

平成 26 年 6 月 17 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540303

研究課題名(和文)量子対称性と可解性

研究課題名(英文)Quantum symmetries and solvability

研究代表者

佐々木 隆 (SASAKI, Ryu)

信州大学・理学部・特任教授

研究者番号：20154007

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：数多くの厳密に解ける一次元量子力学系を具体的に構成し、その持つ量子対称性と可解性の関係を明らかにした。元の固有関数系に離散対称性を作用させ、(擬)仮想状態解を作り、それらを種解として用いた多重変形によって、数多くの可解量子力学系を得た。仮想状態解からは、例外型および多添え字直交多項式系を得た。擬仮想状態解を用いたものからは、多くのロンスキアン・カソラティアン恒等式を導出した。調和(放射)振動子、ポツェル・テラー、モース、エッカート、クーロンポテンシャル、ウィルソン、アスキー・ウィルソン多項式、(q-)ラカー多項式等の変形を論じた。高い見かけの特異性を持つポテンシャルと固有関数系も構成した。

研究成果の概要(英文)：Infinitely many exactly solvable 1-d quantum mechanical systems are constructed explicitly and their quantum symmetries and solvability are discussed in detail. (Pseudo) virtual state wavefunctions are obtained by applying discrete symmetry transformations to the original eigenfunctions. Multi-indexed orthogonal polynomials are obtained by using multiple Darboux transformations in terms of virtual states. Many Wronskian and Casoratian identities are derived through deformations in terms of pseudo virtual states. The original systems are (radial) harmonic oscillator, Poschl-Teller, Morse, Eckart, Coulomb potentials from ordinary quantum mechanics and Wilson, Askey-Wilson and (q-)Racah polynomial systems from discrete quantum mechanics. Multi-indexed Laguerre and Jacobi polynomials having higher degree of apparent singularities are also constructed together with the corresponding potentials.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・素粒子・原子核・宇宙線・宇宙物理

キーワード：可解量子力学 離散量子力学 量子対称性 有理型変形 グループ変換 カソラティアン q-直交多項式 量子dilog関数

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 前年度までの研究で一次元可解量子力学系の主要な性質(シェイプ不変性, 閉性関係式, ハイゼンベルグ演算子解, 生成・消滅演算子, コヒーレント状態, ダルブー変換など)の理解と, それらの離散量子力学での対応物の具体的な構成が出来上がっていた。

(2) しかしながら, 例外型ラゲールおよびジャコビ多項式の発見により, 一次元可解量子力学の世界が飛躍的に広がり, その全貌の理解と離散量子力学での対応物・・・多添え字ウィルソン, アスキー・ウィルソン多項式, 多添え字(q-)ラカー多項式等・・・の具体的な構成が急務になってきた。また, 量子対称性と可解性の密接な関連の表現手段・・・種々の恒等式にも理解が進んだ。

### 2. 研究の目的

(1) 種々の具体的な量子系について, 量子対称性と可解性の表現・働き・応用を明らかにし, 摂動論を超えた場の理論の構成に役立てることである。最近我々が発見した無限個の例外直交多項式および多添え字直交多項式の具体的な構成と種々の性質の解明が直接の目的である。離散量子力学での多添え字直交多項式や, 多自由度の量子力学への拡張などが主な中長期的課題になる。

(2) 2階の微分方程式を満たす直交多項式は, 古典的な4種類のみと信じられてきたが, 我々が発見した無限個の新しいもの達が, 解析学やその応用に, 全く新しい地平を切り開きつつある。更に新しい多項式の発見や, その動的対称性代数の表現, ベーテ仮説法, 量子情報理論等への応用等を目指す。

### 3. 研究の方法

(1) 純粋理論的な課題であり, 新しい対象物・概念に対し, 既存の理論を包括するような新しい理論を作ることになる。具体的な「研究の方法」としては, 仮説の構築とそれらを検証・評価する計算を経て, 新理論の構成に至る。この中で, 「計算機による検算」には, 科学研究費補助金で購入した高性能のワークステーションと最新の数式処理ソフトウェアを用いた。

(2) 仮説の構築には, 多くの専門家との討論, 情報交換が不可欠である。また, 最新の結果を国際研究集会で発表し, 世界中に発信することも重要である。これらに, 科学研究費補助金を用いた。

### 4. 研究成果

(1) 連携研究者の小竹と共著で, 多添え字直交多項式の理論を構成した。通常の量子力学ではタイプ I と II の多添え字ラゲールとジャコビ多項式を作った。離散量子力学では, 代表的な例として, 多添え字ウィルソン, アスキー・ウィルソン多項式, 多添え字(q-)ラ

カー多項式を具体的に構成した。

(2) 台湾のホーと共著で, 例外ラゲール・ジャコビ多項式の零点の持つ興味深い構造を明らかにした。

(3) 中央大の竹村および台湾のホーと共著で, 高い見かけの特異性を持つ多添え字ラゲールとジャコビ多項式の例を多数与えた。

(4) 小竹と共著で, 有限個の離散固有状態を持つ通常の量子力学系, モース, ソリトン, エッカートポテンシャルなどの多添え字変形を与えた。

(5) 小竹と共著で, 量子対称性と可解性とを結びつける多数のロンスキアン・カソラティアン恒等式を擬仮想状態解を用いた多重ダルブー変換と, パラメタシフトをした固有関数系に基づいたクライン・アドラー変換との双対性から導出した。

(6) 多添え字直交多項式とその仲間は可解系の有理変形から得られるが, 多重アブラハム・モーゼス変換を通じて, 多くの非有理変形を具体的に構成した(小竹と共著)。

(7) 台湾の李およびホーと共著で, 種々の可解な散乱問題(モース, ソリトン, エッカート, クーロンポテンシャル等)の多添え字変形を行い, 反射・透過係数を具体的に与えた。

(8) ポルトガルのカゼイロ, フランスのフランソワーズと共著で, 青本・フォレストー系に付随した逆像変換を具体的に与えた。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計16件)

- (1) R. Sasaki, Exactly solvable potentials with finitely many discrete eigenvalues of arbitrary choice, J. Math. Phys. 査読有 55 062101(2014);doi:10.1063/1.4880200
- (2) S. Odake and R. Sasaki, Casoratian identities for the Wilson and Askey-Wilson Polynomials, J. Approximation Theory 査読有 (2014) doi: 10.1016/j.jat.2014.04.009
- (3) C.-L. Ho, J.-C. Lee and R. Sasaki, Scattering amplitudes for multi-indexed extensions of solvable potentials, Annals of Physics 査読有 343 (2014) 115-131. doi: 10.1016/j.aop.2014.01.015
- (4) R. Caseiro, J.-P. Francoise and R. Sasaki, Inversion of a mapping associated with the Aomoto-Forrester system, Rev. in Math. Phys. 査読有 25 No. 10 (2013) 1343009 (10 pages). doi:10.1142/S0129055X13430095
- (5) S. Odake and R. Sasaki, Non-polynomial extensions of solvable potentials a la Abraham-Moses, J. Math. Phys. 査読

