

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 16 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540216

研究課題名(和文)バナッハ空間及び関数空間の幾何学的構造の研究と直和の応用

研究課題名(英文) Research on geometric structures of Banach and function spaces with application of their  $[\psi]$ -direct sums

研究代表者

加藤 幹雄 (KATO, Mikio)

信州大学・工学部・教授

研究者番号：50090551

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：任意有限個のバナッハ空間に対して直和のweak nearly uniform smoothnessを特徴づけた。その際、partial  $[\ell]_1$ -normの概念とそれらのノルムに対応する凸関数の族を導入した。応用として、それらの凸関数を構成することにより、uniformly non-squareでないが不動点性をもつバナッハ空間の例を豊富に与えた。また、modulus of smoothnessに関する幾何学的定数 $A(X)$ を導入して一連の成果を得た他、 $C_2$ 上のabsolute normのvon Neumann-Jordan定数に関する従来の結果を包含する定理を与え、それらを改良した。

研究成果の概要(英文)：We characterized the weak nearly uniform smoothness of  $[\psi]$ -direct sums of finitely many Banach spaces, where we introduced a class of convex functions which yield partial  $[\ell]_1$  norms on  $C_n$ . As an application, by constructing such a convex function we presented a plenty of Banach spaces with the fixed point property for nonexpansive mappings which are not uniformly non-square.

We introduced a geometric constant  $A(X)$  which is connected to the modulus of smoothness and obtained a sequence of results, and also concerning the von Neumann-Jordan constant of absolute norms on  $C_2$  we obtained a result which contains a couple of previous results.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：バナッハ空間の直和 uniform non-squareness WN uniform smoothness von Neumann-Jordan定数 absolute norm 凸関数 partial  $[\ell]_1$  norm バナッハ空間の幾何学的定数

1. 研究開始当初の背景  
バナッハ空間の幾何学において不動点性は最も広く扱われている研究対象の一つである。Uniformly non-square (UNSQ)なバナッハ空間が不動点性をもつことは近年の大きな研究成果であるが、バナッハ空間の直和を用いて、不動点性をもつが UNSQ でない空間が構成されるなど(筆者等) 不動点性を導くための UNSQ 性より弱い十分条件が考察されている。また、von Neumann-Jordan (NJ)定数やJames 定数など種々の幾何学的定数の研究が目覚ましい。
2. 研究の目的  
不動点性に関わる幾何学的性質、また幾何学的定数について研究を進める。 $[ell]_p$  直和の概念の拡張である  $[psi]$  直和の研究を進め、その理論体系を整備していく。
3. 研究の方法  
研究分担者・協力者等と緊密に打ち合わせを行い、着実に研究を進めていく。また、国内外の会議に出席して研究成果を発表するとともに、当該分野に関して情報交換を行う。
4. 研究成果  
(1) 任意有限個のバナッハ空間の  $[psi]$  直和に対して weak nearly uniform smoothness を特徴づけた。その際、 $C^n$  上の partial  $[ell]_1$  ノルム概念とそれに対応する凸関数の族を導入して、その有用性を示した。応用として、凸関数を用いて、uniformly non-square (UNSQ) でないが不動点性をもつバナッハ空間が豊富に構成できることを示した (Comment. Math., 2012)。これにより、UNSQ 性が不動点性を導く十分条件としてまだかなり強いことが示された。  
  
(2) Partial  $[ell]_1$  ノルムを生成する凸関数の族について、一連の結果を得た (Banach and Function Spaces IV, 2004)。  
  
(3)  $C^2$  上の absolute norm の NJ 定数に関する従来の 2 つの定理を包含する結果を与えた。また、James 定数について同様の結果を得た (Mediterr. J. Math., 2014)。  
  
(4) Modulus of smoothness に関わる新たな幾何学的定数  $A(X)$  を導入して、一連の結果を得た。とくに、高橋・加藤による NJ 定数と James 定数に関する不等式 (JMAA 359, 2009) の簡潔な別証明を与えた (Acta Math. Sinica English Series, to appear)。

(5)  $[psi]$  ノルムが strictly monotone である場合、任意有限個のバナッハ空間の  $[psi]$  直和に対して UNSQ 性及び uniform non- $[ell]_{n_1}$  性を特徴づけた (preprint)。

(6) これらの成果を国際会議(招待講演)や日本数学会年会・秋季総合分科会等で発表した。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

1. Y. Takahashi and M. Kato, On a new geometric constant related to the modulus of smoothness of a Banach space, Acta Math. Sinica, English Series, 査読有, to appear in 2014.

