計算数理工学論文集 Vol. 7, No.2 (2008 年 3 月), 論文 No. 15-080317 JASCOME

Lattice Kinetic スキームを用いた二次元チャンネル乱流の再層流化現象の解析

NUMERICAL ANALYSIS OF RELAMINARIZATION IN PLANE POISEUILLE FLOW USING THE LATTICE KINETIC SCHEME

吉野　正人 1), 関　大輔 2), 田中　義人 3), 松原　雅春 4)

Masato YOSHINO, Daisuke SEKI, Yoshito TANAKA and Masaharu MATSUBARA

1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: masato@shinshu-u.ac.jp)
2) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: t06a116@shinshu-u.ac.jp)
3) 信州大学大学院総合工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: s07t254@shinshu-u.ac.jp)
4) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: mmatsu@shinshu-u.ac.jp)

Numerical simulations of relaminarization from turbulence in plane Poiseuille flow are carried out using the lattice kinetic scheme which is an improved method of the original lattice Boltzmann method. Calculated turbulent energy in the relaminarization shows exponential decay for $600 \leq \mathrm{Re} \leq 1230$, where Re is the Reynolds number based on the streamwise velocity at the centerline and the half width of the channel. Also, a half-lifetime of turbulence is calculated. The inverse of the half-lifetime decreases exponentially up to $\mathrm{Re} \approx 1000$ and over the value it gradually approaches zero. The present results indicate that process of relaminarization in plane Poiseuille flow can have similarity to that in pipe flow investigated by previous research work.

Key Words: Lattice Kinetic Scheme, Relaminarization, Turbulent Channel Flow, Half-Lifetime of Turbulence

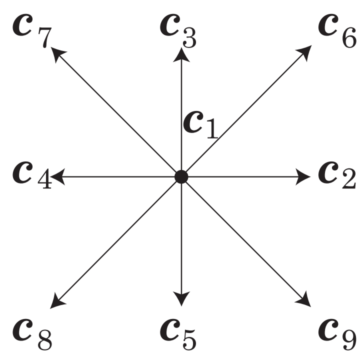
1. はじめに

層流から乱流への遷移および再層流化を調べることは，乱流熱伝達を評価したり，乱流の力学機構の解明といった観点から学術的にも工学的にも重要である．そのため，このような問題に関する理論的，実験的ならびに数値解析のアプローチによる研究がこれまでに数多く行われてきた [(1)∼(4)]．

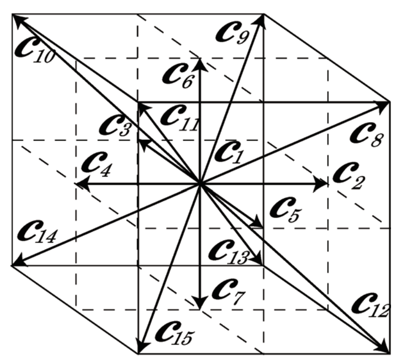
一般的には，流れがいったん層流から乱流へ遷移すると，定常状態である限りその乱流は無限に維持されると考えられているが，Hof ら [(5)] は，数値解析および実験から，比較的流速の遅い場合ではせん断流における乱流は持続的なものではなく過渡的なものであり，乱流の持続時間は指数関数的分布を持つということを報告している．これを裏付ける一つの結果として Faisst and Eckhardt[(6)] は，円管内流れの直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation, 以下 DNS と略記する) により，異なる振幅を持つ多数の撹乱に対して乱流の持続時間が無限大に発散せず，指数関数的に増加することから乱流の持続時間が有限であることを示した．一方，Peixinho and Mullin[(7)] は，円管内乱流の再層流化実験において，局所的な乱流である平衡パフの観測確率を詳細に調べることにより，乱流の持続時間が指数関数的分布を持つこと，ならびにパイプ直径および中心流速に基づくレイノルズ数が 1750 ± 10 において，半減期が無限大に限りなく近づくことを示した．これらの研究成果は，せん断流における低レイノルズ数乱流が過渡的な状態であるということを支持するものであるが [(8)]，円管内流れとクエット流 [(9)] を除いては数値解析，実験の両面においてその報告例は少ない．そのため，上記の事実がせん断流全体（例えばチャンネル流など）で見られる普遍的な現象かどうかについて，現時点で結論を出すには至っていない．

