概算方略はいかに選択されるか

—— 小・中・高校生を対象にして ——

天岩　静子

問　　題

概算は,「およその答」を出すために行う「おおよその計算，あらましの計算」である。概算は日常生活では適切な行動を取るために使う頻度が多く（持っている金額の範囲で買物をする，釣銭のおよその額を確かめる等），求める答（およその答）が速やかに出せる有効性の高い計算方法である。しかし，概算を行うには普通の筆算以上に難しい点がいくつかある。天岩（1995）は，概算を解くために必要な知識として，第1に,「概数（およその数)」の知識を持っていること，第2に，いずれの位の答もすべて正確でなければならないという信念を捨てて，上の位の数値のみが重要であることを知ること，第3に,「およその答」を出すための方法（方略）は多様であることを知ること，第4に，概算の答は1つとは限らず，複数ありうることを理解すること，第5に，計算の状況に応じて，より適切な答を出すために調整操作を行うこと，をあげている。これらの知識は学校で教育されているのであろうか。

第 1 点の概数及び四捨五入の方法については，小学校 4 年生で教えられる。大きな数は四捨五入して扱う方が便利であるという知識は得られるが，どの位（あるいはどの桁）までの概数にするかはあらかじめ指定されていて，各自で判断することはない。概数に直した数字を使った加減乗除すなわち概算は，小学校 5 年生で5～8時間教えられる。この場合も「次の和や差を，千の位までの概数で求めましょう」「人数は，約何万何千人といえばよいでしょう」のように，答を出す位や桁が指定されたままである。各種の課題について適切な概算を行う際には，自分でどの位（桁）まで採用するかを決める必要がある。どの位で四捨五入をすることが適切であるか，それはなぜか，についてさまざまな計算状況で考えさせることが概算の理解につながると考えられるが，その教育は充分とはいえない。

残りの4点についての教育は一層不充分である。普通の計算においては，一の位まで正しくなければならないということが厳しく教えられ，一の位の数字がたった1だけ違っていても誤答となる。しかし同じ誤答であっても，一の位の数字が1だけ違う場合と千の位の数字が1だけ違う場合では，その意味は大きく異なるはずである。上の位の数字には敏感である必要がある。また，概算方略も四捨五入だけではなく，多くのものがありうることが理解されていない。Dowker（1992）は数学者 44 人に対して各種のかけ算と割り算課題 20 問を示し，暗算で答を見積る過程をインタビューにより調べた結果，一般的な 7 種の方略の他に，ユニークな方略（同一問題に対して他の数学者のだれも示さなかった方略）が数多く見出されたことを報告している。例えば 76×89 の課題では 10，25410÷65 の課題では 12 のユニークな方略が用いられた。一般には，これほど多くの独特な方略が用いられることはないと

思われるが，それでも四捨五入以外の可能性を考えさせる教育は重要であろう。概算の正答は 1 つだけではなく，方略が異なれば複数ありうること，計算の状況に応じて，より適切な答を出すために調整操作を行うことの理解も大切である。非常におおざっぱな値が得られればよいのか，正確な答えに近づける方がよいのか，状況の判断が求められる。その状況判断によって採用する方略も違ってくるはずである。

学校で充分な概算教育が行われていないにもかかわらず，年齢の上昇につれて計算状況に応じた適切な方略が選択されるようになる。計算の経験量及び各種計算についての概念的理解が増加することや日常生活場面での概算経験が増えるためと思われる。この他に概算方略の選択に影響する要因として，課題の性質，概算をする目的，概算をする場，概算結果の評価者（教師か自分か），などが考えられる。

本研究では，小学校5年生から高校 2 年生までの生徒を対象に，性質の異なる 3 種類の課題を教室内で実施し，課題によって概算方略の選択にどのような相違（または共通性）が見られるか，そしてそれらが生ずるのはなぜであるかを検討する。さらに，年齢の上昇につれて，課題に特有な概算方略の採用はどの程度増えるかについても検討を行う。

方　法

1. 被験者

長野市の公立小学校・中学校・高等学校の生徒 220 名を対象とした。これらの生徒は，珠算塾に通った経験のない者であった。被験者の構成は表 1 の通りで，220 人のうち男子は 103 名，女子は 117 名であった。