2. T. Ikeda and M. Kato, Notes on von Neumann-Jordan and James constants for absolute norms on  $R^2$ , Mediterr. J. Math., 査読有, Vol. 11 (2014), 633-642. DOI:10.1007/s00009-013-0370-1

3. M. Kato and T. Tamura, On a class of convex functions which yield partial  $[ell]_1$ -norms, In: Banach and Function Spaces IV (Proc. Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces 2012), 査読有, pp. 199-210, 2014.

4. Y. Takahashi and M. Kato, On norm inequalities and geometric constants in Banach spaces, Proceedings of the 22nd Seminar on Function Spaces, 査読有, pp. 69-74, 2014.

5. R. Tanaka, T. Ohwada and K.-S. Saito, Geometrical constants and characterizations of inner product spaces, Math. Inequal. Appl., 査読有, Vol. 17 (2014), 513-520.

6. K.-I. Mitani, K.-S. Saito and Y. Takahashi, Skewness and James constant of Banach spaces, J. Nonlinear and Convex Anal., 査読有, Vol. 14 (2013), 115-122.

7. M. Kato and T. Tamura, Weak nearly uniform smoothness of the  $[psi]$ -direct sums  $(X_1 \oplus \dots \oplus X_N)_{[psi]}$ , Comment. Math., 査読有, Vol. 52 (2012), 171-198.

8. T. Ikeda, S. Kai and M. Kato, Von Neumann-Jordan constant for the norms associated with conics, J. Nonlinear Convex Anal., 査読有, Vol. 13 (2012), 807-820.

9. S. Akiyama and T. Suzuki, Browder's convergence for one-parameter nonexpansive semigroups, *Canad. Math. Bull.*, 査読有, Vol. 55 (2012), 15-25.

10. T. Tamura,  $M(X \oplus_{[\psi]} Y)$  for the  $[\psi]$ -direct sum of two Banach spaces  $X$  and  $Y$ , *千葉大学人文社会科学研究*, 査読無, Vol. 25 (2012), 1-9.

11. Y. Takahashi and M. Kato, On the inequality  $C_{\{NJ\}}(X) \leq J(X)$ , In: *Banach and Function Spaces III*, eds. M. Kato, L. Maligranda and T. Suzuki (Proc. the 3rd International Symposium on Banach and Function Spaces 2009), 査読有, pp. 317-328, 2011.

12. T. Suzuki, A simple proof of a Browder's type convergence theorem for infinite families of nonexpansive mappings in Banach spaces, In: *Banach and Function Spaces III*, eds. M. Kato, L. Maligranda and T. Suzuki (Proc. the 3rd International Symposium on Banach and Function Spaces 2009), 査読有, pp. 305-316, 2011.

[学会発表](計 20 件)

1. 池田敏春, 加藤幹雄, On von Neumann-Jordan and James constants for absolute norms on  $\mathbb{R}^2$ , *日本数学会年会*, 3月15日 - 3月18日, 2014.

2. 高橋泰嗣, 加藤幹雄, On norm inequalities and geometric constants in Banach spaces, 第22回関数空間論セミナー, 東京理科大学理学部, 12月21日 - 12月23日, 2013.

3. M. Kato and T. Tamura, Direct sums of Banach Spaces with FPP which are not uniformly non-square, *The International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (ICNAO2013)*, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, December 20-22, 2013 (招待講演).

4. 加藤幹雄, Invitation to Banach space geometry, 第2回信州関数解析シンポジウム, 信州大学理学部, 2013年11月28日-11月29日(招待講演).

5. M. Kato, Some recent results on Banach space geometry, *School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, P. R. China*, September 27, 2013 (招待講演).

6. M. Kato, On partial  $[ell]_1$ -norms and

convex functions, *School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, P. R. China*, September 24, 2013 (招待講演).

