意思決定法 AHP における一対比較の簡便法

飯田　洋市

キーワード：AHP、一対比較、固有ベクトル法

１．　はじめに

AHP は Analytic Hierarchy Process の略称であり、Saaty により 1970 年代に創始された意思決定法である（Saaty（1980））。直観や経験を数量化して組み入れることができる意思決定法として、世界で広く活用されている。

本論文では、AHP で直観や経験を数量化するために利用される一対比較について検討する。特に、従来同時に行われていた重要度の大小による順位付けと尺度による数量化を分けることで、一対比較の回答者の労力を軽減するとともに、回答者の納得感を向上する方法を提案する。

本論文で扱う一対比較に関する問題を説明するために、AHP の手順について説明する。AHP の手順は大きく分けて四つに分けられる。

（手順 1）問題を階層図で表現する。

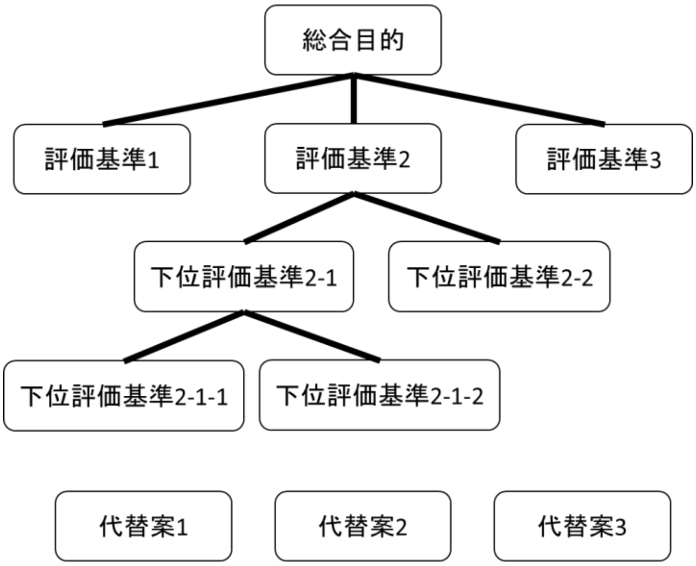

図 1　階層図

まず、階層図の一番上の層にただ一つの総合目的を配置する。次に、選択肢となる複数の代替案を最下層に配置する。その後、それらの代替案を選択するための複数の評価基準を、中間の層に配置していく。配置される評価基準は互いに独立であることが求め

られる。ある評価基準が二重基準になっていないか検討し、そのようなものがあれば下位評価基準として分解する（高萩・中島（2005））。分解された評価基準はもとの評価基準の下位に配置する（図 1）。階層図は完全型、分岐型、短絡型に分類される（刀根（1986））。それらの工夫にもかかわらず従属関係が残る場合は、内部従属法や外部従属法などを使う（木下（2000a））。親子関係のある項目間をつなぐ線の描き方に規則はない。図 1 では評価基準と代替案を結ぶ線を省略している。

（手順 2）一対比較を繰り返し行うことで、各項目に重み（数値）を割り当てる。

同じ親を持つ子の関係にある項目に関して、一対比較を行う。図 1 では、下位評価基準 2-1 と 2-2 は、評価基準 2 に関して一対比較される。代替案については、下位評価基準を持たない全ての（下位）評価基準に関して、一対比較を行う。一対比較は、Saaty が提案した 1－9 尺度を使う。これは、回答者は 2 項目の重要度の差を表現した言葉で回答し、それを表 1 により数量化するというものである（表 1）。

表 1 Saaty の 1－9 尺度

定義	一対比較値
項目 x_i と項目 x_j が同じぐらい重要（equal importance）	$a_{ij} = 1$
項目 x_i が項目 x_j よりやや重要（moderate importance）	$a_{ij} = 3$
項目 x_i が項目 x_j よりかなり重要（strong importance）	$a_{ij} = 5$
項目 x_i が項目 x_j より非常に重要（very strong importance）	$a_{ij} = 7$
項目 x_i が項目 x_j より極めて重要（extreme importance）	$a_{ij} = 9$
$a_{ij} = 2$，4，6，8 は上の 2 つの中間の値とする。	
$a_{ii} = 1$，$a_{ji} = 1／a_{ij}$	

