

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 15 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540082

研究課題名(和文) 組み合わせ論的手法による配置空間のトポロジーの研究とその応用

研究課題名(英文) Research on the topology of configuration spaces by means of combinatorial methods and its applications

研究代表者

玉木 大 (TAMAKI, Dai)

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号：10252058

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：胞体複体は、空間を様々な次元の球体と同相な空間に分割したものであり、トポロジーや関連した分野で重要な役割を果たしている。本研究では、その一般化である cellular stratified space の概念を導入し、その基本的な性質を研究した。その最大の成果は、ある条件をみたす cellular stratified space に対し face category と呼ばれる topological category が構成され、その分類空間が元の空間とホモトピー同値になることを証明したことである。そして、これを用いてグラフの配置空間の基本群などを調べた。

研究成果の概要(英文)：A cell complex is a topological space which is a union of balls of various dimensions in a nice way. Such a structure has been proved to be very useful in topology and related fields. In this research, a new notion of cellular stratified spaces is introduced as a generalization of cell complexes. One of the main results is that, for a cellular stratified space satisfying a certain condition, we obtain a topological category, called the face category, whose classifying space can be embedded in the original space as a deformation retract. It means that the classifying space is homotopy equivalent to the original space. This result can be used, for example, to determine the fundamental group of the configuration space of a graph of small size.

研究分野：トポロジー

キーワード：stratified space configuration space small category classifying space

1. 研究開始当初の背景

本研究の主要な研究対象は、配置空間と呼ばれる空間である。より正確には、位相空間 X に対し、その中の互いに異なる n 点の成す空間を X の n 点配置空間と呼ぶ。

(1) X が多様体のときは古くから調べられてきた。

X がユークリッド空間の場合、配置空間の基本群は組紐群と呼ばれ、そのホモロジーも含め 1960 年代に決定された。

一般の多様体の場合には n 点配置空間から 1 点を取り出す写像がファイバー束になるため、そのファイバー束に関する Serre スペクトル系列を用いて帰納的に配置空間のホモロジーが計算されてきた。これは 1970 年代から 1980 年代のことである。

配置空間は X の n 個の直積からどこかの座標が等しくなる点から成る部分空間を除いてできる空間であるが、ユークリッド空間における超平面やアフィン部分空間の補集合は、超平面配置や部分空間配置として、代数幾何学的手法や組合せ論的手法で調べられてきた。 X がユークリッド空間の場合の n 点配置空間はこの種の超平面配置の補集合とみなすことができるため、超平面配置や部分空間配置の研究は配置空間の研究と関連が深い。この分野での主要な結果として、1987 年の Salvetti による構成がある。彼は、実超平面配置の複素化として得られる複素超平面配置に対し、その補集合とホモトピー同値になる CW 複体、Salvetti 複体、を構成した。それを用い、基本群等を決定することができる。

(2) X が特異点を持つ場合には、多様体の場合に用いられてきた方法、特にファイバー束を用いた(1)-2の方法が通用しないため、全く新しい方法が必要だった。

特異点を持つ場合の配置空間の研究は、20 世紀末の Ghrist の研究が最初だった。Ghrist は 1 次元胞体複体、すなわちグラフの配置空間のホモトピー次元の評価などを得た。

2001 年の Stanford 大学の Ph.D. thesis で Abrams がグラフの配置空間の離散モデルを構成した。

それ以降 Abrams の離散モデルを用いてグラフの配置空間の基本群が様々な研究者により調べられてきた。

2. 研究の目的

(1) 本研究の第一の目的は、組合せ論的トポロジーにおいて基本的な役割を果たしている胞体複体の理論を一般化することにより cellular stratified space の理論を構築し、それを配置空間のトポロジーの研究に応用する手法を開発することである。

(2) そして、それを用いて配置空間が用いられている様々な問題、すなわち symmetric topological complexity やその高次版など、や cellular stratified space が本質的な役割を果たしている問題、例えば超平面配置や Cohen-Jones-Segal の Morse 理論など、に応用することが第二の目的である。