ところで，チャンネル乱流をはじめとする多くの遷移・乱流計算においては，空間の離散化にスペクトル法を用いた DNS により計算が行われることが多い [(3)(10)]．これらの手法は，比較的高い精度が得られるという利点を持つ反面，アルゴリズムが難解であり，境界条件の取り扱いが複雑である．さらに，高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform, FFT) を多用するために，計算時間が長くかかるという短所も併せ持つ．これに対し，近年，気体分子運動論に基づく計算手

2008 年 1 月 15 日受付，2008 年 2 月 6 日受理



(a)



(b)

Fig. 1 Lattice gas models used in the present study: (a) 9-velocity model; (b) 15-velocity model.

法として提案された格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, 以下 LBM と略記する)(11)∼(13) は，非圧縮性流体に対しても従来の数値解法のような圧力を求める工夫が必要ないためアルゴリズムが簡単であり，また並列計算にも適しているという特徴を持ち，多孔質内流れや混相流などの複雑流れの計算に適用され成功を収めている．特に，Inamuro(14) により LBM の改良版として提案された Lattice Kinetic スキーム (以下 LKS と略記する) は，高レイノルズ数域での数値安定性の確保や計算機メモリーの削減など，通常の LBM における課題のいくつかを克服した新しい計算手法として注目されている．

そこで本研究では，二次元チャンネル乱流に対して LKS を用いた再層流化現象の数値解析を行うことを目的とした．また，乱れエネルギーに着目し乱流の持続時間を算出することによって，チャンネル乱流の持続時間とレイノルズ数との関係を調べることにした．

2. 数値計算法

使用する物理量はすべて，代表長さ L，粒子の代表速さ c，時間スケール $t_0 = L/U$ (U: 流れの代表速さ)，および代表密度 ρ_0 を用いて無次元化したものである (13)．格子気体モデルとしては，2 次元問題には 9 速度モデル，3 次元問題には 15 速度モデルを使用した (Fig. 1 参照)．各モデルにおける粒子の速度ベクトル $\boldsymbol{c}_i$ はそれぞれ，

$$[\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4, \boldsymbol{c}_5, \boldsymbol{c}_6, \boldsymbol{c}_7, \boldsymbol{c}_8, \boldsymbol{c}_9] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

および，

$$[\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4, \boldsymbol{c}_5, \boldsymbol{c}_6, \boldsymbol{c}_7, \boldsymbol{c}_8, \boldsymbol{c}_9, \boldsymbol{c}_{10}, \boldsymbol{c}_{11}, \boldsymbol{c}_{12}, \boldsymbol{c}_{13}, \boldsymbol{c}_{14}, \boldsymbol{c}_{15}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

で与えられる．以下の説明では，3 次元 15 速度モデルに対して行う．この速度モデルを用いた LKS では，時刻 t における格子点 $\boldsymbol{x}$ での流体の密度 ρ および流速 $\boldsymbol{u}$ が，それぞれ次のように定義される．

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{i=1}^{15} f_i^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_i \Delta x, t - \Delta t) \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{x}, t)} \sum_{i=1}^{15} \boldsymbol{c}_i f_i^{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_i \Delta x, t - \Delta t) \qquad (4)$$

ここで，f_i^{eq} は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} f_i^{\mathrm{eq}} \;=\; & E_i \rho \left[1 + 3 c_{i\beta} u_\beta + \frac{9}{2} c_{i\beta} c_{i\gamma} u_\beta u_\gamma - \frac{3}{2} u_\beta u_\beta \right. \\ & \left. + A \Delta x \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right) c_{i\beta} c_{i\gamma} \right] \end{aligned} \qquad (5)$$

ここで，$E_1 = 2/9$，$E_i = 1/9\,(i = 2, 3, \ldots, 7)$，$E_i = 1/72\,(i = 8, 9, \ldots, 15)$ である．式 (5) において，$\beta, \gamma = x, y, z$ であり (添字はデカルト座標系を表し，総和規約に従う)，$A = O(1)$ は粘性を決定するパラメータ，Δx および Δt はそれぞれ，格子間隔および時間刻みである．Δt は，粒子がちょうど隣の格子点まで移動する時間と等しくなるように選ばれ，$\Delta t = \mathrm{Sh} \Delta x$ ($\mathrm{Sh} = U/c$ はストローハル数) となる．