ところで、一対比較の回数が多くなると項目間の重要度の関係の中に矛盾を含む可能性が高くなる。たとえば、項目 x_1、x_2、x_3 を一対比較する際、項目 x_1 は項目 x_2 より重要、項目 x_2 は項目 x_3 より重要、項目 x_3 は項目 x_1 より重要と回答した場合がこれにあたる。これは一巡三角形と呼ばれる 3 項目間の関係であり、すべての項目を重要度の大きさにより一次元的に順序付ける一対比較の目的と矛盾する。たとえば、評価基準が二重基準となっていることなどが考えられる。

しかし、このような矛盾は人間の意思決定にはつきもの等と考え、このような矛盾を認めた上でそれらをどの程度まで容認できるかを測定するために、AHP の創始者である Saaty は整合指標 C.I.（consistency index）、さらには整合比 C.R.（consistency ratio）を提案している（Saaty（1980））。C.I.は 0 以上であり、0 のとき、その時に限り完全に整合的であることが数学的に証明されている。そして、これらの指標が 0.1 以下（あるいは 0.15）であれば、一対比較の結果は整合性があると認めて良いとしている。

C.I.は一巡三角形の存在だけでなく、過大評価・過小評価などにより、値が大きくなることが知られている（木下（2000b））。本論文で提案する一対比較の方法は、一巡

三角形の関係を作らないという長所を持つ。これについては第 4 節で示す。

さて、一対比較の結果は表 1 により数量化され、一つの表にまとめられる。これを一対比較表と呼ぶ。この表を行列で表したものを一対比較行列と呼ぶ。そして、この一対比較行列の、絶対値が最大の固有値を求め（λ_{max} などと書かれる)、それに属する固有ベクトルを計算する。絶対値が最大の固有値、そしてそれに属する固有ベクトルは、それぞれ主固有値、主固有ベクトルと呼ばれる。λ_{max} の存在と一意性、および成分がすべて正である主固有ベクトル、いわゆる正の主固有ベクトルの存在は、いわゆる Perron－Frobenius の定理により保障されている（小山（2010)）。

このようにして得られる主固有ベクトルのうち、その成分の合計が 1 となるものを選びそれを重要度ベクトルと呼ぶ。これは得られた主固有ベクトルの各成分を、それら成分の和で除することで容易に得られる。この操作を AHP では正規化と呼ぶ。正規化に関しては、成分の和を 1 にする側面から批判されることが多いが、正規化の操作を行わないと重要度が負になる可能性があり、別途これを排除しなければならないことに注意が必要である。Perron－Frobenius の定理については次節を参照のこと。

ところで、一対比較行列の成分は、一対比較した項目の順序に対応している。この対応に従い、重要度ベクトルの各成分が各項目の重要度になる。この方法は固有ベクトル法と呼ばれる。なお、AHP の創始者である Saaty 自身は、AHP は主固有ベクトルにより重要度を算出するとしており、たとえば幾何平均を用いる計算方法を認めていないため、固有ベクトル法などと呼んでいない[1]。

なお、各項目の重要度は作成した一対比較行列に依存しないことを第 2 節で証明する。このことにより、一対比較行列から重要度ベクトルとなる正規化した主固有ベクトルを計算する際に、対応する項目の順序とともに一対比較行列の成分を並べ替えて良いこと、さらにどのような順序で一対比較しても問題ないことが分かる。

（手順 3)（手順 2)で得られた評価基準の重みを代替案の重みと組み合わせることで、各代替案の総合評価値を計算する。一般的な表現を使えば加重総和を取る。

（手順 4)（手順 3）で得られる結果について、（手順 2）で得た一対比較行列の各成分の値を参考に、感度分析を行う。項目間の独立性に問題が無かったかなどを吟味する。この段階で、評価基準の数や代替案の数が増減することはできるだけ避ける。特に、代替案の個数が増減する場合、順位逆転現象という問題に直面することになる[2]。

AHP にはいくつか回避すべき問題があり、それらに対応したいくつもの工夫が創始者である Saaty 自身を含む多くの研究者により提案されている（Saaty（1996, 2001))。本論文で提案する一対比較法は、一対比較について回答者の労力を軽減させるとともに、納得度を高めるための手法である。