表 1　被験者の構成　（単位：人）

小 5 年	小 6 年	中 1 年	中 2 年	中 3 年	高 1 年	高 2 年	計
30	31	31	30	28	32	38	220

2. 課題内容と実施手続き

概算の課題は次の 3 問であった。

課題 A)　38 × 99

課題 B)　9250 ÷ 25

課題 C)　0.24 × 439

各課題の概算方略としては以下のことが予想される。38×99 の課題では，それぞれの数を丸めて 40×100 とすることで容易に答が得られる。38 はそのままにして 99 を 100 に丸めれば，38×100 で一層正確な答に近づく。9250÷25 の課題は，9250 を 9000 に丸め，9000÷30 で 300，あるいは 9250 を 10000 に丸めて，10000÷25 で 400 の答が出る。25 の 4 倍が 100　であることにすぐに気づけば，計算はさらに速くできる。また，どちらの数も 5 で割ることができるので，簡単に計算できる簡易計算法を適用することも可能である。0.24×439 の課題は，0.24 を 0.25 または 1/4 とみなし，439 を 400 に丸めれば簡単に答が得られ

る。

課題の実施は集団で行った。課題が書かれた用紙を配り，各課題を解く際の考え方と「およその答」を書くように求めた。教示---「次の問題の「およその答(だいたいの答)」をだす場合，どのように考えますか？　考え方をくわしく書いてから，およその答を線の上に書いてください。考え方の説明は，式を使ってもいいし，文章だけで書いてもいいです。」実施にあたっては，1問ごとにゆるい時間制限を設けた。

結　　果

1. 概算方略の種類について

各課題について，いくつかの概算方略が見出された。それらを以下の７種のカテゴリーに分類した。

1）正確に計算する

普通の筆算をして，筆算結果の正確な答を「およその答」とする。

2）正確に計算して，答を四捨五入する

普通の筆算をしてから答を四捨五入し，「およその答」とする。

3）簡易計算法を採用して，正確な答を出す

簡単に計算できる方法を考えて，正確な答を出す。その答を「およその答」とする。この方略は，特に課題 B) 9250÷25 で多くあらわれた。

例）　9250÷5　さらに，答÷5

9250÷100×4

9000÷25＝360　250÷25＝10　360＋10

4）一方の数字を丸めて計算する

２つの数字の一方だけを丸めてから計算をする。

5）両方の数字を丸めて計算する

両方の数字を丸めてから計算する。

6）簡易計算法を採用して，概算する

丸めた数を分数に置きかえる等の簡易計算法を用いて，概算をする。

例）　課題 B）10000÷25×9

課題 C）440×25/100＝440÷4＝110

25/100×450＝25/2×9＝25/2×10＝125

7）無答・不明

正確に筆算をしてその答を書いたもの（カテゴリー 1）は概算とは言えないが，与えられた課題に対する方略の 1 つとして分類した。同様に，簡易計算法を用いて正確な答を出す方略（カテゴリー 3）も概算方略の 1 つとみなした。典型的な概算方略は，四捨五入と数を丸めることの 2 つであり，課題に特徴的ないくつかの方略は簡易計算法の中に含めた。

2. 課題の性質と概算方略の関連性

用いられた概算方略を課題ごとに示したものが表 2 である。各課題に共通することは，両方の数字を丸めてから計算する方略が最も多く用いられ，次いで正確な筆算の多いことであった。およその答を出す場合，両方の数字を丸めてから計算することは適切な方略であるが，正確に計算してそのまま答を書くことは課題の要求にあわない。およその答が求められているのに，時間のかかる筆算をした者の多いことは興味深い。

課題に特徴的に見られる傾向として，次の点があった。38×99 の課題では，両方の数字を丸める方略が最も多く採用された(46.8%)ことに加えて，一方の数字を丸める方略も採用率が高かった。数を丸めるこれら 2 つの方略を用いた者の割合はあわせて 61.8%となり，この課題では，数を丸めて概算をする方略が採用され易かったといえる。9250÷25 の場合は，簡易方略を用いて正確な答を出そうとする傾向が他の課題よりも強かった。また，正確な筆算をする者も 38×99 の課題に比べて多かった。0.24×439 では，簡易計算法によって概算をした者が，3 課題中最も多かった(11.4%)。正確な筆算をした者が最も多かったことも特徴的であった(30.0%)。

