=A_r+\alpha I$ に対して拡張 $\mathcal{H}_\infty$ 制御を適用する．そのためには，前提条件 B1')，B2') を満たさなければならない．まず，B1') について調べる．

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI-\tilde{A} \\ C_2 \end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI-\tilde{A}_p & 0 & 0 \\ -b_nc_{p1} & sI-\tilde{A}_n & 0 \\ 0 & 0 & sI-\tilde{A}_r \\ c_{p2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

上式より，$\tilde{A}_p$ のすべての固有値は可観測モードとなっており，不可観測モードは重み関数の極のみである．よって，条件 B1') は満たされる．つぎに，B2') について調べる．$D_{21}=\epsilon$, $D_{21}^{\dagger}=1/\epsilon$，$D_{21}^{\perp}=0$ であることから，

$$\tilde{A}-B_1D_{21}^{\dagger}C_2=\begin{bmatrix}\tilde{A}_p-b_{p2}c_{p2}/\epsilon & 0 & 0\\ -b_nc_{p1} & \tilde{A}_n & 0\\ 0 & 0 & \tilde{A}_r\end{bmatrix} \tag{27}$$

$$B_1D_{21}^{\perp}=0 \tag{28}$$

となり，$\tilde{A}-B_1D_{21}^{\dagger}C_2$ のすべてのモード $\tilde{A}_p-b_{p2}c_{p2}/\epsilon$, $\tilde{A}_n$，$\tilde{A}_r$ は $(\tilde{A}-B_1D_{21}^{\dagger}C_2, B_1D_{21}^{\perp})$ の不可制御モードとなる．よって，行フルランクな U を求めればよい．そこで，(27) 式を正則行列 T を用いて相似変換すると，

$$\begin{aligned}&T^{-1}(\tilde{A}-B_1D_{21}^{\dagger}C_2)T\\ &=\begin{bmatrix}\tilde{A}_p-b_{p2}c_{p2}/\epsilon & 0 & 0\\ 0 & \tilde{A}_n & 0\\ 0 & 0 & \tilde{A}_r\end{bmatrix}=:\bar{A}\end{aligned} \tag{29}$$

とすることができ，

$$\bar{U}\bar{A}=A_z\bar{U},\quad \bar{U}:=\left(0\ \begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\right) \tag{30}$$

$$A_z:=\begin{bmatrix}\tilde{A}_n & 0\\ 0 & \tilde{A}_r\end{bmatrix} \tag{31}$$

となる．ただし，不安定固有値は $\tilde{A}_n$ のみに含まれ，$\tilde{A}_r$ には含まれないが，すべての重み極を A_z に含ませても理論上問題ないので，すべての重み極を A_z に含ませて解いた．以上から，$U:=\bar{U}T^{-1}$ とおけば B2') の (16) 式は満たされる．(17) 式を満たすことは数値計算によって確認することもできるが，(29) 式の T を用いると，$C_2T=(*,0,0)=:C_2'$($*$ は適当な行列要素) と表せるので，次式を得る．

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\ &=\mathrm{span}\{C_2^T,\tilde{A}^TC_2^T,\cdots\}=\mathrm{span}\{C'^T_2,\bar{A}^TC'^T_2,\cdots\}\\ &=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}*\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}*\\0\\0\end{pmatrix},\cdots\right\}=\mathcal{R}\left\{\begin{pmatrix}I\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\end{aligned} \tag{32}$$

したがって，この問題設定で可解条件 B1')，B2') を満たす．

つぎに，疑似安定化解 Y の導出方法について述べる．まず，変換行列 S を以下のように選ぶ．

$$S:=\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\end{bmatrix}\\ \bar{U}\end{pmatrix}T^{-1}=T^{-1} \tag{33}$$