- 有 **54** (2013) 102106 (19pp).  
doi:10.1063/1.4826475
- (6) S. Odake and R. Sasaki, Krein-Adler transformations for shape-invariant potentials and pseudo virtual states, J. Phys. 査読有 **A46** (2013) 245201 (24pp)  
doi:10.1088/1751-8113/46/24/245201
- (7) S. Odake and R. Sasaki, Extensions of solvable potentials with finitely many discrete eigenstates, J. Phys. 査読有 **A46** (2013) 235205 (15pp)  
doi:10.1088/1751-8113/46/23/235205
- (8) C.-L. Ho, R. Sasaki and K. Takemura, Confluence of apparent singularities in multi-indexed orthogonal polynomials: the Jacobi case, J. Phys. 査読有 **A46** (2013) 115205 (21pp)  
doi:10.1088/1751-8113/46/11/115205
- (9) S. Odake and R. Sasaki, Multi-indexed Wilson and Askey-Wilson polynomials, J. Phys. 査読有 **A46** (2013) 045204 (22pp).  
doi:10.1088/1751-8113/46/4/045204
- (10) R. Sasaki and K. Takemura, Global solutions of certain second order differential equations with a high degree of apparent singularity, SIGMA 査読有 **8** (2012) 085 (18pp)  
doi:10.3842/SIGMA.2012.085
- (11) C-L. Ho and R. Sasaki, Zeros of the exceptional Laguerre and Jacobi polynomials, ISRN Mathematical Physics 査読有 **2012** 920475 (27pp),  
doi:10.5402/2012/920475.
- (12) S. Odake and R. Sasaki, Multi-indexed (q-)Racah polynomials, J. Phys. 査読有 **A45** (2012) 385201 (21pp).  
doi:10.1088/1751-8113/45/38/385201
- (13) S. Odake and R. Sasaki, Discrete quantum mechanics," (Topical Review) J. Phys. 査読有 **A44** (2011) 353001 (47pp).  
doi:10.1088/1751-8113/44/35/353001
- (14) S. Odake and R. Sasaki, Exactly solvable quantum mechanics and infinite families of multi-indexed orthogonal polynomials, Phys. Lett. 査読有 **B702** (2011) 164-170.  
doi:10.1016/j.physletb.2011.06.075
- (15) S. Odake and R. Sasaki, Exceptional ( $X_1$ ) (q-)Racah polynomials, Prog. Theor. Phys. 査読有 **125** (2011) 851-870. doi:10.1143/PTP.125.851
- (16) S. Odake and R. Sasaki, Dual Christoffel transformations, Prog. Theor. Phys. 査読有 **126** (2011) 1-34.  
doi:10.1143/PTP.126.1
- (17) [学会発表](計 13 件)
- (1) 佐々木隆, Another face of solitons, 第 21 回沼津研究会, 2014 年 3 月 7 日, 国立沼津高専, 沼津.
- (2) R. Sasaki, Scattering amplitudes for multi-indexed extensions of solvable potentials, NCTS Seminar, 2013 December 24, National Chiao-Tung University, Hsinchu, Taiwan.
- (3) R. Sasaki, Exactly Solvable Birth and Death Processes, Special Functions Day, 2013 September 17, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan.
- (4) 佐々木隆, 多添え字直交多項式における見かけの特異点の合流 第 20 回沼津研究会, 2013 年 3 月 7 日, 国立沼津高専, 沼津.
- (5) R. Sasaki, Multi-indexed q-Racah and Askey-Wilson Polynomials, 2013 Joint Mathematical Meeting American Mathematical Society, 2013 January 12, San Diego, USA.
- (6) R. Sasaki, Confluence of apparent singularities in multi-indexed orthogonal polynomials: Jacobi case, Taipei String Seminar, 2012 December 21, National Taiwan University, Taipei, Taiwan.
- (7) R. Sasaki, Exactly solvable quantum mechanics and multi-indexed orthogonal polynomials, XXIX International Conference on Group-Theoretical Methods in Physics, 2012 August 24, Nankai University, Tianjin, China
- (8) 佐々木隆, Exactly solvable quantum mechanics and infinite families of multi-indexed orthogonal polynomials, アクセサリーパラメータ研究会, 2012 年 3 月 16 日, 熊本大学, 熊本.
- (9) 佐々木隆, Exactly solvable quantum mechanics and multi-indexed orthogonal polynomials, 第 19 回沼津研究会, 2012 年 3 月 6 日, 国立沼津高専, 沼津.
- (10) R. Sasaki, Exactly solvable quantum mechanics and infinite families of multi-indexed orthogonal polynomials, Superintegrability, Exact Solvability and Special Functions, 2012 February 21, Institute of Mathematics, UNAM, Cuernavaca, Mexico.
- (11) R. Sasaki, Exactly solvable quantum mechanics and infinite families of multi-indexed

- orthogonal polynomials, Roma Tre Seminar, 2011 September 22, University of Roma Tre, Rome, Italy.
- (12) R. Sasaki, Exactly solvable quantum mechanics and infinite families of multi-indexed orthogonal polynomials, 8<sup>th</sup> Bologna Workshop on CFT and Integrable Models, 2011 September 13, University of Bologna, Italy.
- (13) R. Sasaki, Infinite families of exceptional orthogonal polynomials, International Conference on Asymptotics and Special Functions, 2011 May 31, Hong Kong.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

佐々木 隆 (SASAKI, Ryu)  
信州大学・理学部・特任教授  
研究者番号：20154007

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

高崎 金久 (TAKASAKI, Kanehisa)  
京都大学・人間環境学研究科・教授  
研究者番号：40171433

小竹 悟 (ODAKE, Satoru)  
信州大学・理学部・教授  
研究者番号：40252051