圧力 p と流体の密度 ρ には以下の関係がある．

$$p = \frac{\rho}{3} \qquad (6)$$

流体の動粘性係数 ν は，式 (5) 中の定数 A と Δx を用いて以下のように与えられる．

$$\nu = \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{9} A \right) \Delta x \qquad (7)$$

また，式 (5) の中に現れる流速の一階微分には，次の二次精度中心差分近似を用いた．

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} \approx \frac{1}{10 \Delta x} \sum_{i=2}^{15} c_{i\beta} u_\gamma (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i \Delta x) \qquad (8)$$

なお，漸近理論 (S 展開)(15) を用いると，LKS においても LBM の場合 (16) と同様に，非圧縮性粘性流体の流速および圧力を相対誤差 $= O[(\Delta x)^2]$ で計算できることが示されている (14)．

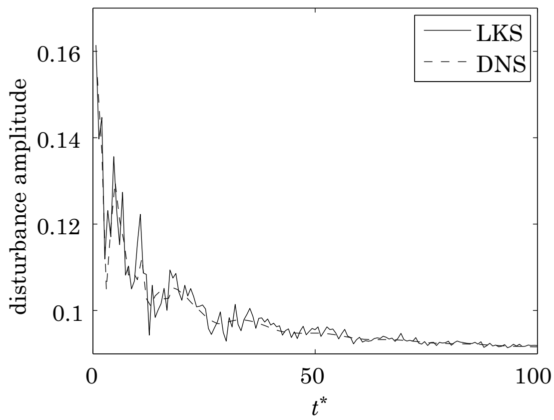


Fig. 2 Time evolution of the disturbance amplitude: —, present result by LKS; - - -, by DNS.

3. 計算結果および考察

3.1. 遷移過程の計算（二次元計算）

まず本手法を用いて，層流・乱流遷移過程の計算がどの程度正確に行えるかを確認するために，スペクトル法を用いたDNSとの比較を行った．計算は簡単のため，いずれも2次元領域 $L_x \times L_y = 2\pi\delta \times 2\delta$（$\delta$：チャンネル半幅）において行った．本研究では，二次元チャンネル流において固有値問題を解くことにより得られたOrr-Sommerfeld解[17]を初期値に用い，その撹乱振幅の時間変化を調べることで比較を行った．Orszag and Kells[10]はスペクトル法に基づくDNSを用いて平面ポアズイユ流およびクエット流に対して，これらの詳細な解析を行い多くの知見を得ている．このことから，同現象を用いて両計算手法を比較することはLKSの遷移過程計算の妥当性を評価するのに有用であると考えられる．DNSでは，流れ方向 (x 方向) にフーリエ・スペクトル法を適用しモード数を16とした．一方，流れ垂直方向 (y 方向) に対しては，チェビシェフ・コロケーション法を適用しモード数を33とした．その他DNSに用いた数値計算法の詳細は文献 (10) を参照されたい．LKSにおいては，上記領域を一辺 Δx の正方格子を用いて，x 方向に835，y 方向に265分割した．境界条件として，領域上下にはすべりなし境界条件，流入・流出口には圧力差 Δp を伴う周期境界条件を適用した．また，このときのチャンネル半幅 δ とチャンネル中心流速 U_c に基づくレイノルズ数Reは両者とも1000である．なお，LKSもLBMと場合と同様に圧縮性の効果による誤差が生じ，その大きさはマッハ数の二乗のオーダーであることがわかっている．よって以下のすべての計算では，この誤差をできる限り小さくするために，計算領域全体における流れ方向の流速 $|u_x|$ の最大値が0.1以下になるように Δp の値を与えた．

計算結果をFig. 2に示す．横軸は無次元時間 $t^* = tU_c/\delta$ であり，縦軸は撹乱振幅である．LKSとDNSとの結果を比較すると, LKSの方が振動的であるが，両者の結果は良好に一致することがわかる．このことから，LKSにおいても十分な格子数を用いることでスペクトル法に基づくDNSと同様，乱流への遷移計算に十分に有用な数値計算手法であると言える．