また，$\bar{A}_1$，および $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ をつぎのように定義する．

$$S(A-B_1D_{21}^{\dagger}C_2)S^{-1}=\begin{bmatrix}\bar{A}_1 & 0\\ 0 & A_z\end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\bar{A}_1:=\tilde{A}_p-b_{p2}c_{p2}/\epsilon \tag{35}$$

$$C_1S=:\begin{bmatrix}\bar{C}_1 & *\end{bmatrix},\ C_2S=:\begin{bmatrix}\bar{C}_2 & *\end{bmatrix} \tag{36}$$

$$SB_1D_{21}^{\perp}=:\begin{bmatrix}\bar{H}\\ 0\end{bmatrix} \tag{37}$$

このとき (11) 式の次元を縮小した Riccati 方程式

$$\begin{aligned}Y_1\bar{A}_1{}^T+\bar{A}_1Y_1+Y_1(\bar{C}_1{}^T\bar{C}_1-\bar{C}_2{}^TE_{21}^{-1}\bar{C}_2)Y_1\\ +\bar{H}\bar{H}^T=0\end{aligned} \tag{38}$$

の安定化解を Y_1 とすると，疑似安定化解 Y は次式で求められる．

$$Y=S^{-1}\begin{bmatrix}Y_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}(S^T)^{-1} \tag{39}$$

制御器は (39) 式の Y を用いて，(14) 式，(15) 式より求められる．

5. 実験結果

以上の手順で得られた制御器の設計結果を示す．前節の手順で設計した結果 18 次元の制御器が得られた．周波数応答が劣化しない範囲で低次元化を行った結果，9 次元の制御器を得た．安定度指定法を用いた結果，1 次振動モードに対する減衰特性などは容易に設定可能であった．Fig. 6 に d から θ_2 までの閉ループ系周波数応答を示す．実線が同定実験結果，破線が計算機シミュレーションの結果である[1]．点線は制御対象の周波数応答であり，一点鎖線は W_n^{-1} を表す．外乱周波数である 3[Hz] における振動絶縁性能が大幅に改善されている．また，実験結果と計算機シミュレーションの結果は非常によく一致していることがわかる．とくに，3[Hz] での振動絶縁性能は，制御前の性能（点線）より大幅に改善されている．このことは，減衰なしのパッシブ系よりも高い性能を実現していることを意味しており，$\mathcal{H}_\infty$ 制御によって位相情報まで含めて最適に設計された結果であるといえる．一方，Fig. 7 には，閉ループ極の配置を示した．閉ループ極が $s=-\alpha=-2.4$ の左半面に配置されており，虚軸近傍の閉ループ極を回避することができている．つぎに，θ_2 の時間応答を Fig. 8 に示す．実線と破線はそれぞれ，$\mathcal{H}_\infty$ 制御器による実験，およびシミュレーションの結果である．また，点線は定数フィードバック制御器による実験結果である．設計した制御器は，所期の振動絶縁性能を達成していることが確認できる．また，実験結果は，定常状態で二次モードがノイズにより励振されている点を除き，おおむねシミュレーション結果と一致している．一方，制御入力は Fig. 9 となる．定数フィードバックの場合（点線）に比較して，操作量も小さく抑えられており，制御エネルギー的にも合理的な結果となっている．