表 2　各課題で用いられた概算方略　（人数と%）

	A) 38×99		B) 9250÷25		C) 0.24×439	
1) 正確	37	(16.8)	54	(24.5)	66	(30.0)
2) 答/四捨五入	20	(9.1)	19	(8.6)	21	(9.5)
3) 簡易計算/正確	15	(6.8)	24	(10.9)	3	(1.4)
4) 丸める/一方	33	(15.0)	24	(10.9)	14	(6.4)
5) 丸める/両方	103	(46.8)	80	(36.4)	74	(33.6)
6) 簡易計算/概算	3	(1.4)	5	(2.3)	25	(11.4)
7) 無答	9	(4.1)	14	(6.4)	17	(7.7)

3. 概算方略の一貫性

3 課題に対する概算方略の一貫性はどうであろうか？　3 課題とも同一の概算方略を用いた者，2 課題（B と C，どちらにも 25 という数字が関係する）で同一の概算方略を用いた者の数を示したものが表 3 である。

表 3　同一の方略を用い続けた人数

	全課題	課題 B) と C)
1) 正確	34	41
2) 答/四捨五入	15	17
3) 簡易計算/正確	2	3
4) 丸める/一方	4	5
5) 丸める/両方	53	57
6) 簡易計算/概算	0	3
7) 無答	4	8

結果として，多くの者が採用した方略である「正確」「答/四捨五入」「丸める/両方」の一貫性はかなり高いことが明らかになった。38×99 の課題で正確な筆算をした 37 名のうち

の 34 名，筆算をしてからその答を四捨五入した 20 名中の 15 名，両方の数字を丸めてから計算をした 103 名中の 53 名は同一の概算方略をとり続けた。課題 B)と C)に限れば，これらの 3 方略を一貫して採用した者の数はさらに多くなる。その一方で，簡易計算法や一方だけを丸める方略は一貫性が低く，その出現は課題内容に依存することが示された。

4. 概算方略と年齢の関連性

年齢は，計算の経験量と概念的理解の程度を反映する。選択された概算方略と年齢との関連性を示したものが，図 1～3 である。年齢群の人数は，小学生 61，中学生 89，高校生 70 といくぶん差のあることを考慮しなければならないが，最も典型的な方略である「丸める/両方」はいずれの年齢群においても多く用いられることが明らかとなった。小学生でもおよその答を出すためには両方の数字を丸めて計算すればよいという知識を持ち，それをすぐに適用できると思われる。概算とはいえない「正確」な筆算をする者は，38×99 の課題では小・中学生に多かったが，課題 B) と C) では高校生でも他の年齢群と同じ程度にみられた。また，筆算をしてから答を四捨五入する「答/四捨五入」は，各課題とも小学生と高校生に多かった。高校生は，課題で求められているのは「およその答」であることを当然理解していたと思われるが，それでも正確な筆算にこだわる者が多かったといえる。正確な答にこだわる高校生がいる一方で，簡易計算法を用いて課題を処理する「簡易計算/正確」「簡易計算/概算」を採用したのは，その大部分が高校生であった。数の分解や分数への置きかえなどをすばやく行うことは，高校生に至るまでは難しいといえる。また，一方の数字だけを丸める「丸める/一方」は中学生と高校生に多く見られた。

