

平成 27 年 6 月 18 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740051

研究課題名(和文) Chern-Simons型理論の量子化にもとづくモジュラー圏の幾何学的構成

研究課題名(英文) Geometric construction of modular functors based on Chern-Simons type theories

研究代表者

五味 清紀 (GOMI, Kiyonori)

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号：00543109

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：まず、ねじれK理論の有限次元モデルに対して定義したChern指標の基本的な性質を示し、Mickelsson不変量として知られていた不変量に代数トポロジー的解釈を与え、その一般化を構成した。さらに、「実」円周束等に対する位相的T双対を証明した。また、「実」および「四元数」ベクトル束を低次元において分類し、「四元数」ベクトル束の分類に基本的な役割を果たすFKMM不変量を詳しく調べた。さらに、カイラルベクトル束の概念を導入し、同様の分類を行った。また、ねじれK理論の計算により、Z/2で分類される新しい位相的絶縁現象を発見した。

研究成果の概要(英文)：First, I proved a basic property of the Chern character defined for a finite dimensional model of twisted K-theory, and gave an algebro-topological interpretation of so-called Mickelsson's invariant and its generalization. I also proved topological T-dualities for "Real" circle bundles, etc. Then, we classified "Real" and "Quaternionic" vector bundles in low dimension, and studied in detail the FKMM invariant that plays a basic role in the classification of "Quaternionic" bundles. Moreover, we introduced chiral vector bundles and carried out the same classification as above. We also computed twisted K-theory to discover a new topological insulating phenomena classified by Z/2.

研究分野：位相幾何学

キーワード：K理論 ねじれK理論 「実」ベクトル束 「四元数」ベクトル束 FKMM不変量 カイラルベクトル束 位相的絶縁体

## 1. 研究開始当初の背景

D次元の位相的量子場の理論は、D次元多様体の不変量を与えるような数学的な枠組みである。重要かつ基本的な例は、3次元 Chern-Simons 理論から示唆される3次元位相的量子場の理論である。D次元位相的量子場の理論の定義には、通常D次元多様体と(D-1)次元多様体についての情報のみが使われる。しかしより低い次元の多様体の情報を用いるように、位相的量子場の理論を一般化することができる(位相的量子場の理論の拡張)。例えば、有限群をゲージ群にするような Chern-Simons 理論(Dijkgraaf-Witten 理論)から構成した3次元位相的量子場の理論については、その拡張が知られていた。興味深いことに、このような拡張のデータを使うと、3次元位相的量子場の理論を構成する代数的なデータが、幾何学的に再構成できる。

## 2. 研究の目的

ゲージ群が有限群ではない場合、特に SU(2) や U(1) などの場合に、Chern-Simons 理論を背景にもつ3次元位相的量子場の理論の拡張を構成することが目的だった。

## 3. 研究の方法

有限群をゲージ群とする場合の構成の類似として、SU(2)やU(1)等のコンパクト Lie 群をゲージ群とする場合へアプローチする計画だった。そのアプローチでは、1次元多様体に付随してある圏を構成する。有限群の場合との類似では、この圏の対象は、考えるゲージ群の共役作用について同変なねじれK理論の要素に対応すると予想できる。ねじれK理論を実現する幾何学的な対象は、私がこれまで研究しており、この対象の適当な射を定義することで得られる圏を出発点とする予定であった。

## 4. 研究成果

上記の研究方法に従って、ねじれK理論を実現するような幾何学的な対象に、適当な射を定義して圏を構成することが、想定以上に難しいことが判明した。

そのため、ねじれK理論についてのより深い知識が必要であると考え、ねじれK理論およびそれに関連する幾何学的対象の研究を集中的に行った。これによって得られた成果は以下のとおりである。

- (1) ねじれK理論を実現する幾何学的対象については、これまでの研究により、接続

を導入することができ、Chern 指標を構成することができる。この Chern 指標が、これまでに知られている、別の方法によるねじれK理論の Chern 指標を一致することを証明した。

- (2) Mickelsson 不変量と呼ばれるねじれK理論の要素に対する不変量が存在する。この不変量は、微分形式を用いて定義されていたが、Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列を使う代数トポロジ的な解釈を持つことを証明した。また、Mickelsson 不変量の一般化を構成した。
- (3) 「実」円周束という、位数2の巡回群 Z/2 の作用を持つ主円周束と、Z/2 同変ねじれK理論について、位相的 T 双対を定式化して証明した。これは軌道体弦理論における T 双対に動機づけられ、Z/2 同変ねじれK理論は、その亜種と双対になる。また、同様な手法を用いて、「実」円周束と Z/2 同変円周束に対して、ある種の位相的 T 双対があることを示した。
- (4) 「実」ベクトル束と「四元数」ベクトル束を適当な仮定のもと、低次元において完全に分類した。これらのベクトル束が定めるK理論は、位相的絶縁体の AI および AII と呼ばれるクラスのカテゴリに分類されるが、ベクトル束レベルでの分類はK理論による分類を精密化していると考えられる。「四元数」ベクトル束のカテゴリにおいては、古田・亀谷・松江・南によって導入された不変量(FKMM 不変量)を用いる。この不変量を、一般的に再定式化し、この不変量から得られる Fu-Kane-Mele 型の Z/2 不変量が、Wess-Zumino-Witten 項および Chern-Simons 不変量と一致することを示した。(Giuseppe De Nittis 氏との共同研究)
- (5) 位相的絶縁体の AIII と呼ばれるクラスのカテゴリへの応用を目的として、カイラルベクトル束という概念を導入した。このベクトル束のカテゴリ空間を幾何学的に実現し、そのコホモロジー環を計算し、カイラルベクトル束の特性類を導入した。また、低次元においてカイラルベクトル束を分類した。(Giuseppe De Nittis 氏との共同研究)
- (6) 同変ねじれK理論の計算により、新しいタイプの Z/2 で分類される位相的(結晶)絶縁体を理論的に発見した。「新しい」という意味であるが、Z/2 で分類される位相的絶縁体の系は、時間反転対称性か粒子・正孔対称性を含む必要があると考えられていたが、そのような対称性が全く含まれない、という意味である。(塩崎謙

氏と佐藤昌利氏との共同研究)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

以下は全て査読のある雑誌論文に掲載されたものである。

(1) Giuseppe De Nittis, 五味 清紀.  
`Classification of "Real" Bloch-bundles:  
Topological quantum systems of type AI.''  
Communications in Mathematical Physics.  
(掲載決定)

(2) 塩崎謙, 佐藤昌利, 五味 清紀.  
`Z<sub>2</sub>-topology in nonsymmorphic  
crystalline insulators: Mobius twist in  
surface states.''  
Physics Review B. 91, 155120. (2015)

<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.91.155120>

(3) 五味 清紀.  
`A variant of K-theory and topological  
T-duality for Real circle bundles.''  
Communications in Mathematical Physics.  
334 (2015), no.2, 923--975.

10.1007/s00220-014-2153-3

(4) Giuseppe De Nittis, 五味 清紀.  
`Classification of "Real" Bloch-bundles:  
Topological quantum systems of type AI.''  
Journal of Geometry and Physics. 86 (2014),  
303-338.

[doi:10.1016/j.geomphys.2014.07.036](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.07.036)

(5) 五味 清紀.  
`Clifford modules, finite-dimensional  
approximation and twisted K-theory.''  
Journal of Mathematical Sciences, The  
University of Tokyo,  
19 (2012), no.4, 587--612.

[学会発表](計 20 件)

(1) 五味 清紀. `The FKMM invariant'.  
Mini-workshop on Topological States  
and Non-commutative Geometry. 東北大学,  
2015年3月25日

(2) 五味 清紀. `実"円周束の位相的 T 双対'.  
量子化の幾何学 2014, 早稲田大学, 2014  
年12月20日.

(3) 五味 清紀. `A variant of K-theory and  
topological T-duality for "Real"  
circle bundles'. Seminar,  
Friedrich-Alexander-Universitat  
Erlangen-Nurmburg, Germany, 2014年12  
月4日.

(4) 五味 清紀. `実"円周束の位相的 T 双対'.  
信州トポロジーセミナー, 信州大学,  
2014年11月13日.

(5) 五味 清紀. `実"円周束の位相的 T 双対'.  
阪大幾何セミナー, 大阪大学, 2014年10  
月27日.

(6) 五味 清紀. `The FKMM invariant of  
"symplectic" vector bundles'. The  
Second China-Japan Conference on  
Noncommutative Geometry and K-theory,  
沖縄, 2014年10月5日.

(7) 五味 清紀. `The FKMM invariant in low  
dimension'. Differential geometry  
seminars, The University of Adelaide,  
Australia, 2014年9月12日.

(8) 五味 清紀. `Topological T-duality for  
Real circle bundles'. Further  
development of Atiyah-Singer index  
theorem and K-theory, 京都大学, 2013  
年12月19日.

(9) 五味 清紀. `Mickelsson's twisted  
K-theory invariant'. The 6th  
Pacific RIM Conference on Mathematics  
2013, 札幌コンベンションセンター,  
2013年7月2日.

(10) 五味 清紀. `Introduction to  
Costello's formulation of  
perturbative quantum field theory'.  
信州数理物理セミナー, 信州大学, 2013  
年5月13日.

(11) 五味 清紀. `Mickelsson's twisted  
K-theory invariant and its  
generalization'. MS Seminar, IPMU,  
2013年3月5日.

(12) 五味 清紀. `Mickelsson's twisted  
K-theory invariant and its

generalization''. Discrete Geometry and Dynamical Systems, 京都大学, 2013年1月25日.

(13) 五味 清紀. ``Chern-Simons-Dirac theory''. 談話会, 京都大学, 2012年12月5日.

(14) 五味 清紀. ``Construction of TQFT from cohomology''. 幾何セミナー, 明治大学, 2012年6月24日.

(15) 五味 清紀. ``Construction of TQFT from cohomology''. 信州トポロジーセミナー, 信州大学, 2012年6月6日.

(16) 五味 清紀. ``Differential K-theory and the Adams operation''. Topology and Analysis on Foliations, 名古屋大学, 2012年3月24日.

(17) 五味 清紀. ``Differential K-theory and the Adams operation''. East Asian Conference on Algebraic Topology, 4, 東京大学, 2011年12月8日.

(18) 五味 清紀. ``Differential K-theory and the Adams operation''. 量子化の幾何学 2011, 早稲田大学, 2011年11月18日.

(19)

(20) 五味 清紀. ``微分コホモロジーとコホモロジー作用素''. 談話会, 信州大学, 2011年10月28日.

(21) 五味 清紀. ``Remarks on characteristic classes for twisted K-theory''. Mejiro mini-workshop on geometry and topology, 学習院大学, 2011年5月29日.

[その他]  
ホームページ等

<http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

五味 清紀 (GOMI, Kiyonori)

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号: 00543109