

四則演算の概念的理解に関する研究

天岩 静子

小学生においては、計算で答を出せることと、計算の概念的理解は必ずしも一致していない。計算の解き方（計算手続き）を知っていて正答を出すことができても、概念的理解が獲得されているとは限らない。

天岩・波多野（1983）は、小学3年生を被験者として、珠算で3桁の減算に正しく答えられる子ども（珠算の初心者と中級者）は、その計算過程の意味を理解しているかどうかについて検討を行った。調査は、インタビューによって、減算手続きの意味を、1)あるステップでの活動は、その前にどのような条件があったためであるかを言える（5を斜めの線で消してあるのはなぜか）、2)表記と異なる真の属性やカテゴリーを言える（1と書いてあるが実は10である等）、3)普通は行わない手続きを用いるとしたら、どのようにしたらよいかを言える、の3点から調べた。結果として、珠算を用いて正答を出すことのできる中級者の中にも、上の位から借りる数が本当はいくつであるのか、百の位から借りた数は十の位と一の位にいくつずつ分割されるのかについて、はっきりと理解されていないケースのあることを見いだした。

Bryant ら（1999）は、5～7歳児を対象に、具体物を使ったり言語のみで提示する抽象的な6条件下において（ $a + b - b$ ）の逆転問題と（ $a + a - b$ ）のコントロール問題を提示して、彼等が加算と減算の関連性を理解しているかどうかを調べた。さらに、試行ごとにその試行中に何をしたのか説明するように求めた。その結果、低年齢群でも高年齢群でも、 $14 + 7 - 7$ のような逆転問題の成績の方が対応するコントロール問題（ $9 + 9 - 4$ ）の成績よりも高く、多くの者は逆転関係を理解していることが示された。インタビュー結果からは、特に高得点であった15人のうち8人だけがこの関係を明確に述べる事ができた。逆転関係を用いて課題を解くことができても、それをはっきりと意識し説明できる者は半数にすぎないことが示されたのである。

計算における概念的理解を促すためには、計算の意味を考えさせる経験を与えることが必要である。そのための方法として、2つのものが考えられる。第一はなぜ計算エラーが生じたのか、その理由を考えさせる方法、第二は各種計算の関連性を考えさせる方法である。

計算エラーの理由について考えさせる方法については、小学校3・4年生を対象とした天岩（1996, 1998）の報告がある。まず計算エラーの発見については、自分の計算結果よりも他の子どもが行ったエラーの方が誤りに気づき易く、他人の行った減算エラーを誤答と判断した場合、その85%はどの位で間違いをしたかを指摘することができ、さらに56%は、位だけでなく間違った数値を指摘したり、正しい数値を述べる事ができた。しかし、自分の計算結果については、誤りの判定率は50%程度と下がり、誤りをした理由の推定も4年生で50%にとどまっていた（表1）。

表 1 は、減算の 22、乗算の 18 の誤答について、誤りをした理由の指摘をまとめたものである。計算の誤りをした理由としては、「繰り上がり（繰り下がり）を間違えた」「ゼロがあると（繰り下がり）がよく分からなくなる」「この九九を間違ったから」等、繰り下がり（繰り上がり）や九九など計算の理解が不十分であることによると答えた者が多かった。

表 1 誤りをした理由の推定 (天岩, 1998)

理由	3年(ひき算)	4年(かけ算)
理由を述べる	3	9
急いだ・間違った	4	2
言及なし	15	7
総誤答数	22	18

概念的理解を促すためのもう一つの方法は、各種計算の関連性について考える経験を与えることである。本研究では、この方法に焦点を当てている。小学校では、四則演算についての関連性の理解は「検算」という形で指導されることが多い。「検算」によって、必然的に加算と減算、乗算と除算の結びつけが行われる。しかし、検算の理解も、小学 3・4 年生では不十分であることが示されている(天岩, 1998)。3 年生では、引算の検算として足し算をすると回答した者は 57%であったが、4 年生では、掛算の検算方法として、割算と答えた者は 29%にすぎなかった。そして、割算をすると答えた者の中に、どの数字をどの数字で割るのか答えられないなど正確な知識を持っていない者もあった。1 例についてインタビュー結果を示す(E は実験者、C は生徒を示す)。

C. Y. (4 年, No.1) 問題: 520×45

E: 答えがあっているかどうか確かめるやり方、ないかな?

C: ない。

E: じゃ、この答えがあっているかどうか、知りたかったらどうするの?

C: ...もう一回やる。

E: もう一回やるのね? 他に、なにかやり方ないかな?