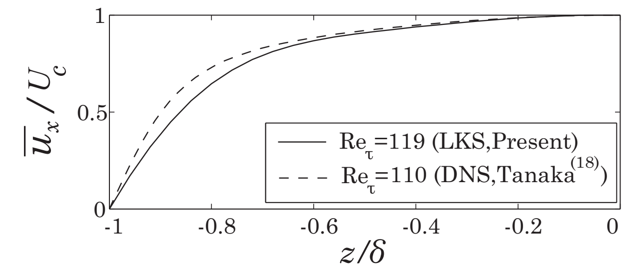


Fig. 3 Mean velocity profiles: —, present results; - - -, DNS results by Tanaka et al.[18]

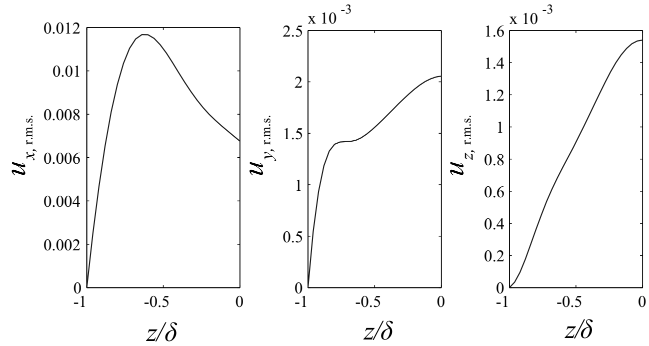


Fig. 4 Root-mean-square (r.m.s.) values of streamwise, spanwise and wall-normal velocities.

3.2. 遷移過程の計算（三次元計算）

計算領域を $L_x \times L_y \times L_z = 314\Delta x \times 156\Delta x \times 50\Delta x$ とし，入口面の中心を原点とする座標系を流れ方向に x, スパン方向に y，流れ垂直方向に z と定義する．境界条件は，領域の上下面にはすべりなし境界条件，領域側面には周期境界条件を適用した．また，流入・流出面に対しては圧力差を伴う周期境界条件を適用した．ここで，圧力差 Δp は，遷移過程における各時刻で流量が一定となるように与えた．時刻 $t = 0$ の初期条件として，平面ポアズイユ流の厳密解にその中心流速の0.4パーセントの振幅を持つ正弦波状撹乱を加えたものを固体壁以外の全領域に与え，流れを層流から乱流へ遷移させた．以下では，先に定義したレイノルズ数Reに加え，δ および壁面摩擦速度 u_τ に基づくレイノルズ数 Re_τ も適宜用いる．

計算結果として，$\mathrm{Re} = 3000$ ($\mathrm{Re}_\tau = 119$) のときの時間および空間平均された流速分布 $\bar{u}_x$ ならびに乱れ強さ $u_{x,\,\mathrm{r.m.s.}}$，$u_{y,\,\mathrm{r.m.s.}}$，$u_{z,\,\mathrm{r.m.s.}}$（各方向の流速のr.m.s.値）をそれぞれFig. 3およびFig. 4に示す．グラフ中の横軸は，δ を用いて無次元化した z 座標を表す．$u_{x,\,\mathrm{r.m.s.}}$ の分布は壁面寄りにピークを持ち，その他の $u_{y,\,\mathrm{r.m.s.}}$，$u_{z,\,\mathrm{r.m.s.}}$ に比較して大きな値を持つことがわかる．このことから，本計算結果が低レイノルズ数における壁乱流の一般的特徴をよく捉えていることがわかる．他の研究者による低レイノルズ数乱流のDNSの

