

Lattice Kinetic スキームにおける 複雑流路形状に対応した空間微分近似方法の提案

PROPOSAL OF A SPATIAL DIFFERENTIAL APPROXIMATION FOR COMPLICATED GEOMETRY IN FLOW CHANNEL IN THE LATTICE KINETIC SCHEME

吉野 正人¹⁾, 田中 義人²⁾, 細井 祐介³⁾

Masato YOSHINO, Yoshito TANAKA and Yusuke HOSOI

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: masato@shinshu-u.ac.jp)
2) 信州大学大学院総合工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1)
3) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1)

A new spatial differential approximation in the lattice kinetic scheme is proposed. In the method, the first derivatives of macroscopic variables at a wall are calculated as the weighted mean values of finite difference approximations in calculable directions. Thus, there is no need to specify the normal and tangential directions at the wall. The lattice kinetic scheme with the present method is applied to simulations of flows in porous structures of many spherical bodies and of many fibrous bodies. The results indicate that the method can be effective and applicable to flow problems in complicated geometry of arbitrarily-shaped solid bodies.

Key Words: Lattice Kinetic Scheme, Porous Structure, Differential Approximation, Pressure Drop

1. 緒言

多孔質などに代表される複雑流路内の移動現象の問題は、水力学、機械工学などをはじめとする多くの理・工学分野に関連した重要な問題である。一般に、多孔質構造内の流動現象は時間および空間スケールが小さく、複雑な流れ場になるため、数値計算によるアプローチは非常に有効な方法である。さまざまな数値計算法の中でも、格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method: 以下, LBM と記す)⁽¹⁾ は bounce-back スキームおよびその拡張版スキームにより複雑な境界条件を比較的簡単に扱うことができることや、圧力に関するポアソン方程式を反復計算によって解く必要がないといった理由から多孔質構造内の流動解析⁽²⁾ に広く適用されている。また LBM には、アルゴリズムが簡潔であること、質量・運動量の保存性に優れていること、並列計算に適していることなどの特長もある。さらに、LBM の改良手法として Lattice Kinetic スキーム (以下, LKS と記す)⁽³⁾ が Inamuro によって提案され、さまざまな流れ場の数値解析⁽⁴⁾ に適用されている。LKS の開発により、メモリ消費量が削減され、高レイノルズ数領域でも数値安定性が確保された。

上記の特長を生かし、近年では、X 線 CT (X-ray Computed Tomography) を利用して取り込んだ実際の製品形状を用いて、LBM や LKS による数値計算が盛んに行われている^(5, 6, 7)。このような場合、物体表面の取り扱いが重要となり、さまざまな工夫が必要となる。特に最近では、デカルト座標系に任意形状の境界を設定することができる埋め込み境界法^(8, 9) が注目されており、LBM と組み合わせた手法^(10, 11, 12, 13) も開発されている。しかしながら、内部構造が複雑になるほど法線および接線方向の検出が困難になるため、物体表面の取り扱いが複雑になる。

そこで本研究では、LKS において、法線および接線方向を規定する必要のない、任意の複雑流路形状にも対応できる境界条件を提案した。また、本手法を用いて、球体および繊維状物体で構成される流路内の流動解析を行い、本手法の有効性について調べた。

2. 数値計算法

2.1. Lattice Kinetic スキーム

本研究では、Inamuro が提案する LKS⁽³⁾ を用いた。LKS は LBM を改良した計算手法で、LBM の特長に加え、数値安定性に優れ、高レイノルズ数の計算にも適している。以下で

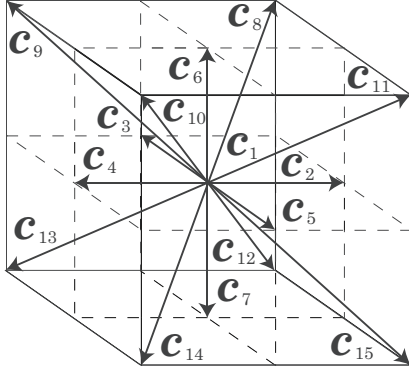


Fig. 1 3D15V model.