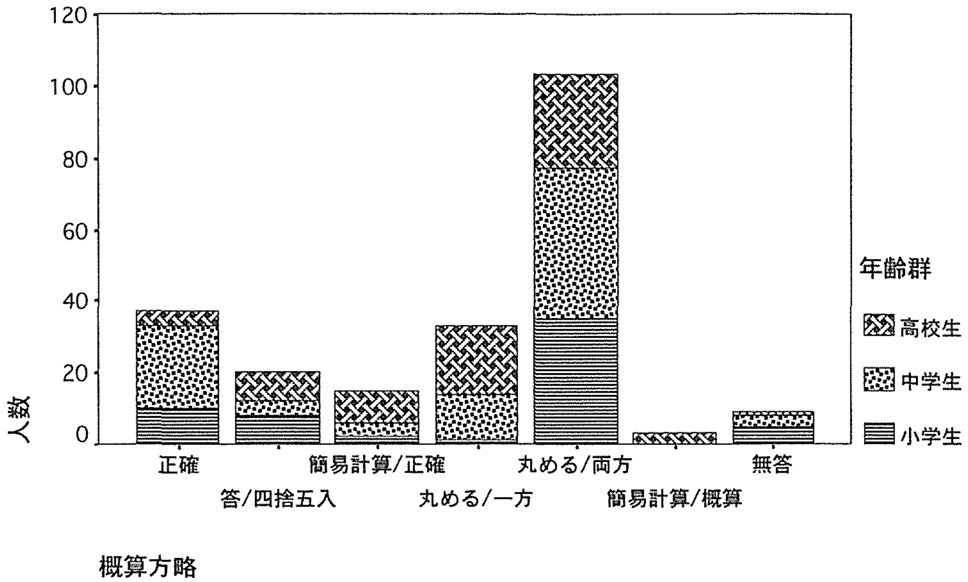

図 1　　課題 A) 38×99 に対する概算方略（年齢別）

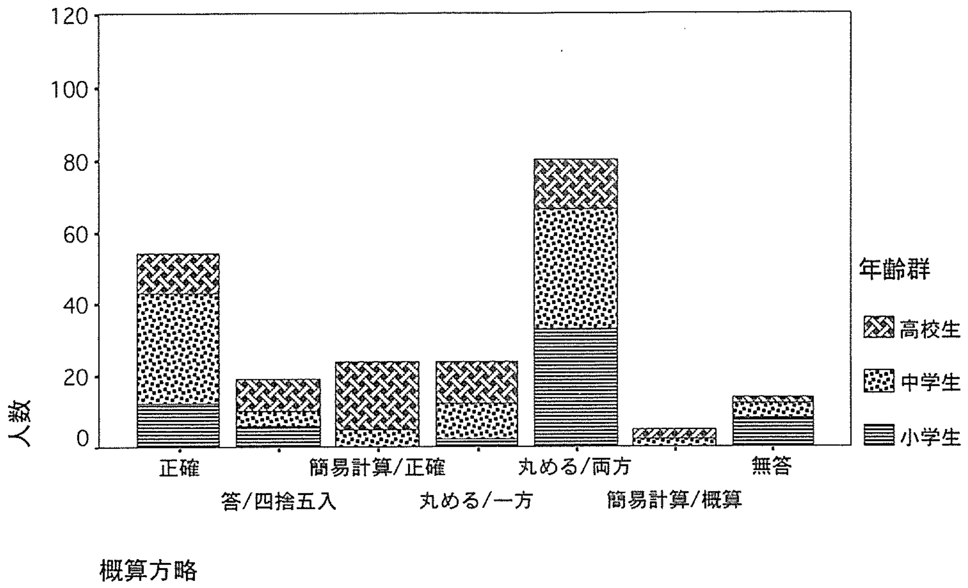

図２　　課題 B）9250÷25 に対する概算方略（年齢別）

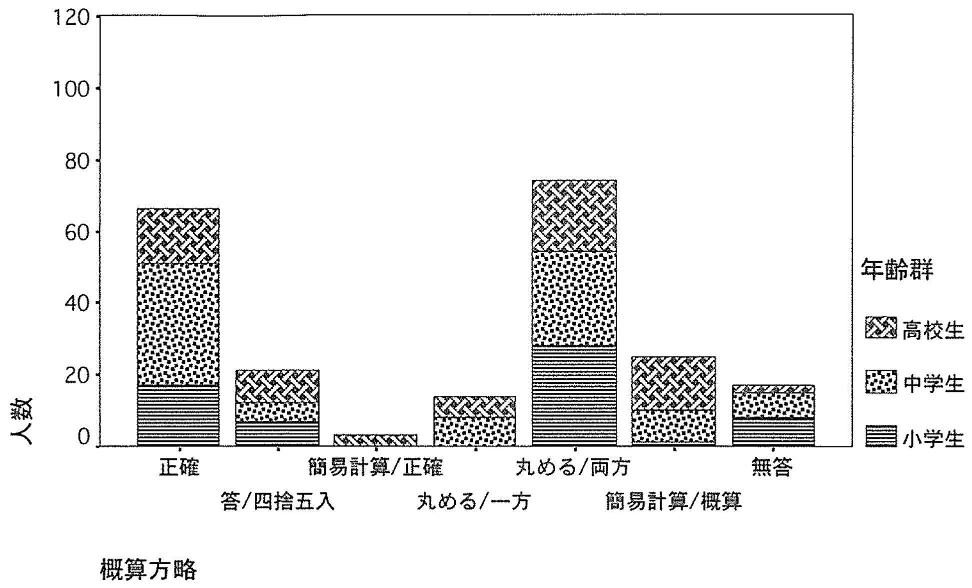

図３　　課題 C）0.24×439 に対する概算方略（年齢別）

5．概算方略と解答との関連性

概算方略とその解答の正しさとの関係を示したものが図 4～6 である。答の種類は，正答

を 2 つに分けて，正確に計算してその解答が正しかった「正確/正答」と，概算をして解答が正しかった「概算/正答」とした。正確に計算をした結果はおよその答とはいえないが，「誤答」とは区別した。