２．　固有ベクトル法による重みベクトルの一意性について

固有ベクトル法は一対比較行列の正規化した主固有ベクトルから項目の重要度を算出する。ここでは、それら重要度は作成する一対比較行列に依存しないことを示す。この問題については、Iida（2010）が一対比較行列の標準化問題として扱っている[3]。この問題は項目数が n 個の場合に証明できるが、ここでは理解を助けるために n=3 の場合を使い説明する[4]。

3 項目を x_1, x_2, x_3 と書き、x_i と x_j を一対比較した結果得られる一対比較値を a_{ij} と書くことにする（表 1 を参照のこと）。通常、これにより次の一対比較行列を得る：

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

行列 A の作り方から、第一行（あるいは第一列）から順に、項目 x_1, x_2, x_3 に対応している。この行列 A の主固有値を $\lambda_{\max}$ と書き、それに属する固有ベクトルを $w={}^t(w_1, w_2, w_3)$と書くと、次の式を得る：

$$\mathrm{A}w=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\lambda_{\max}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\lambda_{\max}w.$$

このようにして得られる主固有ベクトルを正規化したベクトルが重要度ベクトルになる。このとき、項目 x_i の重要度 $\dot{w}_i$ は次のようになる：

$$\dot{w}_1=\frac{w_1}{w_1+w_2+w_3},\quad \dot{w}_2=\frac{w_2}{w_1+w_2+w_3},\quad \dot{w}_3=\frac{w_3}{w_1+w_2+w_3}.$$

一方、項目を並び替えて x_2, x_3, x_1 とすると、一対比較行列 B は次のようになる：

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

行列 B の作り方から、第一行（あるいは第一列）から順に、項目 x_2, x_3, x_1 に対応している。この行列 B の主固有値を $\mu_{\max}$ と書き、それに属する固有ベクトルを $v={}^t(v_2, v_3, v_1)$と書くと、次の式を得る：

$$\mathrm{B}v=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_1 \end{pmatrix}=\mu_{\max}\begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_1 \end{pmatrix}=\mu_{\max}v\ .$$

このようにして得られる主固有ベクトルを正規化したベクトルが重要度ベクトルになる。このとき、項目 x_i の重要度 $\dot{v}_i$ は次のようになる：

$$\dot{v}_2=\frac{v_2}{v_2+v_3+v_1},\quad \dot{v}_3=\frac{v_3}{v_2+v_3+v_1},\quad \dot{v}_1=\frac{v_1}{v_2+v_3+v_1}.$$

本節の目標は$\dot{v}_1=\dot{w}_1, \dot{v}_2=\dot{w}_2, \dot{v}_3=\dot{w}_3$を示すことである[5]。これにより、各項目の重要度は一対比較行列の作り方に依存しないことになる。

ここで AHP の一対比較行列が主固有値を持ち､それに属する正の固有ベクトルをもつ根拠になった Perron－Frobenius の定理を思い出しておく。

定理（Perron－Frobenius）. A を非負で分解不能な正方行列とする。このとき A の固有値λ_Aで次の性質をもつものが存在する。

（1）$\lambda_A > 0$。

（2）A の任意の固有値をαとすれば$\lambda_A \geqq |\alpha|$。

（3）λ_Aは A の固有方程式の単根である。

（4）λ_Aに対応する固有ベクトル x_0 で、$x_0 > 0$ となるものがある。しかも、非負の固有ベクトルをもつ固有値はλ_Aだけである。

AHP の一対比較行列は非負で分解不能な正方行列であることから、この定理が適用される。上の定理の（3）より、λ_Aに対応する固有空間は 1 次元ベクトル空間になることが分かる。さらに、定理の（4）より、主固有値に属する固有ベクトルを適当に求め、それを正規化することにより、常に正の値として全ての重要度が得られることが保証されることが分かる。

たとえば、固有空間が 2 次元以上のベクトル空間であれば、得られた固有ベクトルを正規化しても重要度は一意的に定まることはない。また、主固有値以外の固有値に対する固有ベクトルから重要度を定めようとすると負の値が混じることになり､（AHP の意味で）重要度とみなすことができなくなる。