7. 高橋泰嗣, 加藤幹雄, On a new geometric constant of a Banach space, *日本数学会秋季総合分科会*, 愛媛大学, 9月24日 - 9月27日, 2013.

8. M. Kato, On direct sums of Banach spaces and FPP, *Department of Mathematics, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand*, September 17, 2013 (招待講演).

9. M. Kato, On partial  $[ell]_1$ -norms, *The 8th International Conference on Nonlinear and Convex Analysis*, Hirosaki, Japan, Aug. 2-6, 2013 (招待講演).

10. K.-S. Saito, Characterizations of geometrical properties of Banach spaces using  $[\psi]$ -direct sums, *The 8th International Conference on Nonlinear and Convex Analysis*, Hirosaki, Japan, Aug. 2-6, 2013 (招待講演).

11. 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Some results on von Neumann-Jordan type constants of a Banach space, *日本数学会年会*, 京都大学, 3月20日 - 3月23日, 2013.

12. 田村高幸, 加藤幹雄, On direct sums of Banach spaces with a strictly monotone norm, *日本数学会年会*, 京都大学, 3月20日 - 3月23日, 2013.

13. 田村高幸, 加藤幹雄, On  $[\psi]$ -direct sums of Banach spaces with a strictly monotone norm, 第21回関数空間セミナー, 12月24日-26日, 2012.

14. 加藤幹雄, 高橋泰嗣, On relations between  $C_{\{NJ\}}(X)$  and  $J(X)$  and a new geometric constant  $A(X)$ , *日本数学会秋季総合分科会*, 九州大学, 9月18日-21日, 2012.

15. 加藤幹雄, 田村高幸, Weak nearly uniform smoothness of direct sums of Banach spaces, *日本数学会秋季総合分科会*, 九州大学, 9月18-21日, 2012.

16. M. Kato, Partially  $[ell]_1$ -norms and convex functions, *Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces 2012*, Kitakyushu, Japan, Sep. 12-15, 2012 (招待講演).

17. T. Suzuki, Some examples on  $p$ -uniform

convexity and  $q$ -uniform smoothness,  
Fourth International Symposium on Banach  
and Function Spaces 2012, Kitakyushu,  
Japan, Sep. 12-15, 2012 (招待講演).

18. 加藤幹雄, Invitation to Banach space  
geometry, ポテンシャル論セミナー, 名城大  
学理工学部, Dec. 2, 2011 (招待講演).

19. M. Kato, On some norm inequalities in  
the Banach space geometry, Recent Develop-  
ments in Functional Analysis and Approx-  
imation Theory, Lecce, Italy, Sep. 22-24,  
2011 (招待講演).

20. M. Kato, On uniform on-[ell]- $n_1$ -ness  
for direct sums of Banach spaces, Second  
International Workshop on Interpolation  
Theory, Function Spaces and Related Topics,  
Santiago de Compostela, Spain, July 18-22,  
2011 (招待講演).

〔図書〕(計 2 件)

1. M. Kato, L. Maligranda and T. Suzuki  
(editors), Banach and Function Spaces IV  
(Proceedings of the Fourth International  
Symposium on Banach and Function Spaces,  
Kitakyushu, Japan, Sep. 12-15, 2012),  
pp.443+x, Yokohama Publishers, 2014.

2. M. Kato, L. Maligranda and T. Suzuki  
(editors), Banach and Function Spaces III  
(Proceedings of the Third International  
Symposium on Banach and Function Spaces,  
Kitakyushu, Japan, Sep. 14-17, 2009),  
pp.474+x, Yokohama Publishers, 2011.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

加藤 幹雄 (KATO, Mikio)  
信州大学・工学部・教授  
研究者番号: 50090551

### (2) 研究分担者

斉藤 吉助 (SAITO, Kichi-Suke)  
新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号: 30018949

田村 高幸 (TAMURA, Takayuki)  
千葉大学・人文社会科学部・助教  
研究者番号: 30302582

鈴木 智成 (SUZUKI, Tomonari)  
九州工業大学・工学部・教授  
研究者番号: 00303173

### (3) 連携研究者

( )  
研究者番号: