

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 15 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740178

研究課題名(和文) 超弦理論における量子的な時空の幾何学

研究課題名(英文) Quantum geometry of spacetime in superstring theory

研究代表者

奥山 和美 (OKUYAMA, Kazumi)

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号：70447720

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：超弦理論とその強結合領域を記述するM理論において、ゲージ理論と重力理論のホログラフィー対応を用いて、古典重力を超えた量子的な重力の補正を調べることができる。この研究では、4次元の反ド・ジッター時空上のM理論に現れる量子補正を、そのゲージ理論側の双対である所謂ABJM理論の分配関数の計算から解析した。その結果、重力の摂動的なループ補正に加えて現れる非摂動的な補正についての詳細な理解が得られた。この非摂動的な補正には世界面のインスタントンと膜のインスタントンの2種類があり、その係数を結合定数の関数として完全に決定することができた。これはM理論の非摂動的な理解への重要な一歩であると考えられる。

研究成果の概要(英文)：In superstring theory and its strong coupling limit, known as M-theory, we can study the quantum gravity effects beyond classical gravity via the holographic duality between gauge theory and gravity. In this work, we have studied the quantum corrections in M-theory on 4-dimensional anti-de Sitter space from the analysis of the partition function of the dual gauge theory, so-called ABJM theory. We have arrived at a very detailed understanding of the non-perturbative corrections beyond the perturbative loop corrections in gravity. There are two types of such non-perturbative corrections, worldsheet instantons and membrane instantons, and we have determined the complete analytic forms of instanton coefficients as functions of coupling. We believe that this is a very important first step towards the non-perturbative definition of M-theory.

研究分野：素粒子理論

キーワード：M理論 AdS/CFT対応 非摂動効果 膜のインスタントン

1. 研究開始当初の背景

超弦理論は重力を量子論的に矛盾なく記述することができ、素粒子の統一理論として有望であると考えられているが、非摂動的な定式化がわかっていないことが最大の問題である。超弦理論の結合定数が大きい領域を記述する M 理論の存在が 90 年代に認識されたが、その本質的な理解にはいまだに至っていないのが現状である。しかしながら、2008 年になって M 理論の基礎的な励起である M2 プレーンと呼ばれる膜状の物体についての理解が進捗し、ABJM 理論という 3 次元のゲージ理論を用いて M2 プレーンのダイナミクスが記述できることが発見された。さらに超対称性の性質を用いた球面上の分配関数の厳密な計算法が開発されたことにより、いわゆるゲージ・重力対応を通じて M 理論の量子的な振る舞いを非摂動的に具体的な計算から調べる道筋が見えてきた。3 次元球面上の ABJM 理論の分配関数は一種の行列模型として表され、 N が大きいときの自由エネルギーが N の $3/2$ 乗でスケールし、重力理論での計算から期待される M2 プレーンの自由度と一致することが示されるなど、本研究を始めるにあたって大きな発展の可能性を感じさせる状況ができつつあったことが背景として挙げられる。

2. 研究の目的

このような背景を踏まえて、本研究では M 理論の非摂動的な振る舞いを、3 次元球面上の分配関数の解析からゲージ・重力対応を通して調べることが目的である。超弦理論や M 理論はその非摂動的な定式化は知られていないが、反ド・ジッター時空に限定するとゲージ・重力対応によって対応するあるゲージ理論がそのような背景時空上の超弦理論や M 理論の非摂動的な定義を与えると考えることができる。これは限定された状況ではあるが、M 理論における重力の量子論的な効果を定量的に計算することで、一般に重力の量子効果がどのような形で現れるか、超弦理論の結合定数が小さい場合の理論の振る舞いがどのようになっているか、など多くの知見が得られると期待される。特に、超弦理論の結合定数について非摂動的な効果として時空の様々なサイクルにプレーンが巻き付くことによって生じるインスタントン効果があると予想される。このようなインスタントン効果を M 理論から直接計算することは困難であるが、それに双対なゲージ理論の 3 次元球面の分配関数の計算から読み取ることは可能であり、インスタントン効果を詳細に調べることによって M 理論の非摂動的な構