以上の考察から、$\dot{v}_1=\dot{w}_1, \dot{v}_2=\dot{w}_2, \dot{v}_3=\dot{w}_3$を示すためには、$\lambda_{max}=\mu_{max}$ を示した上で、それらに対応する固有ベクトルが互いの固有ベクトルになることを示せば十分である。また、次の定理が知られている：

定理 1. P と Q を n 次正方行列とする。このとき、$Q=C^{-1}PC$ を満たす n 次正則行列 C が存在するとき、次が成り立つ：

（1）行列 P の固有値からなる集合と Q の固有値からなる集合は等しい。

（2）w を P の固有値λに属する固有ベクトルとするとき、$C^{-1}w$ は Q のλに属する固有ベクトルとなる。他方、v を Q の固有値λに属する固有ベクトルとするとき、Cv は P の固有値λに属する固有ベクトルである。

定理 1 に沿って証明する。まず A の固有値の集合と B の固有値の集合が一致することを示す。このために次の等式を考える：

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

$$= \mathrm{C}^{-1}\mathrm{AC}.$$

ここで、$\mathrm{E}(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$と$\mathrm{E}(1,2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$は互換を表す置換行列である。一般に、任意の置換は互換の積で表されること、互換を表す置換行列は単位行列 E の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列 $\mathrm{E}(i, j)$で表されることが知られている。このとき、$\mathrm{E}(i, j)^2=\mathrm{E}$、$\mathrm{E}(i, j)^{-1}= \mathrm{E}(i, j)$である。また、行列（あるいはベクトル）の左から $\mathrm{E}(i, j)$を乗じると第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列が得られ、右から乗じると第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列が得られる。このとき、等式（3.1）は次のように書ける：

$$\mathrm{B}= \mathrm{E}(2, 3)^{-1}\mathrm{E}(1, 2)^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{E}(1, 2)\,\mathrm{E}(2, 3)=\mathrm{C}^{-1}\mathrm{AC}.$$

ここで、$\mathrm{C}= \mathrm{E}(1, 2)\,\mathrm{E}(2, 3)$である。このとき次が成り立つ：

$$\mathrm{A}w=\lambda w \Leftrightarrow \mathrm{C}^{-1}\mathrm{AC}\left(\mathrm{C}^{-1}w\right)=\lambda\left(\mathrm{C}^{-1}w\right) \Leftrightarrow \mathrm{B}\left(\mathrm{C}^{-1}w\right)=\lambda\left(\mathrm{C}^{-1}w\right). \qquad ・・・(3.2)$$

これより定理 1（1）が示され、結果として $\lambda_{max}=\mu_{max}$ を得る。また、(3.2）より $\mathrm{C}^{-1}w$ は B の λ_{max} に対する固有ベクトルである：

$$\mathrm{C}^{-1}w=\mathrm{E}(2,3)^{-1}\,\mathrm{E}(1,2)^{-1}w=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_1 \end{pmatrix}=w'.$$

よって、$w={}^t(w_1, w_2, w_3)$ に対して、$w'={}^t(w_2, w_3, w_1)$ は B の主固有ベクトルになる。従って、ある k が存在して $v_1=kw_1, v_2=kw_2, v_3=kw_3$ となる。以上より、$\dot{v}_1=\dot{w}_1, \dot{v}_2=\dot{w}_2, \dot{v}_3=\dot{w}_3$ となることが容易にわかり、一対比較行列 A と B から得られる項目 x_1, x_2, x_3 の重要度は一致することが示される。一般に、次の定理が成り立つ。

定理 2. AHP における一対比較行列の主固有ベクトルによる各項目の重要度は、一対比較行列の決め方に依存しない。

３.　一対比較行列の整合性について

一対比較をする目的は､与えられた n 個の項目を一次元的に順位付けすることである。AHP に一対比較では無差別（同じくらい重要）を認めているところに特徴がある。このことは順位付けの議論を複雑にするため、本論文では一対比較で無差別を認めないものとし、無差別がある場合の議論は別の機会に譲る。

さて、すでに説明したように、一次元的に順序付けする場合に問題になるのが 3 項目間における一巡三角形をなす関係である｡これは推移律が成り立たない場合であり、項目 x_1 が x_2 に勝ち、x_2 が x_3 に勝ち、x_3 が x_1 に勝つ場合である。AHP を含め、現実問題を対象にする場合はこのような場合を認めて一次元的に順序付けることを考えることになる[6]。しかし、一次元的に並べることを目的にする場合、やはり任意の 3 項目間に一巡三角形の関係が存在しないことが望ましい。なお、4 個以上の項目が巡回関係をなす場合、必ず 3 項目間の巡回関係を含むことが知られている。

ところで、一対比較で項目 x_1 が x_2 より勝っているとき（より重要、より優位、より選好されるなど)､「x_1 は x_2 に勝利する（した)」と言い、一対比較された結果をまとめた一対比較表を勝敗表に見立てることがある。この場合、AHP の一対比較表では、第 i 行が項目 x_i の対戦成績を表しているとみなせる。このとき、AHP の一対比較の結果と一巡三角形の個数に関する次の定理が知られている（飯田（2007)）:

定理 3. n 個の項目に関する AHP の一対比較結果について，各項目の勝ち数からなる集合が $\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$ となるとき、この一対比較は一巡三角形を含まない。

n 個の項目が定理 3 の条件を満たすとき、これらは勝敗数に関して矛盾なく一次元的に並べられることになる。従って、得られた一対比較表を勝ち数の多い順に上から並べ変えることは意味がある（飯田（2008)）。実際、表 2 と 3 は同じ 5 つの項目 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 に対する一対比較表であるが､表 3 の方が順序関係についても理解しやすい[7]。AHP の一対比較表の作り方から、列に注目すると、評価者が重要度の差をどのように認識したか明確になる。

表 2　一対比較により得られる表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	勝	負
x_1	1	1/4	2	1/2	1/5	1	3
x_2	4	1	3	3	1/3	3	1
x_3	1/2	1/3	1	1/3	1/5	0	4
x_4	2	1/3	3	1	1/5	2	2
x_5	5	3	5	5	1	4	0

表 3　表 2 の項目順を変更した一対比較表

	x_5	x_2	x_4	x_1	x_3	勝	負
x_5	1	3	5	5	5	4	0
x_2	1/3	1	3	4	3	3	1
x_4	1/5	1/3	1	2	3	2	2
x_1	1/5	1/4	1/2	1	2	1	3
x_3	1/5	1/3	1/3	1/2	1	0	4

以下､このような変更が容易にできることを､第 2 節の 3 項目 x_1, x_2, x_3 の例で示す。

3 個の項目 x_1, x_2, x_3 を x_2, x_3, x_1 に並べ替える置換は $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ で与えられ､対応する

置換行列は$\Phi=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$である。実際$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_1\end{pmatrix}$である。この置換行列を利用して式（3.3）を得る。等式（3.3）は等式（3.1）からも得られる[8]：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{21}\\a_{32}&a_{33}&a_{31}\\a_{12}&a_{13}&a_{11}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.\end{aligned}\quad\cdots(3.3)$$

このように、初めに作成した一対比較行列について、各行（各列）に対応する項目を並べ替えるには、それら項目の並べ替えに注目して、それに対応する置換行列をもとの一対比較行列の左右から乗じれば良いことが分かる。この事実から、項目の順番を変更した一対比較行列を作成することは容易であり、実用的であることが分かる。

たとえば Excel を使えば次の手順により並べ替えることができる。変更前の行列を B、変更後の行列を A とする：

（置換手順 1）B の行に関して、勝ち数が多い順に上からコピー&ペーストすることで新規に行列 B’を作る。
（置換手順 2）行列 B’の列に関して、行に対応する項目の順番に合わせて、左から順にコピー&ペーストすることで新規に行列を作る。この行列が A となる。

表 2 から表 3 を得るためには、まず表 2 の行に関して勝ち数の多い順に上らか並べ替え表 4 を得る。次に表 4 の列に関して行で並べ替えた順に項目を並べ替えることで表 3 が得られる。

表 4　表 2 の行の順番を勝ち数の多い順に入れ替えた表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	勝	負
x_5	5	3	5	5	1	4	0
x_2	4	1	3	3	1/3	3	1
x_4	2	1/3	3	1	1/5	2	2
x_1	1	1/4	2	1/2	1/5	1	3
x_3	1/2	1/3	1	1/3	1/5	0	4

４．　一対比較の簡便法について

一対比較行列の主固有ベクトルから算出される重要度に関して、一対比較する項目の並べ替えによる影響はないことを第 2 節で示した。第 3 節では、勝ち数の多い順に並べることで矛盾を引き起こす一巡三角形を含まないか容易に観察できることを示した上で、勝ち数の多い順に並べ替えることは容易であり実用的であることを示した。

本節ではこれらを踏まえ、AHP の一対比較の簡便法を提案する。それは以下である：

（手順 1）一対比較で「より重要」である項目を順次選ぶことで、重要度の大きさに関して順位を決める。重要度が大きい順に一対比較行列の第一行から配置する。
（手順 2）順位が低い項目に対し、それより上位にある項目がどれくらい重要か 1−9 尺度で回答することで一対比較行列を完成させる。

例.「サービス向上のためのプロジェクトの選定」に関して、5 つの評価基準「信頼性」「反応性」「確実性」「有形性」「共感性」の一対比較行列を求める。

（手順 1）一対比較を繰り返すことで、一般的な並べ替えのアルゴリズムにより重要度の高い順に項目を順位付けする。ここでは、重要度の高い順に「共感性」「確実性」「信頼性」「有形性」「反応性」を得たとする。このとき、表 5 のようにまとめる。

表 5　5 つの評価基準の重要度に関する順位表

	共感性	確実性	信頼性	有形性	反応性	勝	負
共感性	1	⑩	⑨	⑦	④	4	0
確実性		1	⑧	⑥	③	3	1
信頼性			1	⑤	②	2	2
有形性				1	①	1	3
反応性					1	0	4

（手順 2）表 5 の①より順に⑩まで 1−9 尺度により回答していく。たとえば「有形性（上位項目）は反応性（下位項目）よりどれくらい重要か」という質問に回答していく。対角成分より下の成分は、表 1 に従って対応する成分の逆数を記入する。

さて、AHP における一対比較の手順は以下のようである。2 項目に対して、次の質問を続けて行う（たとえば Saaty（1996））:
質問 1．2 つの項目のうち、どちらがより重要ですか。
質問 2．それはどれくらい重要ですか。

従来の一対比較では、直観や経験を頼りにするために、無作為に選んだ 2 項目に対して上記の質問とその回答を積み重ねていくことで、回答する際に考えられるバイアスを除外する働きがある。その一方で、回答者は項目間の重要度の推移性を意識する

あまり（自分自身の一貫性に自意識過剰傾向になる）必要以上に労力を必要とすしたり、反対にいい加減に回答してしまうなどの問題が挙げられる。

また、一巡三角形のような矛盾関係がどれくらい含まれているか知らされないまま算出された重要度のみフィードバックされるなど、得られた重要度に対する回答者の納得感や満足度が十分に満たされないことも少なくない。

これらの視点から、本論文で提案するように、まず重要度の高い順に一次元的に並べてしまうことは有用といえる。実際、本論文が提案する手法では、先に項目の並べ替えのアルゴリズムにより項目を一次元的に順序付けるため一巡三角形に気を配る必要がなくなる。第 3 節で提案した一対比較行列の成分の並べ替えは、むしろ、他の一対比較表と比較するために項目を揃えることを目的に活用されることになる。

心理学や官能検査などのように、一対比較する順番を重要視する分野もある。AHP はあくまでも意思決定者、意思決定支援者、あるいは評価者の意思を尊重しているところが他の一対比較と異なる。このことは、たとえば C.I.が大きい数値の場合、一対比較行列を修正してでも採用するところに現れている[9]。

５． まとめ

AHP における一対比較は､AHP が直観や経験を組み込める意思決定法であるという特徴を担保する技法である｡しかしながら､ある項目の下位にある項目の数が多い場合、評価者に精神的にも肉体的にも多大な負担を強いることになる。

また､得られた一対比較表の整合度が悪い場合（たとえば C.I.が 0.3 を上回る場合）､評価者にやり直してもらうことになったり、最悪の場合は得られた結果を破棄しなければならないこともある。評価者とは無関係に修正する方法も提案されているが、そのように修正された一対比較結果を評価者は自分の直観や経験を生かした手法として受け入れられるかという別の問題も発生する。

本論文では、回答者の負担を軽減するとともに、算出される重要度に対する納得感を高めることを目的とした一対比較の簡便法を提案した。その過程で、一般に固有ベクトル法と呼ばれる枠組みで問題となる、一対比較行列とそれにより算出される重要度との独立性について証明した。

本論文で提案した方法は、項目の重要度による順序を重要視していることから、結果に対してより納得感が求められる集団意思決定場面で役立つと考えられる。集団意思決定の場面で使うための手順については、残された課題とする。

---

[1]Ishizaka＆Nemery（2013）では近似法（Approximate method）、幾何平均法（Geometric mean）と並列して固有値法（Eigenvalue method）という名称を使用している。

[2]代替案の増減による代替案の順位逆転現象は AHP の構造上の問題であり、これをもって AHP を欠陥ある手法と非難する研究者も少なくない。しかし、これは、相対評価が内蔵する本質的な性質といえる。なお、代替案が増減する場面に直面しない限りは考慮する必要もない。

[3]より一般的に固有ベクトル法（Eigenvector methods）と呼ばれる方法に付随した問題である。
[4]幾何平均法など、項目の重要度を一対比較行列の対応する行にある成分だけから算出する場合、このような問題は起こらない。項目数が 3 の場合、固有ベクトル法と幾何平均法は全く同じ結果になることが知られているため､4 個以上の場合を取り上げるべきだが､簡単のために n=3 とした。
[5]「AHP での重要度の算出には正の主固有ベクトルを用いる」とするなら､この議論は必須である。
[6]AHP では評価の二重基準、評価者の誤判断、誤回答、誤記入などで、心理学では差が閾値を下回るために起こるなどと考える。野球や相撲などの競技では珍しくない。
[7]勝ち数による順位と固有ベクトル法による順位の関係は明らかになっていない。
[8]置換行列は一般には $C^{-1} \neq C$ であるから、第 2 節では互換を表す置換行列に分解した。
[9]官能検査における一対比較では、一巡三角形の関係を多く含む場合、評価者に評価能力が無い、あるいは評価対象物は一次元的に並べることができないと判断される。

参考文献

1. Ishizaka, A. and Nemery, P.（2013）, *Multi-criteria Decision Analysis: Methods and Software*, Wiley.
2. 飯田洋市（2007）, “AHP における一対比較法に関する一考察－官能検査における一対比較法の利用－”, 信州大学人文社会科学紀要, 第 1 号, 18-36.
3. 飯田洋市（2008）, “AHP における一対比較表の表記法に関する提案”, 信州大学人文社会科学紀要, 第 3 号, 192-205.
4. Iida, Y. （2010）, Standardizations and notation of a pairwise comparison matrix in the AHP, Journal of Japanese Symposium on the Analytic Hierarchy Process, No.2, 85-93.
5. 木下栄蔵（2000a）,『入門 AHP　決断と合意形成のテクニック』日科技連出版社.
6. 木下栄蔵編著（2000b）,『AHP の理論と実際』日科技連出版社.
7. 小山昭雄（2010）,『新装版　経済数学教室 4 線型代数と位相　下』岩波書店.
8. Saaty, T.L.（1980）, *The Analytic Hierarchy Process*, New York: McGraw-Hill.
9. Saaty, T.L.（1996）, *The Analytic Network Process: Decision Making with Dependence and Feedback*, Pittsburg: RWS Publications.
10. Saaty, T.L.（2001）, *Fundamentals of Decision Making with the Analytic Hierarchy Process, paperback, Second Edition*, Pittsburg: RWS Publications.
11. 高萩栄一郎・中島信之（2005）,『Excel で学ぶ AHP 入門－問題解決のための階層分析法』オーム社.
12. 刀根薫（1986）,『ゲーム感覚意思決定法 - AHP 入門 - 』日科技連出版社.

（諏訪東京理科大学 経営情報学部 教授
信州大学 全学教育機構 非常勤講師）

2016 年 1 月 12 日受理　2016 年 2 月 8 日採録決定