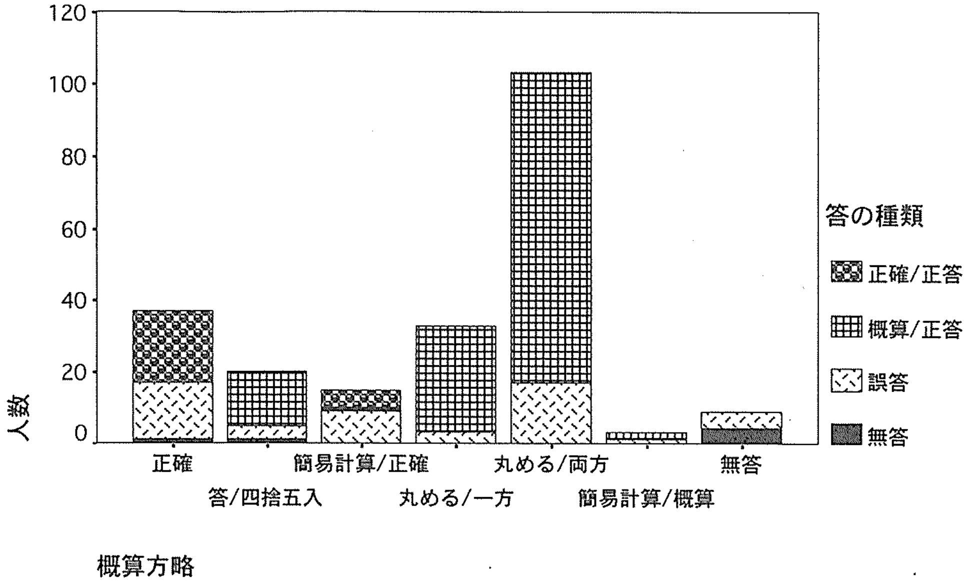

図 4　　課題 A）38×99 に対する概算方略（解答別）

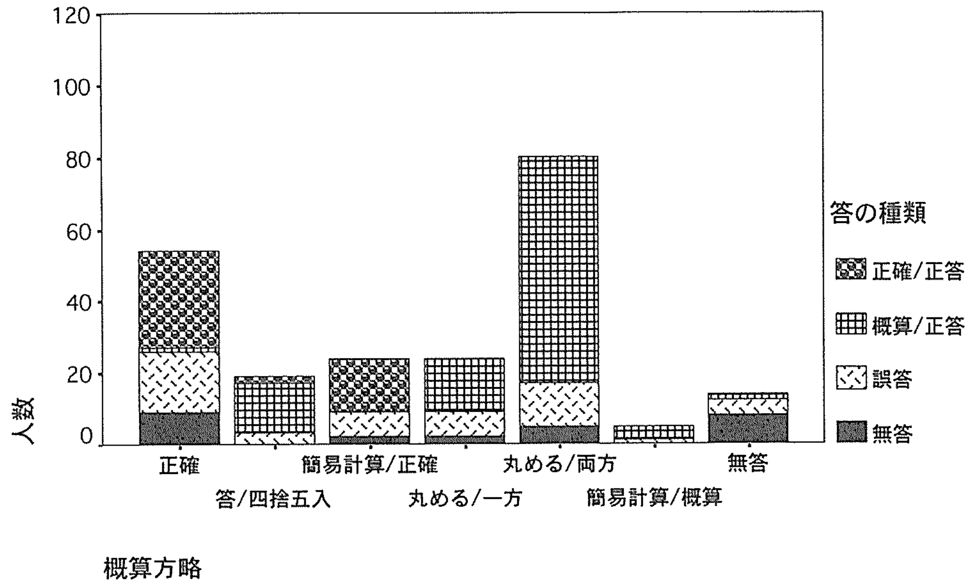

図 5　　課題 B）9250÷25 に対する概算方略（解答別）

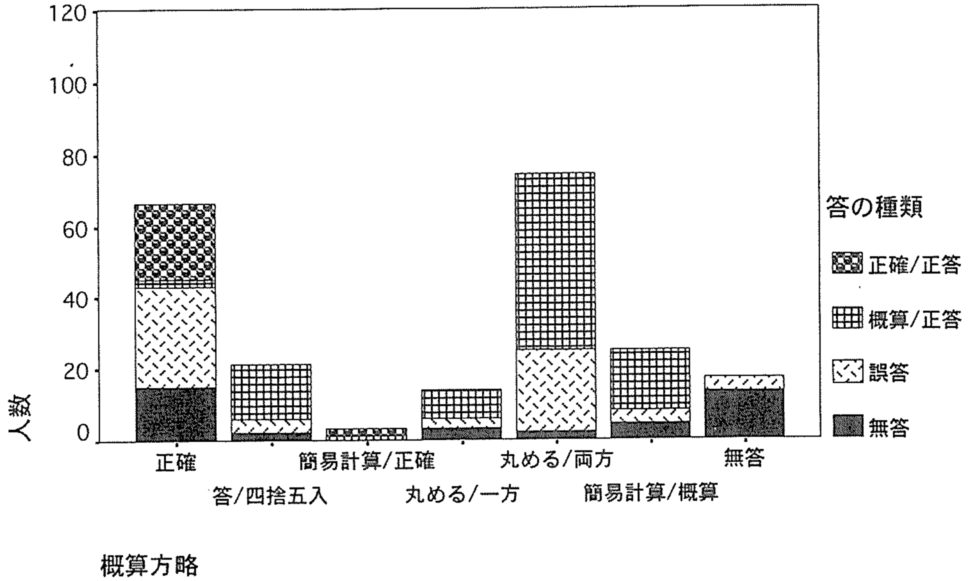

図6　課題C）0.24×439に対する概算方略（解答別）

両方の数字または一方の数字を丸めて計算する「丸める/両方」「丸める/一方」方略を採用した場合，その答の大部分は正答であった。数を丸めて計算する方法は有効な概算方略であったといえる。しかし，課題C）では他の課題に比べて誤答が多く，丸めてから計算するという適切な方略を用いたにもかかわらず，答は誤りという者のあったことがわかる。

概算の簡易計算法「簡易計算/概算」を用いた場合，その解答の大部分は正答であった。しかし，正確な答を出すために簡易計算法を用いた「簡易計算/正確」の場合には，課題A）において誤答が多かった。課題A）では，簡易計算法によって正確な答を出そうと意図しても，その適用が難しかったのである。

6. 誤答の原因についての分析

誤答が生じた原因を探るために，誤答の多かった「正確」「簡易計算/正確」「丸める/両方」方略について，誤りが桁のエラーであるか計算エラーであるかを課題別，年齢群別に示したものが表4である。

筆算によって正確な答を出す方略における誤答は，課題A）とB）では大部分が計算エラーに基づくものであった。しかし課題C）では，両方のエラーが原因となっていた。計算エラーは計算能力の未熟さを示すものと考えられるが，課題C）では小数点が含まれていたために桁のエラーが生じたのであろう。この課題で桁のエラーを示した中学生は8人，高校生は4人であった。簡易計算方略を用いて正確な答を出そうとした時の誤りは，ほとんど

