

クォークとレプトンはいつ分かれたか — 大統一理論における破れ

川村 嘉春

1. はじめに

本題に入る前に、ぼやきから始める。先日、ある授業でレポート課題を出した。「A4サイズの内紙に数ページで」と指定したにもかかわらず、各問いに対して、3行程の文章のみで記載されたレポートが複数の学生から提出された。唖然とした。大学生の事情を最大限に考慮したとしても、物足りない。二週間あまりの間に、数ページを埋めることはそんなに難しいことなのだろうか。実際に簡単な実験を試みるとか、図やグラフや数式を交えろとか、正解に辿り着けなくても問題の背景になっている現象に関する解説をしろとか、苦慮したあとが見えるレポートを提出してほしかったのだが、期待通りにはいかないものである。伸び代を信じて、地道に指導するしかあるまい。

2. 課題

今回、私に課せられた課題は「クォークとレプトンはいつ分かれたか」というタイトルのもとで、執筆することである。まず、課題に関する背景知識を説明する必要がある。具体的には、「クォークとは何か?」、「レプトンとは何か?」である。このような問いは、芋蔓式に新たな問いを生み出す。先取りして記載すると、「相互作用とは何か?」、「ゲージ原理とは何か?」などである。まずは、これらについて芋蔓式に説明しよう。

3. 背景知識

3.1 クォーク

クォークとは、自然界を構成する基本粒子の一つである。¹⁾ クォークは現在までに6種類見つかっていて、それぞれ、アップクォーク (u)、ダウンクォーク (d)、ストレンジクォーク (s)、チャームクォーク (c)、ボトムクォーク (b)、トップクォーク (t) と命名されている。クォークの電荷 Q (素電荷 e を単位とする)、バリオン数 B 、質量 ($1\text{GeV} = 10^3\text{MeV} = 10^9\text{eV}$) を表1に記載した。²⁾ クォークはスピン $1/2$ でディラック方程式に従うフェルミオン (ディラックフェルミオン) である。素粒子は整数スピンを持つボソンと半奇数スピンを持つフェルミオンに大別される。また、素粒子には反粒子が存在する。反粒子は粒子と同じ質量を持ち、 Q や B のような量子数は反対の値を取る。

表1 クォークの電荷、バリオン数、質量

クォーク	Q	B	質量
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$1.5 \sim 3.3\text{MeV}/c^2$
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$3.5 \sim 6.0\text{MeV}/c^2$
s	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$70 \sim 130\text{MeV}/c^2$
c	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$1.16 \sim 1.34\text{GeV}/c^2$
b	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$4.1 \sim 4.4\text{GeV}/c^2$
t	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$171.3\text{GeV}/c^2$

クォークは $2e/3$ や $-e/3$ といった半端な電荷を持っていて、ハドロンと呼ばれる粒子の中に閉じ込められている。

3.2 ハドロン

ハドロンとは、クォークやその反粒子（反クォーク）から構成された複合粒子で、バリオンとメソンに大別される。バリオンは3個のクォークから構成された半奇数スピンを持つ複合粒子で、陽子(p)、中性子(n)、ラムダ粒子(Λ^0)などが存在する。p, n, Λ^0 のQ, B, 質量, 構成要素を表2に記載した。

表2 p, n, Λ^0 のQ, B, 質量, 構成要素

バリオン	Q	B	質量	構成要素
p	1	1	938.3MeV/c ²	uud
n	0	1	939.6MeV/c ²	udd
Λ^0	0	1	1115.7MeV/c ²	uds

原子核はpとnから構成されている。原子核を構成する力は核力と呼ばれ、 π メソンにより媒介される。核力の下で、pとnは同一粒子のごとく振る舞い、アイソスピンと呼ばれる量子数を導入して、pとnを核子と呼ばれる粒子の別の状態として扱うことができる。具体的には、SU(2)の2重項(2表現)を成す。

一方、 π メソンは3種類存在して、SU(2)の3重項(3表現)を成す。 π メソンのように、クォークと反クォークから構成される複合粒子はメソンと呼ばれている。 π メソンのQ, B, 質量, 構成要素を表3に記載した。