C: ...わり算。

E: わり算。どれとどれを割るの?

C: 520 割る 45。

E: 520 割る 45 をやるの?

C: うーん、違う。

E: 違うの?

C:

E: どれをどれで割るの?

C:

E: 520 割る 45 でないとすると、どうやるの?

C: 答えを割る。

- E：答えを割る？
 C：520 割る・・・
 E：答えはこれね。23,400 割る 520 でいいの？
 C：・・・・・・・・・・
 E：分からない？
 C：・・・
 E：23,400 割る 45 でいいの？
 C：・・・
 E：分からない？
 C：うん。

本研究の目的は、小学生が四則演算（加算，減算，乗算，除算）についてどのような概念的知識を持っているかを明確にし，その知識が「検算」の理解とどのように関連しているかを検討することである。四則演算の概念的理解については，1) 減算での繰り下がりの意味に関する問題（例：百の位から借りた数はどの位に行くのか，その位に行った数はいくつなのか），2) 減算，乗算，除算の分解に関する問題（例：704-235 の答は，704 から 200 を引いて，その答から 30 を引いて，その答から 30 を引いて，その答から 5 を引いた，最後の答と同じになるかどうか， 58×62 の計算は， 58×60 と 58×2 の計算をしてから，全部の答をたせばいいかどうか），3) 減算，乗算，除算の簡易計算をした場合に後からつけるゼロの数に関する問題（例： 500×340 の計算は， 5×34 の答の後に，ゼロを 2 個つけばいいかどうか， $2840 \div 40$ の計算は， $284 \div 4$ の計算をして後からゼロを 2 個つけばいいかどうか）の 3 種類であった。3 年生の場合は，乗算・除算問題の難易度を低くした。

検算については，3 年生では加減乗除算の検算方法，4・5 年生では乗算と除算の検算方法を，式だけ書くようにさせた。

方 法

1. 被験者

被験者は，長野市内の公立小学校の 3 年生～5 年生，計 126 名であった（表 2）。

表 2 被験者の構成

学年	男子	女子	合計
3	20	22	42
4	21	25	46
5	17	21	38
合計	58	68	126

2 課題と手続き

児童に用紙を配布して，計算能力の測定については緩い時間制限を設け，計算の概念的理解，検算方法に関する問題については，実験者が問題を 1 問ずつ読み上げ，ほぼ全員があ

てはまる箇所に丸をつけたり数字を書き込み終えてから、次の問題に進むというやり方をとった。減算と乗算の時間制限はいずれも10問毎に4分、除算は5分であった。3年生の乗算については6問で3分とした。制限時間内で出来なかった子どもについては、それぞれ1分間の延長を認めた。

A 計算能力の測定----3年：減算テスト10問，乗算テスト6問

4・5年：乗算テスト10問，除算テスト10問

3年：減算テスト

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
241	417	701	625	917
<u>-187</u>	<u>-368</u>	<u>-252</u>	<u>-226</u>	<u>-288</u>
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
405	740	925	904	500
<u>-188</u>	<u>-342</u>	<u>-458</u>	<u>-208</u>	<u>-297</u>

3年：乗算テスト

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
39	26	40	80	96	70
<u>×65</u>	<u>×40</u>	<u>×78</u>	<u>×58</u>	<u>×40</u>	<u>×40</u>

4・5年：乗算テスト

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
239	500	906	840	408
<u>×65</u>	<u>×79</u>	<u>×40</u>	<u>×73</u>	<u>×78</u>
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
520	509	706	293	800
<u>×45</u>	<u>×30</u>	<u>×23</u>	<u>×54</u>	<u>×58</u>

4・5年：除算テスト

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
16 $\overline{)288}$	30 $\overline{)7350}$	25 $\overline{)900}$	24 $\overline{)408}$	34 $\overline{)1054}$
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
17 $\overline{)3400}$	22 $\overline{)902}$	35 $\overline{)420}$	10 $\overline{)3010}$	50 $\overline{)4100}$

B 計算の概念的理解，検算方法に関する課題

3年生用と4・5年生用の課題を作成した。以下の課題は課題内容ごとにまとめて示してあるが，実施に際しては課題内容を混ぜて，同一内容が続かないように配慮した。

3年生に対する問題

(1) 減算での繰り下がりの意味に関する問題

$$607$$

$\underline{-119}$ の計算で，百の位からかりるかすはいくつですか？ ()

百の位からかりた数は，どこにいくのですか？

() 全部一の位にいく --- その数は ()

() 全部十の位にいく --- その数は ()