が計算エラーであった。例えば課題 A）では，38×100−38 又は 38（100−1）の計算途中で，間違いをしたために正答にはならなかった。高校生でも中学生と同程度に計算エラーが出現した。両方の数字を丸めてから概算をした場合，誤りの多くは桁のエラーであった。桁のエラーは課題 A)と C）で多く出現し，課題 A）では数を丸めるところまでは正しくても答を書く際にゼロの数が足りず，課題 C）では，小数点の処理をしないために桁が 2 つ違うということが多くみられた。この方略における桁のエラーは小学生と中学生に多くあらわれたが，高校生でも 2〜3 人が誤りを示した。

表 4　方略別，課題別，年齢群別に示した誤答の内容　（単位：人）

概算方略	エラーの内容	年齢群	A）38×99	B）9250÷25	C）0.24×439
正確	桁のエラー	小学生	1	1	4
		中学生	2	1	8
		高校生	0	0	4
		小計	**3**	**2**	**16**
	計算エラー	小学生	5	5	3
		中学生	7	8	7
		高校生	1	2	2
		小計	**13**	**15**	**12**
簡易計算/正確	桁のエラー	小学生	0	0	0
		中学生	0	0	0
		高校生	0	1	0
		小計	**0**	**1**	**0**
	計算エラー	小学生	2	0	0
		中学生	3	3	0
		高校生	4	3	0
		小計	**9**	**6**	**0**
丸める/両方	桁のエラー	小学生	6	3	8
		中学生	6	3	5
		高校生	3	2	2
		小計	**15**	**8**	**15**
	計算エラー	小学生	1	1	5
		中学生	1	3	2
		高校生	0	0	1
		小計	**2**	**4**	**8**