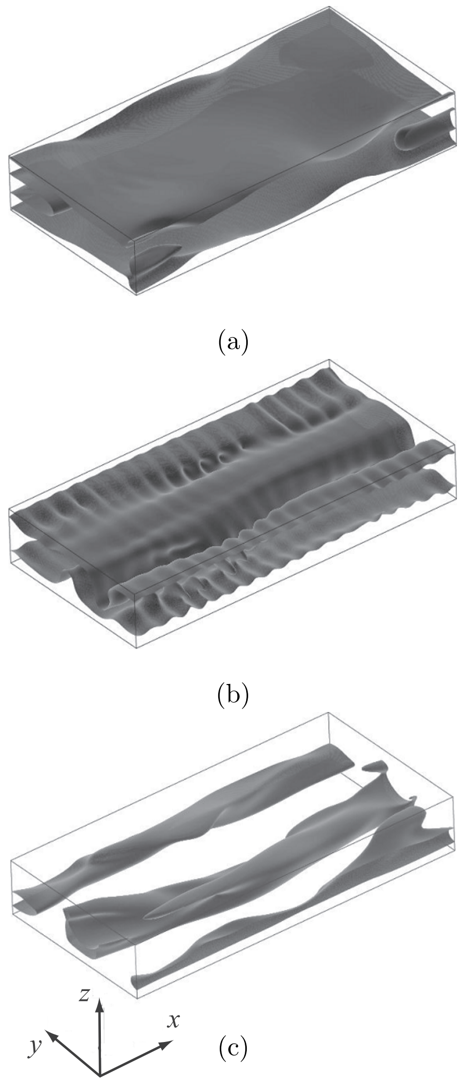


Fig. 5　Time evolution of iso-surface of streamwise velocity ($|u_x| = 0.065$) from laminar to turbulent flow: (a) $t^* = 4.48$; (b) $t^* = 403$; (c) $t^* = 806$ ($t^* = tU_{\mathrm{c}}/\delta$).

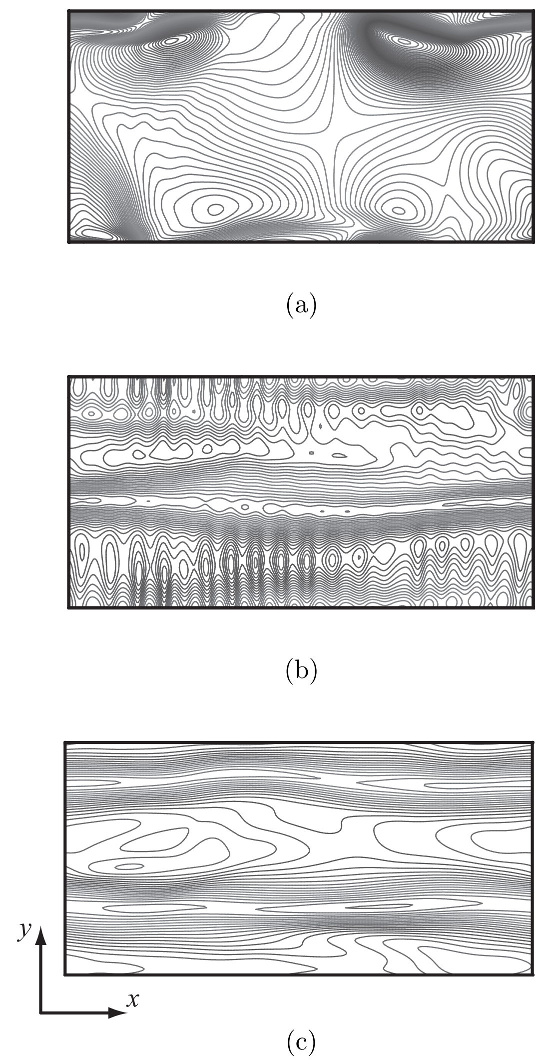


Fig. 6　Time evolution of contour of streamwise velocity on $z/\delta = 0.9$. The contour interval is 0.005: (a) $t^* = 4.48$; (b) $t^* = 403$; (c) $t^* = 806$ ($t^* = tU_{\mathrm{c}}/\delta$).

結果 [3] および乱れ強さの分布の実験結果 [2] と比較すると，本計算における壁面近傍の空間解像度が十分とは言えないため完全な一致は見られないが，乱れエネルギーに関してはその影響は小さいと予想され，本計算では妥当な結果が得られていると考えた．なお，ここで述べた空間解像度の問題に対しては今後，大規模領域の解析を行うための並列計算の実施，あるいは不等間隔格子の LBM[19] や任意形状のメッシュを用いた LKS[20] の適用など，壁面近傍における解像度を向上させるための対策が必要である．