3. 研究の方法

本研究は、大きく分けて次の三つの部分から成る:

- (1) 胞体複体の理論を cellular stratified space に一般化する。
- (2) それを配置空間に応用する手法を開発する。
- (3) cellular stratified space の face category の性質を調べる。

以下、それぞれについて、本研究で行なった具体的な研究方法について述べる。

(1) cellular stratified space は、研究代表者が導入した概念であり、胞体複体を一般するものである。具体的には、以下のことを行なう。

face poset を一般化し face category $C(X)$ を定義する。

その分類空間 $BC(X)$ が X の deformation retract になっていることを証明する。

(2) 配置空間に以下の手順で cellular stratification の構造を定義する。

X に胞体分割、より一般に cellular stratification を定義し、それにより X^n に cellular stratification を定義する。

X^n の胞体は X の胞体の直積であり、それぞれユークリッド空間の直積とみなすことができる。よって X の n 点配置空間は超平面配置の補集合の和集合に分割される。この分割により配置空間の上に cellular stratified space の構造が定義されることを示す。

(3) cellular stratified space X の face category $C(X)$ について、以下のことを調べる。

regular cell complex X に対し、その face poset $F(X)$ の分類空間 $BF(X)$ は X の重心細分であることあら、cellular stratified space X の分類空間 $BC(X)$ 上に胞体分

割を定義し、元の X の cellular stratification との関係調べる。regular cell complex に対しては、その重心細分を用いると双対胞体分割が定義される。それを cellular stratified space に対しても face category を用いて一般化する。

4. 研究成果

研究目的で挙げた (1) と (2) の目的それぞれについて、得られた成果は以下の通りである:

(1) cellular stratified space の理論については、以下のことが得られた。

cellular stratified space に対し cylindrically normal という条件を定義し、その条件の元で face category $C(X)$ を topological category として定義した。

face category の分類空間 $BC(X)$ の X への自然な埋め込みを構成した。更に X が locally polyhedral という条件をみたすとき、 X は $BC(X)$ に強変異レトラクトすることを示した。

cylindrically normal cellular stratified space X と Y に対し、その直積 $X \times Y$ の stratification が cylindrically normal になる条件を求めた。

cylindrically normal cellular stratified space X の stratified subspace A について、 A が cylindrically normal になるための条件を求めた。

cylindrically normal cellular stratified space X に対し、その stratified space としての細分が cylindrically normal cellular stratified space になるための条件を求めた。

星型の胞体を持つ stratified space を stellar stratified space として定義し、以上の結果を stellar stratified space に一般化した。

cylindrically normal cellular stratified space X に対し、その face category の分類空間 $BC(X)$ 上に stellar stratified space の構造を定義し、 X が locally polyhedral ならば、その stellar stratified space も locally polyhedral になり、その dual が X に同型であることを示した。

(2) cellular および stellar stratified space の理論を用いて以下のことが得られた。

cylindrically normal の特別な場

合として totally normal という条件を定義し、totally normal cellular stratified space に対しては、その face category の位相が離散位相になることを示した。1次元の cellular stratified space, すなわちグラフは常に totally normal であることを示した。また、その直積も totally normal であることを確認した。グラフ X の直積 X^n に対し、 n 点配置空間を stratified subspace として含む細分を定義し、それが totally normal であることを示した。

以上のことを用い、グラフの配置空間の新しい離散モデルを定義した。

グラフの配置空間について、そのホモトピー次元が頂点の個数以下になるという Ghrist の定理の簡単な別証が得られた。

頂点の数が2以下のグラフについて、その2点配置空間の基本群の具体的な表示を求めた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7件)

Mizuki Furuse, Takashi Mukouyama, and Dai Tamaki, Totally normal cellular stratified spaces and applications to the configuration space of graphs. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 45 巻, 169-214, 2015, 査読有。

Ibai Basabe, Jesus Gonzalez, Yuli Rudyak, and Dai Tamaki, Higher topological complexity and its symmetrization, Algebraic and Geometric Topology, 14 巻, 2014, 2103-2124, 査読有。

Dai Tamaki, Two-sided bar constructions for partial monoids and applications to K-homology, "Noncommutative Geometry and Physics 3", 197-235, 2013, 査読有。
Dai Tamaki, Twisting Segal's K-homology theory, "Noncommutative Geometry and Physics 3", 177-195, 2013, 査読有。

Dai Tamaki, On the homology of configuration spaces associated to center of mass, Proceedings of MSJ-SI 2009 "Arrangement of Hyperplanes", 62 巻, 417-457, Advanced Studies in Pure Mathematics, the Mathematical Society of Japan, 2012, 査読有。

Dai Tamaki, The Salvetti complex and the little cubes, Journal of the European Mathematical Society, 14 巻, 801-840, 2012, 査読有.

Dai Tamaki, Combinatorial Configuration Spaces, Proceedings of 2011 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, 2000-2003, 2011, 査読有.

[学会発表](計 17 件)

玉木 大, トポロジカル相から K 理論へ, Summer School 数理物理 2014, 2014.8.29~31, 東京大学数理科学研究科.

Dai Tamaki, Discrete Morse theory a la Cohen-Jones-Segal, Workshop on Algebraic Topology and its Applications, 2014.8.8, Dalian University of Technology.

Dai Tamaki, Cellular stratified spaces and their applications I, II, Workshop on Algebraic Topology and its Applications, 2014.8.6~7, Dalian University of Technology.

Dai Tamaki, On parametrized functors, The Fifth East Asian Conference on Algebraic Topology, 2013.12.2, Chinese Academy of Science, Beijing.

Dai Tamaki, K-theory and topological phases, トポロジカルオーダー勉強会, 2013.11.25~26, アクティブラザ琵琶. 玉木 大, 本当にモデル圏でいいの?, SMART 研究会「応用現代幾何学」, 2013.9.5, 東北大学.

Dai Tamaki, Applications of cellular stratified spaces, International Conference on Topology and Geometry 2013 (JAMEX 6), 2013.9.2, 島根大学.

Dai Tamaki, Some applications of cellular stratified spaces, Applied Topology, 2013.7.23, Conference Center in Bedlewo, Poland.

Dai Tamaki, An invitation to topology, The International Kasetsart University Science and Technology Annual Research Symposium, 2013.3.28, Kasetsart 大学, タイ王国.

Dai Tamaki, Cellular stratified spaces III, 福岡ホモトピー論セミナー, 2013.1.13, 福岡大学セミナーハウス.

Dai Tamaki, Bicategories and topological categories in combinatorial algebraic topology, 信州 応用トポロジーセミナー, 2012.11.23, 信州大学.

Dai Tamaki, A Salvetti-type model for configuration spaces, Applied and computational topology: ATMCS 5,

2012.7.5, International Center for Mathematical Sciences, Edinburgh.

Dai Tamaki, Stellar stratified spaces, 福岡ホモトピー論セミナー, 2012.1.8, 福岡大学セミナーハウス.

Dai Tamaki, Combinatorial configuration spaces, 2011 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, 2011.9.5, 神戸市産業振興センター.

Dai Tamaki, A user's guide to cellular stratified spaces, Applied Topology, 2011.9.1, JR 博多駅ビル 博多シティ会議室.

玉木 大, トポロジーは応用できるか?, 日本数学会市民講演会, 2011.10.1, 松本市中央公民館.

Dai Tamaki, Cellular stratified spaces, RIMS 研究集会 変換群の幾何と組合せ論, 2011.6.17, 京都大学数理解析研究所.

[その他]

ホームページ等

<http://arxiv.org/abs/1106.3772>

<http://arxiv.org/abs/1111.4774>

<http://arxiv.org/abs/1312.7368>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

玉木 大 (TAMAKI, Dai)

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号: 10252058