表3 π メソンのQ, B, 質量, 構成要素

メソン	Q	B	質量	構成要素
π^+	1	0	139.6MeV/c ²	$u\bar{d}$
π^0	0	0	135.0MeV/c ²	$u\bar{u} - d\bar{d}$
π^-	-1	0	139.6MeV/c ²	$d\bar{u}$

クォークや反クォークを束縛してハドロンを構成する相互作用は強い相互作用と呼ばれている。

3.3 相互作用

場の量子論では、場と粒子は同一の実体として捉えられ、力を媒介する粒子をやりとりすることにより粒子の間に相互作用が働くと考えられる。

素粒子の間に働く普遍性を持つ相互作用として、強い相互作用、電磁相互作用、弱い相互作用がよ

く知られている。電磁相互作用は電磁場の量子である光子をやりとりすることにより働き、量子電磁力学として定式化されている。強い相互作用や弱い相互作用も力を媒介する粒子をやりとりすることにより働く。

3.4 量子色力学

量子色力学とは、クォーク(と反クォーク)を基本粒子として、その間に働く強い相互作用を記述する場の量子論である。強い相互作用において、電荷に相当するものはカラー荷と呼ばれるSU(3)代数に従うチャージである。各クォークはカラーの自由度3を持ち、SU(3)の3重項(3表現)を成す。カラー荷の存在により、その周りに強い相互作用を媒介する粒子であるグルーオンの場が生成される。グルーオン自身もカラー荷を持っていて、ハドロンの内部に閉じ込められている。クォークとグルーオンの間の相互作用の形は、電磁相互作用と同じように、ゲージ原理と呼ばれる指導原理を用いて決定することができる。

3.5 ゲージ原理

ゲージ原理とは、「局所的な変換の下で物理法則は不変である。」という要請である。量子電磁力学の場合、電荷の保存に関する変換は大局的なU(1)変換である。この変換にゲージ原理を採用することにより、光子の場が導入され、量子電磁力学の作用積分の形が決まる。正確には、特殊相対性原理も要請している。同様に、量子色力学の場合、カラー荷の保存に関する変換は大局的なSU(3)変換である。この変換にゲージ原理を採用することにより、グルーオンの場が導入され、量子色力学の作用積分の形が決まる。局所的な変換は群を成し、その群は一般的にゲージ群と呼ばれている。また、導入される相互作用を媒介する場(粒子)は一般的にゲージ場(ゲージ粒子)と呼ばれている。

3.6 電弱統一理論

弱い相互作用の典型例は β 崩壊である。 β 崩壊とは、nがpと電子(e)と反電子ニュートリノ($\bar{\nu}_e$)に崩壊する現象である。クォークのレベルでは、dがuとeと $\bar{\nu}_e$ に崩壊する現象である。弱い相互作用を通じてn(d)が電荷が異なるp(u)に変換す

るので、電磁相互作用と絡む。実際、弱い相互作用は電弱統一理論と呼ばれる $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に基づくゲージ理論として、電磁相互作用と統一した形で定式化される。ここで、 $SU(2)_L$ は弱いアイソスピンに関する群で左巻きのワイルフェルミオンに作用する。下付き添え字の L は左巻きを表している。また、 $U(1)_Y$ は弱いハイパー荷 Y に関する群である。電荷 Q は $SU(2)_L$ の第3成分 T_L^3 の固有値と Y の和 $Q = T_L^3 + Y$ で与えられる。

弱いスケールと呼ばれるエネルギースケール ($v = 246\text{GeV}$) で、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ が $U(1)_{EM}$ (電磁相互作用のゲージ群) に自発的に崩壊することにより、弱い相互作用と電磁相互作用が生じる。壊れた対称性に付随する相互作用が弱い相互作用に相当する。

3.7 ヘリシティ

左巻きのワイルフェルミオンとは、ヘリシティ \hat{h} が $-\hbar/2$ の粒子で粒子の進行方向とスピンの向きが逆向きである。ここで、ヘリシティとは、粒子の進行方向へのスピン \mathbf{S} の射影成分を表す量で運動量 \mathbf{p} を用いて、 $\hat{h} \equiv \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ で定義される。一方、右巻きのワイルフェルミオンとは、 \hat{h} が $\hbar/2$ の粒子で粒子の進行方向とスピンの向きが同じ向きである。ワイルフェルミオンは質量ゼロで光の速さ $c = 3.0 \times 10^8\text{m/s}$ で運動するため、いかなる慣性系においても \hat{h} の値は変わらない。