次に，ある時刻における流れ場の様子を Fig. 5 および Fig. 6 に示す．ここで，Fig. 6 は Fig. 5 と同時刻における断面 $z/\delta = 0.9$ での流れ方向流速 u_x の等数値線図である．(a) $t^* = 4.48$ では，流れは初期撹乱と層流解に支配されており，特に Fig. 5 を見ると，まだ初期撹乱の影響が強く残っていることがわかる．(b) $t^* = 403$ では，流れ方向およびスパン方向に撹乱が成長している様子が確認される．また，Fig. 6 からは，図の中央付近に強い速度勾配を持った領域が形成されはじめていることがわかる．(c) $t^* = 806$ になると，流れ場中に二本の高速ストリークが確認できる．さらに，Fig. 6 においては，

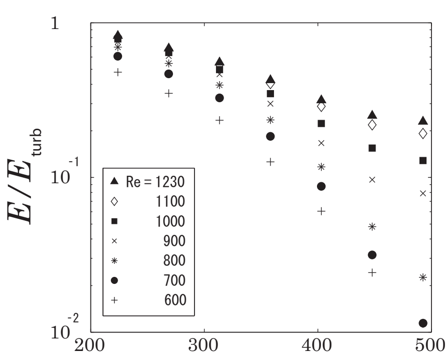


Fig. 7　Time variation of turbulent energy for different Reynolds numbers ($600 \leq \mathrm{Re} \leq 1230$). The data are plotted on semi-log scales ($t^* = tU_{\mathrm{c}}/\delta$).

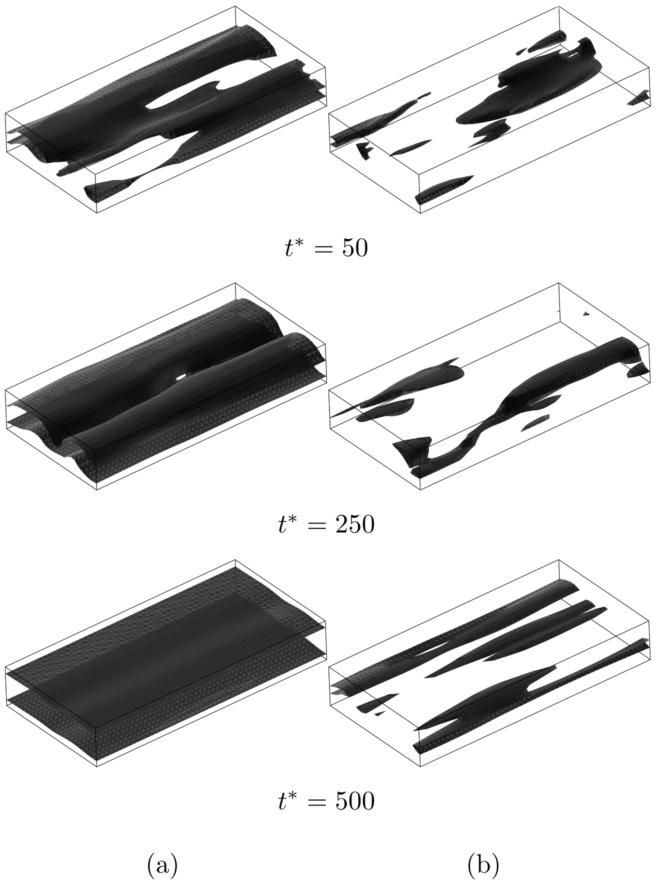
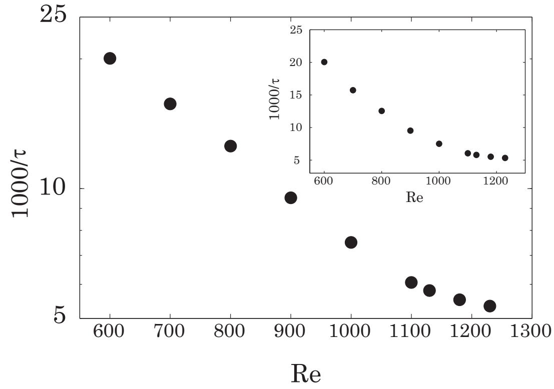
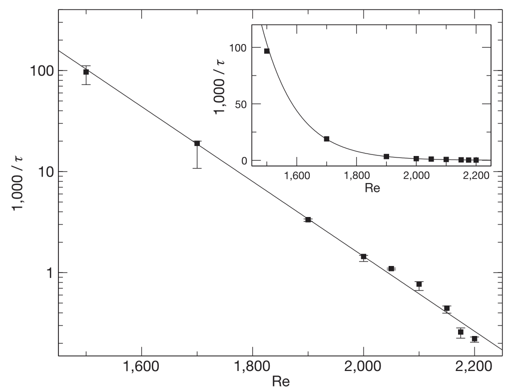