造を理解し、より一般的な状況での M 理論の非摂動的定式化への手がかりを得ることが本研究の目的である。

3. 研究の方法

3 次元球面上の ABJM 理論の分配関数は超対称性を用いた局所化の手法により、一種の行列模型として表される。この模型は通常のエルミート行列模型とは被積分関数の形が異なりそのままでは解析が難しいが、ゲージ群のランク N について和を取った大分配関数を考えると相互作用の無い理想フェルミ気体として記述できる。このフェルミ気体の表式は、有限の N での分配関数の厳密計算やプランク定数が小さいときの半古典展開など、様々なパラメータ領域での計算に適しており、非常に強力な手法を与えている。また、ABJM 理論の分配関数は局所カラビ・ヤウ空間上の位相的弦理論と関係しており、この関係を用いるとフェルミ気体の手法では計算の難しいプランク定数が大きい領域もカバーすることができる。最終的にこれらの情報を総合することにより、ABJM 理論の分配関数に現れる非摂動的なインスタントン効果を完全に決定することができた。

4. 研究成果

上記のフェルミ気体の方法を用いて、ABJM 理論の分配関数を有限の N である大きな N まで厳密に計算する手法を開発した。この方法で、例えば ABJM 理論でチャー・サイモンズ・レベルが 1 の場合には $N=44$ まで分配関数の厳密値を計算した。この厳密値から自由エネルギーを求めて N の関数としてグラフをプロットすると、M 理論の重力解から期待される N の $3/2$ 乗の振る舞いが見事に再現された。さらに、この振る舞いからのずれを見ることにより、大分配関数には 3 種類のインスタントン補正が現れることが判明した。

一つ目は、世界面のインスタントンと呼ばれるもので、M 理論をタイプ IIA 型の超弦理論に次元を落とした際に弦の世界面がある 2 次元サイクルに巻き付くことにより現れるインスタントン効果であると解釈される。これは、通常の位相的弦理論の手法で計算することが可能であり、その係数はいわゆる Gopakumar-Vafa 公式によって与えられる。

2 番目のインスタントン効果は、膜のインスタントンと呼ばれており、M 理論に現れる M2 プレーンが 3 次元的なサイクルに巻き付くことにより生じる。この膜のインスタントンの係数は、フェルミ気体の半古典展開により系統的に計算す

ることが可能であるが、関数形を閉じた形で求めることはそのままでは困難である。しかし、我々は分配関数が結合定数の関数として常に有限であることに着目し、結合定数がある有理数のとき現れる世界面のインスタントンの係数の発散が、ちょうど膜のインスタントンの係数の発散と相殺するべきであると考えた。これは膜のインスタントンの係数の関数形に対する強い制限を与え、この条件と半古典展開を組み合わせることにより膜のインスタントンの関数形を決定することに成功した。これは我々の頭文字を取ってHMO相殺機構と名付けられている。

3番目のインスタントンとして、世界面のインスタントンと膜にインスタントンの束縛状態も存在している。これは、フェルミ気体の半古典展開や位相的弦理論との対応では係数を計算することが困難であるが、分配関数の厳密値とHMO相殺機構を組み合わせることにより、大分配関数に現れる化学ポテンシャルを有効的な化学ポテンシャルに置き換えることにより、形式的に除去することができることが判明した。

これらのインスタントン効果の決定は初めは発見法的に行っていたが、のちにその背後にある数学的構造が明らかになった。膜のインスタントンはいわゆる精細化された位相的弦理論のNekrasov-Shatashvili 極限と関係しており、それはさらにフェルミ気体のフェルミ面を複素化して現れるリーマン面の量子化と関係していることを発見した。インスタントンの束縛状態を取り除くための有効的な化学ポテンシャルはリーマン面上の周期積分の量子化で与えられ、膜のインスタントンの大分配関数への寄与もそれに双対な量子化された周期積分で与えられることがわかった。