() 一の位と十の位にいく --- その数は一の位に ()

十の位に ()

() わからない

(2) 減算・乗算の分解に関する問題

$$413$$

$\underline{-294}$ の問題を，下のように計算しても----- () よい

() わるい

() わからない

$$413$$

$$\underline{-4}$$

$$409$$

$$\underline{-90}$$

$$319$$

$$\underline{-200}$$

$$704$$

$\underline{-235}$ 704ひく235の答えは，704から200をひいて，その答えから30をひいて，その答えから5をひいた，さいごの答えと----- () 同じになる

() ちがう

() わからない

$$58$$

$\underline{\times 62}$ の計算は 58×60 と 58×2 の計算をしてから，ぜんぶの答えをたせば

----- () よい

() わるい

() わからない

(3) 減算の簡易計算後につけるゼロの数に関する問題

$$\begin{array}{r} 820 \\ - 560 \\ \hline \end{array}$$
 の計算は、
$$\begin{array}{r} 82 \\ - 56 \\ \hline \end{array}$$
 の答えのあとにゼロを1個つけば―― () よい
 () わるい
 () わからない

(4) 検算方法に関する問題

$$\begin{array}{r} 691 \\ + 48 \\ \hline 739 \end{array}$$
 の答があっているかどうかをたしかめるときは、どのような計算をしますか。
 式だけをかいて下さい。やり方がいくつかあったら、みんなかいて下さい。
 式： _____
 式： _____
 式： _____

$$\begin{array}{r} 491 \\ - 378 \\ \hline 113 \end{array}$$
 の答があっているかどうかをたしかめるときは、どのような計算をしますか。
 式だけをかいて下さい。やり方がいくつかあったら、みんなかいて下さい。
 式： _____
 式： _____
 式： _____

$14 \times 23 = 322$ の答をたしかめるときはどのようにしますか？ 式だけをかいて
 下さい。やり方がいくつかあったら、みんなかいて下さい。
 式： _____
 式： _____
 式： _____

$$\begin{array}{r} 64 \\ 2 \overline{) 128} \\ \underline{12} \\ 8 \\ \underline{8} \\ 0 \end{array}$$
 の計算の答をたしかめるときはどのような計算をしますか？ 式を
 かいてください。

4・5年生に対する問題

(1) 減算での繰り下がりの意味に関する問題

$$\begin{array}{r} 607 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$
 の計算で、百の位からかりるかずはいくつですか？ ()

7400 ÷ 37 の答は、74 ÷ 37 の計算をして後からゼロを 2 個つければ

----- () よい () わるい () わからない

2840 ÷ 40 の答は、284 ÷ 4 の計算をして、後からゼロを 2 個つければ

----- () よい () わるい () わからない

(4) 検算方法に関する問題

14 × 23 = 322 の答をたしかめるときはどのようにしますか？ 式だけをかいて

下さい。やり方がいくつかあったら、みんなかいて下さい。

式： _____

式： _____

式： _____

$$\begin{array}{r} 12 \\ 36 \overline{) 432} \\ \underline{36} \\ 72 \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

の計算の答をたしかめるときはどのような計算をしますか？ 式をかいてください。やり方がいくつかあったら、みんなかいて下さい。

式： _____

式： _____

式： _____

3. 得点化

概念的理解については、正答に対して1点を与えた。検算では、3点：逆算(減算では加算、乗算では除算等)を書いた場合、2点：数字の位置を入れ換えて同じ計算をした場合(例：491-378=113の問題で491-113, 314×23=322の問題で23×314)、1点：同じ計算を再度行った場合、0点：誤答・無答とした。なお、複数の検算方法をあげた場合は、得点の一番高いもので配点を行った。

結 果

1. 計算能力と概念的知識・検算能力間の関連性

学年により課題内容がいくぶん異なっていたので、学年毎に各種計算の成績と概念的知識・検算能力間の相関を求めた。

3年生では、減算テストの成績と有意な相関を示したものは「減算で上の位から借りる数 (r=0.35)」「除算の検算 (r=0.49)」で、乗算テストと有意な相関を示したものは「減算でのゼロの数 (r=0.39)」「減算の分解 1 (r=0.39)」「除算の検算 (r=0.38)」であった。4年生では、乗算テストの成績と有意な相関を示したものは「乗算の検算 (r=0.34)」で、除算テストの場合は「減算の分解 2 (r=0.32)」「乗算でのゼロの数 (r=0.39)」「乗