考　　察

1.「およその答」を出すために，なぜ正確な筆算をするのか

「およその答」が求められているのに，なぜ正確な筆算をする者が多かったのであろうか。各課題で正確な計算をしたのは年齢の低い小学生だけというわけではなく，高校生でもかなりの程度正確な筆算を行った。正確な答を出してからその答を四捨五入する傾向も，他の年齢群と同様高校生でも現れた。ここでの被験者は，課題で求められているのが「およその答」

であることは理解しており，数を丸める知識を持ち，その適用も可能と思われる。それなのになぜであろうか？

第一の理由は，概算方略の選択に自信が持てなかったためであろう。どのような概算方略を選ぶべきかが明確でなければ，時間がかかっても確実な方法に頼ろうとする。結果で示されたように，正確な筆算を行った者の数は課題 A)，課題 B)，課題 C）の順に多くなり，両方または一方の数を丸める方略の採用はこの順に少なくなった。課題 A)　38×99 のように 99 を 100 に丸める方略がとりやすい課題では，正確な筆算は少ない傾向がある。数をどのように丸めるかの見通しがすぐにつかない場合は，正確に筆算をする方法が選ばれたと考えられる。

第二には，普通の筆算能力に対する自信のなさが影響していると思われる。「正確」方略を採用した者は，他の方略よりも誤答の割合が高かった。特に課題 C）では誤答反応が多かった。また，3 問ともに一貫して「正確」や「答/四捨五入」方略をとった者が多くみられた。一般的には普通の計算をするよりも概算の方が誤りをする可能性は減るのであるが，計算に自信のない者はまず普通の筆算にとりかかり，その途中で計算エラーをしてしまうことが多いと思われる。正確な答にあまりにこだわることが，正確な答だけでなく「およその答」をも見失うことにつながっているようである。

第三に，テスト場面であったことが影響していると思われる。ここでの概算は教室の中でテストとして行われたものであり，日常生活における必要性から行うものではなかった。また，テスト結果の評価は教師が行うという状況であった。テスト場面では「誤りを防ぐ」ことが何より重要であり，概算方略を工夫するよりも，確実で安全な「得点がとれる」方略が採用され易くなる。

第四に，テスト場面であったことと関連して，正確な答を書けば「誤り」とはならないであろうという判断のあったことが予想される。求められているのが「およその答」であることは分かっていても，自信の持てない「およその答」を書けば「誤り」となる可能性が高いが，正確な答は誤りとはいえないという考えに基づき，高校生でも正確な答を出そうとしたのではないかと考えられる。

これまでにも，概算課題を解く場合に，使い慣れた解決方略や確実な方略を使おうとする傾向のあることが示されている。Bestgen, et.al.,（1980）は，概算で答を出すように求められた生徒は，まず筆算をして答を出してからその答を丸めて解答を出したという結果を述べている。Sowder & Wheeler（1989）は，高学年の生徒（7，9 年生）の方が低学年の生徒（3，5 年生）よりも，概算での誤りを防ごうとして，まず正確な答を出してからその答を丸めて概算の答を出すことが多かったと報告している。天岩（1992）は，小学生 3 年生に関する継続的調査の中で，引き算をして「答の一番左の数字（一番大きい位の数字）はいくつになるか」だけを書くように求めているにもかかわらず，正確な答を出してから一番大きい位の数字を書くという方略を取り続けた者が 9 ヶ月後でも 40～50%前後あったことを報告している。教室内で概算をする場合，確実で安全な方略が最良の選択であるという考えは，非常に根強いものである。

2. 課題に特徴的な方略の選択

本研究の結果から，課題によって特徴的に現れる方略の選択傾向は，課題の性質に大きく依存することが明らかになった。

課題 A）38×99 では，両方の数字を丸める概算方略が最も多く採用されただけでなく，一方の数字を丸める方略も採用率が高かった。これは課題に含まれる 99 の影響と思われる。99 を 100 に丸めることは気づき易い。38 を四捨五入して 40 にすることも難しくはないが，38 はそのままにして，38×100 で簡単に概算をすることができる。この課題では，両方を丸めるよりも一方を丸めた方が，計算にかかる時間も労力も節約できる。またこの課題では，簡易計算法による概算が非常に少なかった。38×9 を 38×10 として，答の 380 を縦にずらして書いてから足し合わせるというものや 40×100−30 という方略があったが，これらの方略を考えるよりも，99 を 100 に丸めて 38×100 の計算をすることが最も効率的であったと思われる。