この構造はABJM理論の変形であるABJ理論でも成り立つことを確かめた。また、この構造はモデルの詳細には依存しない形で書き表せるため、より一般の局所カラビ・ヤウ空間上の位相的弦理論の非摂動的な定義を与えると期待される。しかし、HMO相殺機構がうまく働くためには一般の場合では世界面のインスタントンの寄与のほうにB場を導入する必要があることを指摘した。

以上のように、ABJ(M)理論における非摂動効果については結合定数の関数としてインスタントンの係数を完全に決定することができた。しかしながら、これを少し変形した模型、例えば超対称性がABJM理論よりも低い場合にどうなっているかは非常に複雑で解析することは容易ではない。そこで、まず最初のステ

ップとして超対称性が $N=4$ である簡単な模型としていわゆる N_f 行列模型を調べた。これは、D2プレーンとD6プレーンの複合系を記述するゲージ理論の3次元球面上の分配関数を記述する行列模型であり、ABJM理論と同様に大分配関数を考えることによりフェルミ気体として表すことができる。この模型に対して、分配関数を有限の N で厳密に計算する手法、および半古典展開を計算する手法を開発し、世界面と膜のインスタントンの係数を結合定数の関数としてインスタントン数が小さいときに厳密に決定することに成功した。この模型は残念ながら位相的弦理論との簡単な関係は知られておらず、インスタントンの係数はABJM理論のそれとはかなり形が違っている。特に、結合定数の関数として三角関数だけでなくガンマ関数が現れることが特徴的である。この背後にある物理的・数学的な構造を明らかにすることは今後の重要な課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

Yasuyuki Hatsuda, Kazumi Okuyama, Probing non-perturbative effects in M-theory, JHEP 1410, 158, 2014. 査読有
DOI:10.1007/JHEP10(2014)158

Yasuyuki Hatsuda, Marcos Marino, Sanefumi Moriyama, Kazumi Okuyama, Non-perturbative effects in the refined topological string, JHEP 1409, 168, 2014. 査読有
DOI:10.1007/JHEP09(2014)168

Masazumi Honda, Kazumi Okuyama, Exact results on ABJ theory and the refined topological string, JHEP 1408, 148, 2014. 査読有
DOI:10.1007/JHEP08(2014)148

Yasuyuki Hatsuda, Masazumi Honda, Sanefumi Moriyama, Kazumi Okuyama, ABJM Wilson Loops in Arbitrary Representations, JHEP 1310, 168, 2013. 査読有
DOI:10.1007/JHEP10(2013)168

Yasuyuki Hatsuda, Sanefumi Moriyama, Kazumi Okuyama, Instanton Bound States in ABJM Theory, JHEP 1305, 054, 2013. 査読有
DOI:10.1007/JHEP05(2013)054

Yasuyuki Hatsuda, Sanefumi Moriyama, Kazumi Okuyama, Instanton Effects in ABJM Theory from Fermi Gas Approach, JHEP 1301, 158, 2013. 査読有
DOI:10.1007/JHEP01(2013)158

Yasuyuki Hatsuda, Sanefumi Moriyama,

Kazumi Okuyama, Exact Results on the
ABJM Fermi Gas, JHEP 1210, 020, 2012.
査読有

DOI:10.1007/JHEP10(2012)020

Kazumi Okuyama, A Note on the Partition
function of ABJM Theory on S^3 , Prog.
Theor. Phys. 127, 229-242, 2012. 査読
有

DOI:10.1143/PTP.127.229

[学会発表](計2件)

奥山和美, M理論の分配関数を計算する、
日本物理学会第69回年次大会、
2014.3.29、東海大学湘南キャンパス(神
奈川県平塚市)

初田泰幸、奥山和美、森山翔文、ABJM
行列模型の厳密な結果、日本物理学会秋
季大会、2012.9.13、京都産業大学(京都
市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

奥山 和美 (OKUYAMA, Kazumi)

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号: 70447720