算の検算 ($r=0.31$)」であった。5年生では、乗算テストの成績と有意な相関を示したものはなく、除算テストと有意な相関を示したものは「乗算の分解 ($r=0.44$)」「乗算の検算 ($r=0.36$)」「除算の検算 ($r=0.43$)」であった。

各学年ともに、計算能力と概念的知識の関連性は低いことが明らかになった。計算テストの成績は、概念的知識よりも各種の検算能力と結びついており、3年生では減算及び乗算能力と除算の検算が、4年生では乗算及び除算能力と乗算の検算が、5年生では除算の成績と乗算の検算及び除算の検算が関連していた。

2. 概念的知識と検算能力の関連性

概念的知識の得点差が検算能力に影響するかどうかを確認するために分散分析を行い、以下の結果を見出した。

3年生について

3年生に対して質問した検算は、加算、減算、乗算、除算の4種類であった。表3は分散分析の結果であるF値を示したもので、検算に対して有意な主効果をもたらした概念的知識(減算の繰り下がり)には*印をつけてある。「上の位から借りる数はいくつか」の理解レベルは、除算の検算 ($F(1,40)=6.53, p<.05$) に対して、「減算で、下の位に行った数は(それぞれ)幾つか」の理解は、加算及び乗算の検算 ($F(2,39)=5.15, p<.05, F(2,39)=4.08, p<.05$) に対して、それぞれ有意な効果を示した。減算の分解やゼロの数の処理についての理解は、各種の検算に対して影響を及ぼしていなかったため、表には載せなかった。減算の繰り下がりについて正確な知識を持っているか否かが、各種の検算の遂行に影響を及ぼしていることが示された。

表3 3年生における概念的知識(減算の繰り下がり)と検算の関連性(F値)

	検算			
	加算	減算	乗算	除算
借りる数はいくつか	1.94	0.77	1.54	6.53 *
どこへ行ったか	3.47	2.69	0.29	2.27
下の位に行った数は	5.15 *	2.64	4.08 *	1.08

また、3年生では、加算の検算得点が、減算・乗算・除算の検算に対して有意な効果を示していた ($F(3,38)=10.77, p<.01, F(3,38)=13.96, p<.01, F(3,38)=2.98, p<.05$)。加算の検算能力のレベルが、他の検算に影響をしていることから、加算と減算という計算の基礎的な関係を理解することの重要性が改めて確認された。

4・5年生について

学年の主効果が認められたのは除算の分解に関する問題1問だけであったので、この1問を除いて、4・5年生をあわせて分析した。4・5年生の場合、調査したのは乗算と除算の検算についてであった。これらの検算に対して減算の概念的知識レベルがどのように影響するかを分散分析結果から示したものが表4である。主効果のみられた減算の繰り下がりに関する項目と減算の分解に関する項目に関してF値を載せてある。「上の位から借りる数

はいくつか」の理解が、乗算の検算 ($F(1,82)=5.23, p<.05$) に対して、「減算の分解 2」が除算の検算 ($F(1,82)=19.20, p<.01$) に対して有意な効果を示した。

表 4 4・5 年生における概念的理解 (減算の繰り下がり及び分解の理解) と検算の関連性 (F 値)

	検 算	
	乗算	除算
借りる数はいくつか	5.23 *	2.22
どこへ行ったか	0.01	0.16
下の位に行った数は	2.13	1.73
減算分解 1	0.17	0.99
減算分解 2	0.67	19.20 **

3 つの学年に共通する乗算及び除算の検算に限っても、検算と関連性をもつ概念的理解の内容に一致は見られない。関連性について年齢的な変化があるという可能性もあるが、一致がみられない理由ははっきりしない。しかし、検算と減算の繰り下がりや分解に関する知識が関係していることは間違いがない。減算についての概念的理解は、各種検算の理解に関する重要な基礎知識となっていることが推定される。

考 察

本研究における概念的理解の課題内容は、(1) 減算での繰り下がりの意味について (2) 各種計算の分解について、(3) 簡易計算をした場合のゼロの数について、であった。本研究の結果からは、a) 概念的理解のレベルは計算テストの成績にあまり関係していないこと、b) 計算テストの成績には、検算能力の方が大きく関係していること、c) 概念的理解の中で、減算の繰り下がりや分解に関する知識が、各種検算能力に深く関係していること、d) 加算の検算能力が、減算・乗算・除算の検算能力に関係していること、が明らかになった。これらの中で特に興味深い発見は、各種検算能力の基礎としての、「減算の繰り下がりに関する理解」の重要性である。減算の繰り下がりに関する理解は、加算、乗算・除算の検算能力にむすびついていた。