3.8 自発的対称性の破れ

縮退した真空が存在する場合、真空の選択により、理論の有する対称性の一部が壊れて実現する場合がある。このような現象は自発的対称性の破れと呼ばれている。ここで、真空とはエネルギーが最小の状態である。自発的対称性の破れの帰結として、南部・ゴールドストーン粒子 (NG粒子) の存在が挙げられる。NG粒子は壊れた対称性に付随する粒子で、その質量はゼロである。壊れる対称性が局所的な対称性の場合、NG粒子は壊れる対称性に関するゲージ粒子に吸われて非物理的になると同時に、ゲージ粒子は質量を獲得する。このような質量獲得機構がヒッグス機構である。

電弱統一理論において、ヒッグス機構を通じて、弱い相互作用を媒介するウィークボソンと呼ばれるゲージ粒子 W^\pm , Z が陽子の百倍ほどの質量を獲得する。ヒッグス粒子と呼ばれるNG粒子の棒は吸われずに残り、大型ハドロン衝突実験 (LHC) において、その発見が期待されている。

3.9 レプトン

β 崩壊で登場した e と $\bar{\nu}_e$ は強い相互作用をしないフェルミオンでそれらは総称して、レプトンと呼ばれている。クォーク同様、レプトンも6種類見つかっていて、それぞれ、電子、電子ニュートリノ (ν_e)、ミューオン (μ)、ミューオンニュートリノ (ν_μ)、タウオン (τ)、タウオンニュートリノ (ν_τ) と命名されている。レプトンの量子数と質量を表4に記載した。 L はレプトン数と呼ばれる量子数で、クォークのレプトン数はゼロである。

表4 レプトンの Q, B, L , 質量

レプトン	Q	B	L	質量
e	-1	0	1	$0.511\text{MeV}/c^2$
ν_e	0	0	1	$< 2\text{eV}/c^2$
μ	-1	0	1	$105.66\text{MeV}/c^2$
ν_μ	0	0	1	$< 0.19\text{MeV}/c^2$
τ	-1	0	1	$1.777\text{GeV}/c^2$
ν_τ	0	0	1	$< 18.2\text{MeV}/c^2$

3.10 標準模型

標準模型とは、量子色力学と電弱統一理論を総合した理論である。すなわち、3世代のクォークとレプトンを物質粒子とするゲージ群 $G_{SM} \equiv SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ に基づくゲージ理論で $SU(3)_C$ に関する部分は強い相互作用を記述し、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に関する部分はヒッグス機構により $U(1)_{EM}$ に壊れるという性質を内包した理論である。ヒッグス機構によりワイルフェルミオンである物質粒子も質量を獲得し、ディラックフェルミオンになる。第1世代の物質粒子に関するゲージ量子数を表5に記載した。ここで、ニュートリノに関する観測結果を踏まえて右手型のニュートリノ ν_{eR} を導入している。また、 c は粒子を反粒子に変える変換である荷電共役を表している。

表 5 物質粒子のゲージ量子数：第 2 世代，第 3 世代も同様の量子数を持つ。

物質粒子	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	T_L^3	Y
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	3	2	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}$
$(u_R)^c$	$\bar{\mathbf{3}}$	1	0	$-\frac{2}{3}$
$(d_R)^c$	$\bar{\mathbf{3}}$	1	0	$\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	1	2	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}$
$(e_R)^c$	1	1	0	1
$(\nu_{eR})^c$	1	1	0	0

4. ウォームアップ (その 1)