[1] すべての計算機シミュレーションでは，フルオーダの制御器を用いている．低次元制御器での制御性能の劣化はわずかであったため，その結果は記載していない．

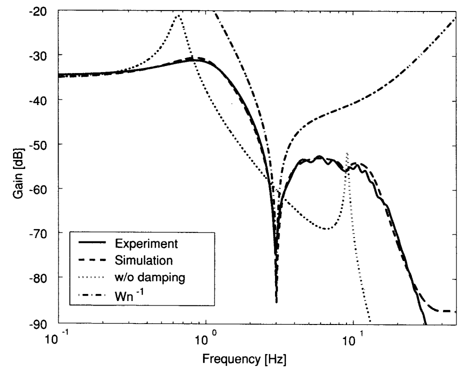

Fig. 6　Gain plot from d to θ_2

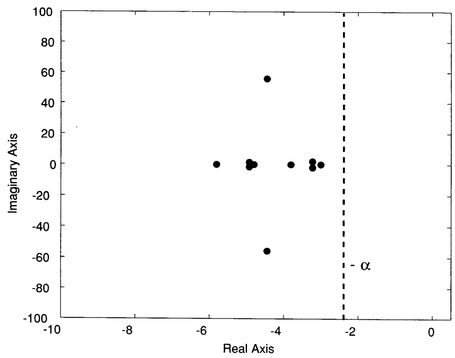

Fig. 7　Location of closed-loop poles

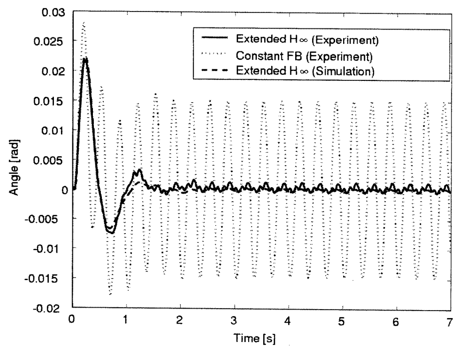

Fig. 8　Time response (Output)

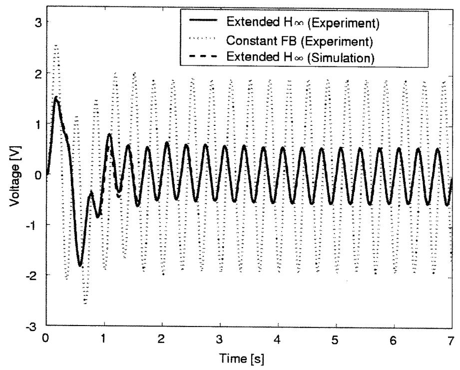

Fig. 9　Time response (Control input)

以上の結果から，得られた制御器は所期の制御仕様を満たし，期待した振動絶縁性能を持つことが検証できたといえる．

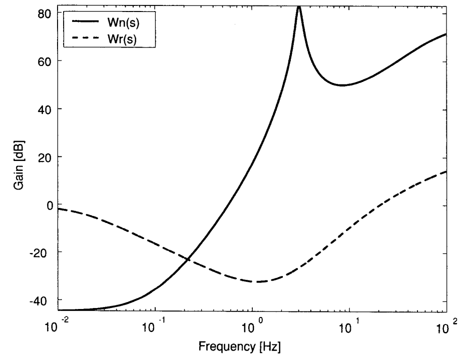

Fig. 10　Gain of weighting functions (Wide type)

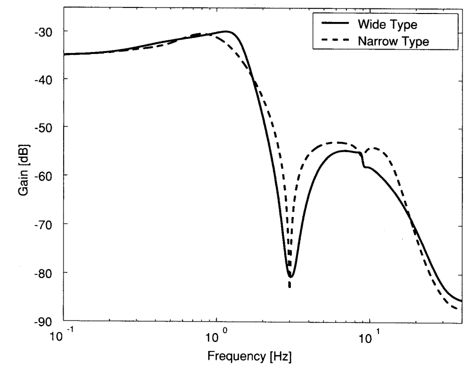

Fig. 11　Gain plot from d to θ_2 (Wide type)

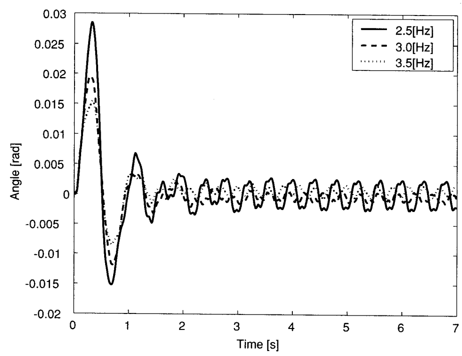

Fig. 12　Time response (Wide type)