「繰り下がりの意味」を問う課題は、3 桁の減算 (607-119) に関するものであった。3 桁の減算で十の位がゼロである場合、隣から数を借りることが出来ないので計算の理解が難しくなる。2 桁の減算では、十の位から借りた数は 10 であり、そのすべてが一の位に移動する。移動した数は借りてきた 10 そのままである。ところが 3 桁の減算で十の位がゼロであれば、百の位から借りてこなくてはならない。百の位から借りた数はいくつであるのか、その数はどの位にどれだけ移るのかは大きな問題となる。また教師が繰り下がりをおぼろげに忘れないように小さく 1 と書く指導をすることも影響して、借りる数が 1 か 10 か 100 か明確ではなくなる。

このように 3 桁減算の繰り下がりの理解が難しいものであるために、この課題に正答する

ためには計算の仕組み自体の理解が正確なものであることが必要となる。そこで、これに正答できる児童は、各種検算の理解も正しくできるのであろうと考えられる。そしてこの傾向は、低学年の3年生だけではなく4・5年生における乗算の検算に関しても見いだされた。3年生で、加算の検算得点が引算、掛算、割算の検算に有意に関連していたことと合わせて、計算の関連性を理解させるためには、計算の基礎的理解が非常に大切であることが改めて指摘されたことになる。児童にとって加算の意味的理解はそれほど困難ではないが、多桁の減算を学ぶ段階で様々な「つまずき」に出会う。一人一人のつまずきをいかに解消し、減算の仕組みについて正確な理解をさせるかが、その後の計算の理解にとって重要である。

本研究結果は、計算の手續きと計算手續きの意味の理解とを結びつける教授が必要なことを示しているが、そのためには、児童が自分で様々な計算の方法を見つけ、自分で仕組みに気づかせるような教授が意味を持つ。このような試みはこれまでもなされてきた。Lampert (1986) は、彼女自身が小学校4年生に対して1カ月にわたるかけ算の授業を行った。この一連の授業では、子どもに積極的に多くのかけ算方略を見つけるように促し、それぞれの方略のもつ意味について計算ステップごとに皆で検討して明確化し、そこに働くルールを理解させるものであり、大きな効果をもたらした。

また、Baroody (1999) は、4歳から7歳の児童を対象に、 $8-5=?$ $5+?=8$ のような補数関係の理解について実験をし、加算と減算の関連性の理解を促進させるためには、加算について確実な知識を持つことが大切で、そうすれば、一部の子どもは自発的に減算との結びつきに気づくようになることを報告している。

計算を解くには、計算手續きの知識と計算の意味的理解の両側面を獲得する必要がある。小学校では、確実な習得をめざして足し算、引算、掛算、割算を別個に教えるが、それに加えて足し算と引算の関連性、掛算と割算の関連性などを結びつける教授が是非とも必要であろう。それを検算として教えるだけでなく、子ども達自身が、学習した各種計算が別々のものではなく、どのような関係になっているのかを実感できなければならない。

教育は、前に学習したことが次の学習に転移することを前提として行われる。例えば、一度繰り返り下がりの意味について学習すれば、その後もその理解は保持されているとみなが、そのためには、教えられた内容の理解が十分でなければならない。一人一人の誤りに注目した概念的・理解についての指導が是非とも必要である。

文 献

- 天岩 静子・波多野 誼余夫 1983 減算手續きと意味理解の関連性
日本心理学会第47回大会発表論文集 570
- 天岩静子 1996 計算におけるモニタリング能力の獲得過程と教育効果
平成6～7年度科学研究費補助金(一般C, 課題番号:06680242)研究成果報告書
- 天岩静子 1998 計算過程のモニタリングと検算能力 ---小学3・4年生を対象として---
信州大学教育学部紀要 第93号 103-113

- Baroody, A.J. 1999 Children's Relational Knowledge of Addition and Subtraction. *Cognition and Instruction*, 17, 137-175.
- Bryant, P., Christie, C. & Rendu, A. 1999 Children's Understanding of the Relation between Addition and Subtraction: Inversion, identity, and Decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 194-212.
- Lampert, M. 1986 Knowing Doing and Teaching Multiplication. *Cognition and Instruction*, 3, 305-342.

付記

調査にご協力下さった小学生の皆様並びに先生方に、厚く御礼申し上げます。

(本研究は、平成 10～11 年度文部省科学研究費補助金 (基盤研究 C, 研究代表者: 天岩静子, 課題番号: 1068026) による研究で得られたデータの一部を分析したものである。)

(2000年 5月25日 受理)