Fig. 8　Time evolution of iso-surface of streamwise velocity ($|u_x|$ = 0.013 and 0.027) in the relaminarization for different Reynolds number: (a) Re = 600; (b) Re = 1230 ($t^* = tU_{\mathrm{c}}/\delta$).



(a)



(b)

Fig. 9　Relation between the inverse of half-lifetime of turbulence and Reynolds number: (a) present result in channel flow; (b) numerical result in pipe flow by Hof et al.[(5)]

二本の高速ストリークの間に一本の低速ストリークが発達していることがわかる．以上より，$t^* = 806$ で十分に発達した乱流が得られたと考えた．なお，この遷移過程の計算を $t^* \approx 1300$ まで継続して実施したが，数値粘性による再層流化は起こらないことを確認している．このことから，LKS は二次精度のスキームであるが数値粘性による効果は非常に小さいと考えられ，以下の計算結果は物理的に妥当なものであると判断した．

3.3. 再層流化過程の計算

前節で得られた時刻 $t^* = 806$ におけるチャンネル乱流の結果を初期値とし，粘性を瞬間的に増加させることでレイノルズ数を Re = 600〜1230 の範囲に変化させ，再層流化現象の計算を行った．Fig. 7 は，この変化を施したことによる過渡状態後において，乱れエネルギーの時間変化を各レイノルズ数に対して片対数プロットしたものである．横軸は無次元時間 $t^* = tU_{\mathrm{c}}/\delta$ であり，再層流の開始時刻をあらためて $t^* = 0$ としている（つまり，以下の無次元時刻は，粘性を瞬間的に増加させてからの時間を意味する）．一方，縦軸は乱れエネルギー E/E_{turb} を表している．ここで，E_{turb} は初期値に用いた乱流の乱れエネルギーである．このグラフより，乱れエネルギーが時間とともにほぼ指数関数的に減衰していることがわかる．また，レイノルズ数の増加に伴い，その傾きは緩やかになることがわかる．これは，レイノルズ数の増加とともに流れは乱流の維持が容易となるため，乱れエネルギーの散逸が行われにくくなることが要因と考えられる．また，このような指数関数的減少は，Peixinho and Mullin[(7)] による円管内乱流の再層流化実験における平衡パフの時間変化と同様であり，乱流の持続時間がレイノルズ数の増加とともに増大するという点でも，定性的に一致する結果が得られている．次に，Fig. 8 に Re = 600 および 1230 に対する流れ方向速度の等数値面を $t^* = 50, 250, 500$ の各時刻において示す．いずれのケースにおいても，乱れは減少し層流状態へ向かっていることが確認できる．ここで，Re = 600 では，$t^* = 500$ においてほとんど再層流化していることがわかる．これに対し，Re = 1230 では，時刻が経過して $t^* = 500$ になってもまだ乱流状態が維持されていることがわかる．前述の乱れエネルギーの時間変化がレイノルズ数の増加につれて緩やかに変化していくという事実は，この結果からも確認することができる．

最後に，乱れエネルギーの半減期 τ を計算した．半減期 τ は，Fig. 7 のデータに対して最小二乗近似を施し，得られた傾きの絶対値（減衰率）α を用いて $\tau = (\log_{10} 2)/\alpha$ で求め

た．半減期τの逆数を各々のレイノルズ数に対してプロットしたものを Fig. 9 に示す．Fig. 9 (a) より，Re = 600〜1230 の範囲においてはτ^{-1}が指数関数的に減少し 0 に漸近している．なお，比較のために，Hof ら[5]が DNS により行った円管内乱流の再層流化現象の解析結果を Fig. 9 (b) に示す．これらの図から，両者は良く似た傾向を示しており，円管内乱流とチャンネル乱流の間には再層流化の過程に類似性があるものと考えられる．ただし，τが大きくなった場合のデータにはその見積もりに不確定な要素があり，この付近のτについての関数を決定するにはさらなる解析が必要である．