つぎに，外乱の周波数変動に対してロバスト性を向上させることを考える．Fig. 5 では，重み関数 $W_n(s)$ が 3[Hz] でピークゲインを持つように設定したが，$W_n(s)$ が広い周波数で大きなゲインとなるように設定すれば，振動絶縁周波数に幅を持たせることができる．Fig. 10 のように，$W_n(s)$ のゲインが 3[Hz] 近傍の周波数帯域で高くなるように設定し，同様の手法で制御器の設計を行った．その結果，得られた振動絶縁性能は期待した通りの結果となり，Fig. 11 に示す性能となる．実線が Fig. 10 の重み関数を用いた場合であり，点線が Fig. 5 の場合である．絶縁可能な外乱周波数の幅が広がっていることがわかる．外乱周波数を 2.5[Hz]～3.5[Hz] まで変動させた場合の実験結果（θ_2 の応答）を Fig. 12 に示す．外乱周波数が変動しても，振動絶縁性能の劣化をある程度避けることができている．よって，外乱周波数変動に対して

ロバストな制御器の設計も，容易に可能であることが確認できた．

6. おわりに

本論文では，狭帯域の周波数外乱が加わるシステムにおける振動絶縁制御問題について考え，拡張$\mathcal{H}_\infty$制御とロバスト安定度指定法を組み合わせた手法によって性能向上可能であることを示した．制御性能は実験によって検証した．拡張$\mathcal{H}_\infty$制御については，応用例は報告されておらず，その意味からは拡張$\mathcal{H}_\infty$制御の実用性を示したといえる．本論文ではロバスト安定度指定法を併用したが，LMIを用いた方法によれば，よりきめ細かく極配置を行うことが可能である [11]．

謝 辞

拡張$\mathcal{H}_\infty$制御に関して，千葉大学劉康志先生，宇都宮大学平田光男先生より文献をご提供頂くと共に有益なコメントを頂いた．また，査読者には(32)式をご指摘頂いた．記して感謝の意を表します．

参 考 文 献

[1] Y. Chida, Y. Ishihara and T. Okina: Identification and frequency shaping control of a vibration isolation system; *Proc. of the 10th IFAC/IFORS/IFIP Symposium on LSS(LSS2004)*, pp. 186–191 (2004)

[2] 千田，石原，翁，古川，大富：狭帯域周波数外乱に対するアクティブ振動絶縁制御；日本機械学会論文集C編，第71巻，第705号，pp. 1537–1543 (2005)

[3] F. Otsuki, H. Uematsu, Y. Nakamura, Y. Chida, O. Nishimura, K. Ohtomi and M. Tanaka: Vibration isolation control of centrifuge rotor; *Proc. of the 5th International Conference on Motion and Vibration Control*, pp. 415–420 (2000)

[4] 大築，植松，中村，千田，古川，大富，岡村：セントリフュージロータ振動絶縁系の同定と制御；*SICE*第*1*回制御部門大会予稿集，pp. 75–76 (2001)

[5] K. Z. Liu, M. Hirata and T. Sato: All solutions to the $\mathcal{H}_\infty$ control synthesis problem with unstable weights; *Proc. of the 36th IEEE CDC San Diego*, Ca. Dec 1997, pp. 4641–4646 (1997)

[6] 美多，忻欣，富山，B. D. O.Anderson：拡張$\mathcal{H}_\infty$制御－$\mathcal{H}_\infty$サーボ問題と推定問題の統一的解法－；*SICE*論文集，Vol. 33, No. 7, pp. 654–664 (1997)

[7] 美多：$\mathcal{H}_\infty$制御，昭晃堂 (1994)

[8] L. A. Sievers and A. H. von Flotow: Linear control design for active vibration isolation of narrow band disturbances; *Proc. of the 27th CDC*, pp. 1032–1037 (1988)

[9] H. Kimura, et al.: Robust stability-degree assignment and its application to the control of flexible structures; *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, Vol. 1, pp. 153–169 (1991)

[10] M. Saeki: $\mathcal{H}_\infty$ control with pole assignment in specified disk; *Int. J. of Control*, Vol. 56, No. 3, pp. 725–731 (1992)

[11] 石原，千田: 極の領域を制限した拡張$\mathcal{H}_\infty$制御のLMI解法とその応用; *SICE*第*33*回制御理論シンポジウム資料, pp. 51–56 (2004)