課題に戻る前に脱線しよう。「物理学ゼミナール」と称する授業において、グループディスカッションに先立ちウォームアップを兼ねて、物理や数学に関する問題を解かせている。先日、出した問題は単振り子の運動に関するもので、『単振り子の糸の長さを ℓ ，周期を T ，おもりの質量を m ，重力加速度の大きさを g ，単振り子のふれの角度を θ として，運動方程式を解かずに T に関する関係式を導きなさい。』である。 $\sin \theta$ が θ で近似できる場合，単振動の運動に帰着する。この場合の T に関する公式を暗記している学生が多数いたので，すぐに解答に行き着くではと思ったが，各グループとも悪戦苦闘していた。読者の方々は，すでにお分かりだと思います。キーワードは次元解析で，答えは $T = f(\theta)\sqrt{\ell/g}$ です。ここで， $f(\theta)$ は θ の関数でその具体形は次元解析だけでは決まらない。

5. 課題の再考

それでは，「クォークとレプトンはいつ分かれたか。」という課題に移ろう。この問いかけは，「クォークとレプトンは，ある高いエネルギースケール以上では見分けのつかないもの，共通の性質を有するものとして統合される。」という前提に基づいている。そこで，我々の立場として，この前提を受け入れることにする。ただし，3 節でみたように弱いスケール以下ではクォークとレプトンはかな

り異なる性質を有していて，その違いは量子数や質量の違いに起因している。このことも念頭に置く必要がある。課題に対する正攻法は，前提を実現する理論に基づいて答えを見出すことである。

6. ウォームアップ (その 2)

正攻法を取る前に，ウォームアップとして，『クォークとレプトンはいつ分かれたか』を理論を特定せずに考察しなさい。』という問題に取り組もう。つまり，クォークとレプトンがいかなる形で統合されるのか，いかなる機構で分離するのかについては問わないことにする。有効な手段は次元解析であろう。クォークとレプトンが分かれたエネルギースケールを E_X とすると，分かれた時刻 t_X (宇宙誕生時から測った時刻) は次元解析により，

$$t_X = \frac{\hbar}{E_X} \quad (1)$$

となる。ここで， $\hbar = 6.58 \times 10^{-22} \text{MeV}\cdot\text{s}$ ，不定な係数は 1 に選んだ。(1) より， E_X を評価することが次の課題となる。

E_X を評価する方法として，次の 2 つが考えられる。(A) クォークとレプトンの統合に伴って，結合定数の間にある種の関係式が E_X 以上で成立する場合，結合定数のエネルギー依存性を吟味する。(B) β 崩壊における n と p のごとく， E_X 以上でクォークとレプトンが相互転換する場合，これに伴う現象を吟味する。

ここでは，方法 (B) に基づいて考察する。 E_X 以上で，バリオン数やレプトン数の保存が成り立たないとする。その帰結として，バリオンからメソンやレプトンへの転換・崩壊が起こる可能性がある。ショッキングな例として，陽子崩壊が考えられる。陽子崩壊に関する相互作用が E_X のみ依存する場合，陽子の寿命 τ_p を次元解析により見積もると，

$$\tau_p = \frac{\hbar}{m_p c^2} \left(\frac{E_X}{m_p c^2} \right)^n \quad (2)$$

となる。ここで， m_p は陽子の質量， n は自然数で

その値が最も小さい崩壊過程が支配的になる。^{*1)}

複数のエネルギースケールが絡む場合も、同様に見積もることができる。例えば、2つのスケール E_X と E_s が関与する場合、

$$\tau_p = \frac{\hbar}{m_p c^2} \frac{E_X^{n-m} \cdot E_s^m}{(m_p c^2)^n} \quad (3)$$

である。ここで、 $n > m > 0$ である。

(2), (3) より、 τ_p の値を見出すことが次の課題となる。

7. 陽子の寿命と安定性

神岡での実験により、陽子の寿命は 10^{34} 年以上であることが知られている。この値は宇宙年齢 137 億年 (1.37×10^{10} 年) よりもはるかに長い。ここで、粒子の寿命とは平均寿命のことである。速く崩壊するものもあれば、そうでないものもある。時刻 $t = 0$ で粒子が N_0 個であったとき、時刻 t での粒子数 $N(t)$ は粒子の寿命 τ を用いて、 $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ で与えられる。粒子をじゅうぶん多く集めれば、観測時間内に崩壊する粒子の数が増え、データの信頼性が増す。神岡での実験は、このような性質を使っている。

では、なぜ陽子はこんなに安定なのだろうか？ 粒子の安定性の理由を保存則に求めることができる。例えば、電子は電荷を持つ最も軽い粒子で、エネルギーの保存則および電荷の保存則が厳密に成り立つため自然に崩壊することはない。同様にして、陽子はバリオン数を持つ最も軽い粒子で、バリオン数の保存則が高い精度で（近似的に）成り立っていると考えられる。

8. 大統一理論に基づく考察

5 節で述べたように、正面から課題に立ち向かうためには、まず、クォークとレプトンの統合を

*1) エネルギーの次元を持つ量として、 $m_p c^2$ と E_X を選んだ。次元解析に基づく一般形は、 $\tau_p = \frac{\hbar}{m_p c^2} F(E_X / m_p c^2)$ である。(2) では、陽子崩壊は質量 E_X / c^2 を有する粒子を媒介にして摂動的な効果として生じると仮定した。

実現するような理論を構築する必要がある。ゲージ原理に基づいて、大統一理論と呼ばれる理論が提案されている。^{3,4)} 標準模型のゲージ群 G_{SM} を部分群として含む単純群に基づく理論により、3つの相互作用の統一が実現する。同時に、物質粒子の関する(部分的な)統合が実現する。具体的には、 $SU(5)$ の下で各世代の物質粒子は $\bar{5}$ 表現と 10 表現におさまる。

$$\bar{5} \supset (d_R)^c + l_L, \quad (4)$$

$$10 \supset q_L + (u_R)^c + (e_R)^c. \quad (5)$$

$SO(10)$ に基づく理論においては、各世代の物質粒子は 16 表現に丸ごとおさまる。

$$16 \supset (d_R)^c + l_L + q_L + (u_R)^c + (e_R)^c + (\nu_{eR})^c. \quad (6)$$

このようなクォークとレプトンの統合は、アイソスピンによる p と n の統合と同じアイデア「対称性に関する多重項の下での統合」に基づいている。標準模型における基本粒子のゲージ量子数の違いは、 E_X での対称性の破れに伴い後天的に生じる。つまり、標準模型の世界の秩序は、対称性の破れの賜物^{たまもの}と考えられる。

E_X において、ゲージ対称性の統一によりゲージ結合定数の間に次のような関係が成り立つ。

$$g_s = g = \sqrt{\frac{5}{3}} g' \Big|_{E_X} = g_U. \quad (7)$$

ここで、 g_s, g, g' は、それぞれ、 $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$ のゲージ結合定数である。ゲージ結合定数は量子補正を受けて、エネルギーとともに変化する。 g_s, g, g' の値は $M_Z c^2 = 91.2 \text{ GeV}$ で精密に測定されているので、これらの実測値に基づいて、ゲージ結合定数が統一するモデルを構築すれば、 E_X の値を理論的に予言することができる。これが、6 節で提示した方法 (A) に相当する。例として、標準模型に超対称性を加えて、最も単純な形で拡張したモデルにおいて、 $E_X = 2.1 \times 10^{16} \text{ GeV}$ である。図 1 はその概略を表している。図 1 で、 $\alpha_3 \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}$

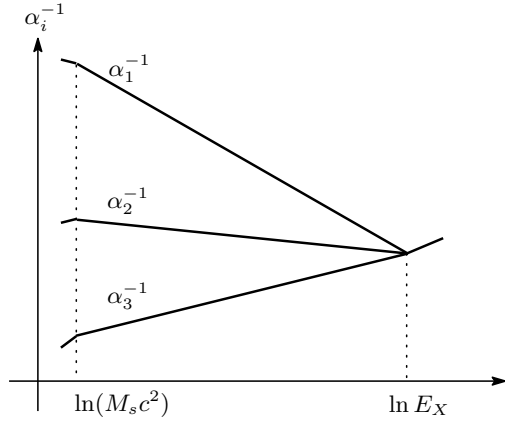


図1 ゲージ結合定数のエネルギー依存性

$\alpha_2 \equiv \frac{g^2}{4\pi}$, $\alpha_1 \equiv \frac{5g'^2}{3 \cdot 4\pi}$ である。超対称性とは、ボソンとフェルミオンの入れ換えに関する対称性である。弱いスケールの安定性を保証し、ゲージ階層性を実現するために、標準模型の粒子のスーパーパートナー（超対称性変換により移る相棒）の質量を $M_s = O(10^3)\text{GeV}/c^2$ と仮定した。

ゲージ結合定数の統一から導かれた E_X の値が、陽子崩壊の実験と矛盾しないかどうか検証する必要がある。大統一理論にはバリオン数の保存則を破る相互作用が存在し、一般に陽子崩壊を予言する。陽子崩壊に寄与する過程は模型に依存する。例えば、 $SU(5)$ に基づく大統一理論において、クォークとレプトンを相互転換させる相互作用を担う粒子として、 X, Y ゲージ粒子が考えられる。これらの粒子は $SU(5)$ 対称性の破れにより、 $O(E_X/c^2)$ の質量を獲得する。 X, Y ゲージ粒子を媒介にした崩壊過程 ($p \rightarrow e^+ + \pi^0$, e^+ は陽電子) から、陽子の寿命は、

$$\tau_p = \frac{C_X}{g_U^4} \frac{\hbar}{m_p c^2} \left(\frac{E_X}{m_p c^2} \right)^4 \quad (8)$$

と因子化される。ここで、 C_X は定数である。超対称性を有する模型においては、カラー荷を有するヒッグス粒子のスーパーパートナー \tilde{H}_C (および標準模型の粒子のスーパーパートナー) が陽子崩壊に関与する。⁵⁾ \tilde{H}_C の質量も $O(E_X/c^2)$ と考えられる。 \tilde{H}_C が関与する崩壊過程 ($p \rightarrow K^+ + \bar{\nu}_\mu$, K^+ は荷電 K 中間子) から、陽子の寿命は、

$$\tau_p = \frac{C_H}{g_U^4 f_u^2 f_d^2} \frac{\hbar}{m_p c^2} \frac{E_X^2 \cdot (M_s c^2)^2}{(m_p c^2)^4} \quad (9)$$

と因子化される。ここで、 C_H は定数、 f_u, f_d は湯川結合定数である。神岡の実験で得られた下限値と $M_s = O(10^3)\text{GeV}/c^2$ を使って、(9) から E_X を評価すると $E_X > O(10^{16})\text{GeV}$ となり、超対称性に基づく最も単純な模型と相性が悪いことがわかる。これが陽子崩壊の問題「理論の予言に反して、陽子はなぜ安定なのか？」である。

詰まる所、課題の正解を持ち合わせていない。

9. おわりに

「ゲージ原理に基づく美しい理論構造」、「ゲージ結合定数の一致を示唆する精密実験」、「ゲージ階層性を実現する超対称性」などの利点を有しながら、陽子崩壊の問題に直面し、大統一理論の現実性が危ぶまれている。

大統一理論の存在を信じ、陽子崩壊の問題を解決するためには、理論の枠組みの拡張を視野に入れて、陽子の安定性を保障する機構を見出す必要がある。それに向けた様々な試みがなされている。ゲージ対称性の破れの機構として、通常、ヒッグス機構が用いられるが、再検討する余地がある。科学の歴史が物語るように予期せぬところから想像を絶する解答がもたらされる可能性があり、今後の進展が楽しみである。

参考文献

- 1) 素粒子物理学に関するより詳細な背景知識については、例えば、川村嘉春：例題形式で学ぶ現代素粒子物理学，サイエンス社 (2006)。
- 2) 素粒子の性質や実験データについては、Particle Data Group のウェブサイト <http://pdg.lbl.gov/> を参照。
- 3) H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438 (1974)。
- 4) 大統一理論に関する解説については、例えば、川村嘉春：「標準理論から大統一理論へ」，数理科学 2006 年 3 月号特集〈強い力〉。
- 5) N. Sakai and T. Yanagida, *Nucl. Phys. B* **197**, 533 (1982); S. Weinberg, *Phys Rev D* **26**, 287 (1982)。

(かわむら・よしはる，信州大学理学部)