課題 B）9250÷25 の特徴は，簡易計算法で正確な答えを出そうとする傾向が他の課題よりも強いことであった。これは両方の数字が 5 で割りきれること，両方に 25 の数字があること，さらに 25 の 4 倍が 100 という知識を利用したためと思われる。簡易計算法としては，9250 を 5 で 2 回割る，9250÷100×4，9000÷25＝360　250÷25＝10　360＋10＝370 などがあった。この課題における分数の利用は課題 C）よりも少なく，9250 を 9000 と 250 に分解して，それぞれを 25 で割るという方略の採用が多かった。

課題 C）0.24×439 では，簡易計算法によって概算をした者が，3 課題中最も多かったことが特徴的であった。0.24 が 0.25→1/4 となることに気づき，1/4×440，1/4×400，440×25/100＝440÷4，の方略が多く用いられた。この課題では，正確な筆算をした者が 3 課題中最も多かったことも特徴的であった。解答用紙に「これは普通の筆算をするしかない」と書いた者も数人あり，小数を分数に直すことにすぐに気づかなければ，そのまま正確な筆算をするのが一番確実な方法と判断したようである。

簡易計算法を採用するのは大部分が高校生であり，この方略の選択は，計算の経験量や理解度と関係することが明らかになった。簡易計算法を利用する際には，単に数を丸めるという以上に計算の仕組みや数の分解，各種計算の関連性の理解を必要とする。中学生でもこのような知識は持っていると思われるが，課題に応じてどの方法を用いるかをすばやく判断する段階にまでは至っていないと思われる。状況に応じた判断という意味で，高校生が課題 A）と B)で「丸める/一方」を多く用いたことも，その方が時間と労力の節約になると判断したからであろう。

3. モニタリングとしての概算

モニタリングとは，メタ認知の制御行動の側面をさし，一般には自分の行っている行動が適切であるかどうかを自分でモニター（監視）し，修正する機能をいう。自分の行った計算過程や結果についてモニタリングが働けば，誤りを自発的に修正することが可能になる。一般的には，計算のモニタリングはそれほど有効には機能しない。計算途中で誤りに気づくこ

とは少なく，自分の計算結果を見直しても同じ計算過程をたどるので誤りと気づきにくい。天岩（1998）は小学校３・４年生の場合，自分で行った筆算を見直して「違っているかもしれない」と思っても，どこが間違っているかの判断が非常に難しいことを報告している。このようなモニタリングの際に役立つのが概算である。概算は早く答がでるので解答があっているかどうかの見当をつけることができ，必要に応じて計算の修正が可能になる。特に位取りの誤りを防ぐ場合に有効である。しかし本研究の結果が示すように，中学生や高校生にも両方の数字を丸めてから概算をする際に桁のエラーがあらわれ，概算がモニタリングとして充分機能しているとは言えない。概数や概算とは何なのか，なぜ必要なのか，早く適切に概算できる方略はどのようなものか，さらにどの様に役立つかという利点や効用性について，多くの時間をかけての教育が必要と考えられる。

文　献

天岩靜子　(1992)

小学生の概算解決方略　----珠算経験との関係を中心に----　珠算春秋　39, 1, 122-134.

天岩靜子 (1995)

概算（吉田甫・多鹿秀継編　認知心理学からみた数の理解　第２章　34-54）　北大路書房

天岩靜子 (1998)

計算過程のモニタリングと検算方略　----小学３・４年生を対象にして----

信州大学教育学部紀要　第93号　103-113.

Bestgen, B.J., Reys, R.E., Rybolt, J.F. & Wyatt, J.W. (1980)

Effectiveness of systematic instruction on attitudes and computational estimation skills of preservice elementary teachers. *Journal for Reserch in Mathematics Education*, 11, 124-136.

Dowker, A. (1992)

Computational estimation strategies of professionalmethematicians.

Journal for Research in Mathematics Education, 23, 45-55.

Sowder, J.T. & Wheeler, M.M. (1989)

The development of concepts and strategies used in computational estimation.

Journal for Research in Mathematics Education, 20, 130-146.

謝辞

調査にご協力下さった長野市の小学校・中学校・高等学校の生徒の皆様並びに先生方に，厚く御礼申し上げます。

（1999年５月25日　受理）