4. おわりに

格子ボルツマン法に基づく Lattice Kinetic スキームを用いて，チャンネル乱流の再層流化現象の数値シミュレーションを行った．二次元チャンネル乱流の乱れエネルギーは，時間とともに指数関数的に減衰することがわかった．また，乱れエネルギーの半減期とレイノルズ数との関係を調べることにより，チャンネル乱流の再層流化の過程は，円管内乱流の場合と類似性があることが示唆された．

今後は，さらに大きな領域に対する数値計算を実施し，本解析で得られた乱れエネルギーの半減期が大きくなる付近（Re = 1230 付近）を詳細に調べることが課題である．

参考文献

(1) H. Faisst and B. Eckhardt: A Low-Dimensional Model for Turbulence Shear Flows, N. J. Phys., **6** (2004), p. 17.

(2) A. K. M. F. Hussain and W. C. Reynolds: Measurements in Fully Developed Turbulent Channel Flow, ASME J. Fluids Eng., **97** (1975), pp. 568–580.

(3) J. Kim, P. Moin and R. Moser: Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number, J. Fluid Mech., **177** (1987), pp. 133–166.

(4) K. R. Sreenivasan: Laminarescent, Relaminarizing and Retransitional Flows, ACTA Mechanica, **44** (1982), pp. 1–48.

(5) B. Hof, J. Westerweel, T. M. Schneider and B. Eckhardt: Finite Lifetime of Turbulence in Shear Flows, Nature, **443** (2006), pp. 59–62.

(6) H. Faisst and B. Eckhardt: Sensitive Dependence on Initial Conditions in Transition to Turbulence in Pipe Flow, J. Fluid Mech., **504** (2004), pp.343–352.

(7) J. Peixinho and T. Mullin: Decay of Trubulence in Pipe Flow, Phys. Rev. Lett., **96** (2006), 094501.

(8) D. P. Lathrop: Turbulence Lost in Transience, Nature, **443** (2006), pp. 36–37.

(9) S. Bottin and H. Chate: Statistical Analysis of the Transition to Turbulence in Plane Couette Flow, Eur. Phys. J. B, **6** (1998), pp. 143–155.

(10) S. A. Orszag and L. C. Kells: Transition to Turbulence in Plane Poiseuille and Plane Couette Flow, J. Fluid Mech., **96** (1980), pp. 159–205.

(11) S. Chen and G. D. Doolen: Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, Annu. Rev. Fluid Mech., **30** (1998), pp. 329–364.

(12) S. Succi: The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, (2001), Oxford University Press.

(13) T. Inamuro: Lattice Boltzmann Methods for Viscous Fluid Flows and for Two-Phase Fluid Flows, Fluid Dyn. Res., **38** (2006), pp. 641–659.

(14) T. Inamuro: A Lattice Kinetic Scheme for Incompressible Viscous Flows with Heat Transfer, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, **360** (2002), pp. 477–484.

(15) Y. Sone: Asymptotic Theory of Flow of Rarefied Gas over a Smooth Boundary II, in: D. Dini (ed.), Rarefied Gas Dynamics, Pisa, Editrice Tecnico Scientifica, **2** (1971), pp. 737–749.

(16) T. Inamuro, M. Yoshino and F. Ogino: Accuracy of the Lattice Boltzmann Method for Small Knudsen Number with Finite Reynolds Number, Phys. Fluids, **9** (1997), pp. 3535–3542.

(17) P. G. Drazin and W. H. Reid: Hydrodynamic Stability 2nd edition, (2004), Cambridge University Press.

(18) Y. Tanaka, M. Yoshino, M. Matsubara and N. Aota: (in preparation).

(19) X. He, L-S. Luo and M. Dembo: Some Progress in Lattice Boltzmann Method. Part I Nonuniform Mesh Grids, J. Comput. Phys., **129** (1996), pp. 357–363.

(20) Y. Peng, C. Shu, Y. T. Chew and T. Inamuro: Lattice Kinetic Scheme for the Incompressible Viscous Thermal Flows on Arbitrary Meshes, Phys. Rev. E, **69** (2004), 016703.