使用する物理量はすべて代表長さ L , 粒子の代表速さ c , 代表時間 $t_0 = L/U$ (U : 流れの代表速さ) , および基準密度 ρ_0 を用いて無次元化したものである⁽¹⁾ . 格子気体モデルには, Fig. 1 に示す 3次元 15速度モデルを用いた . この速度モデルの粒子速度 c_i ($i = 1, 2, \dots, 15$) は, 次式で与えられる .

$$[c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

本手法では, 時刻 t , 格子点 x における流体の密度 ρ および流速 u は, それぞれ次式で定義される .

$$\rho(x, t) = \sum_{i=1}^{15} f_i^{\text{eq}}(x - c_i \Delta x, t - \Delta t), \quad (2)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \sum_{i=1}^{15} c_i f_i^{\text{eq}}(x - c_i \Delta x, t - \Delta t), \quad (3)$$

ここで,

$$f_i^{\text{eq}} = E_i \rho \left[1 + 3c_{i\alpha} u_\alpha + \frac{9}{2} c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha u_\beta - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + A \Delta x \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) c_{i\alpha} c_{i\beta} \right], \quad (4)$$

および, $E_1 = 2/9$, $E_2 = E_3 = \dots = E_7 = 1/9$, $E_8 = E_9 = \dots = E_{15} = 1/72$ である . また, $\alpha, \beta = x, y, z$ (α, β はデカルト座標を表し, 総和規約に従う) であり, Δx は立方体格子の間隔, Δt は時間刻み, また, A は粘性係数に関するパラメータであり, 粘性係数と A には次式の関係がある .

$$\mu = \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{9} A \right) \Delta x. \quad (5)$$

さらに, 本手法では, 圧力 p は流体の密度 ρ と次式の関係がある .

$$p = \frac{1}{3} \rho. \quad (6)$$

なお, 式 (4) に含まれる一階微分項には, 次式で示す二次精度中心差分近似を用いた .

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \approx \frac{1}{10\Delta x} \sum_{i=2}^{15} c_{i\beta} u_\alpha(x + c_i \Delta x). \quad (7)$$

Table 1 Values of subscripts l, m and n .

i	8	9	10	11	12	13	14	15
l	2	4	4	2	2	4	4	2
m	3	3	5	5	3	3	5	5
n	6	6	6	6	7	7	7	7

2.2. 物体表面の取り扱い

複雑な形状をした流路では, 物体表面において式 (4) 中の一階微分項の取り扱いが重要となる . 一般的には, 物体表面に対して法線および接線方向を考え, それぞれの方向に対する微分近似を行う必要がある . しかしながら, 流路が複雑になるほど物体表面に対する法線および接線方向を考慮することが困難になる . そこで本研究では, 法線および接線方向を規定する必要のない新たな空間微分近似方法を導入した .

物体表面上の格子点 $P(x)$ における $\partial u_\alpha / \partial x_\beta$ の近似方法について考える . 本手法では, 棟方らの方法⁽¹⁴⁾ を参考に, 点 $Q(x + c_i \Delta x)$ および点 $R(x + 2c_i \Delta x)$ の両方が流体領域である i 方向 (ただし, $c_{i\beta} = 0$ の方向は除く) の二次精度片側差分近似を考え, それらを重み付け加算し平均をとることで, 点 P における流速の一階微分を近似する . すなわち,

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \Big|_P = \frac{1}{W} \sum_{i (c_{i\beta} \neq 0)} E_i \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \Big|_{P, i}, \quad (8)$$

ここで, W は

$$W = \sum_{i (c_{i\beta} \neq 0)} E_i, \quad (9)$$

である . 式 (8) の右辺における $(\partial u_\alpha / \partial x_\beta)_{P, i}$ の具体的な表記は, $i = 2, 3, \dots, 7$ に対して,

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \Big|_{P, i} \approx \frac{-3u_\alpha(x) + 4u_\alpha(x + c_i \Delta x) - u_\alpha(x + 2c_i \Delta x)}{2c_{i\beta} \Delta x}, \quad (10)$$

となり, また $i = 8, 9, \dots, 15$ に対して,

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \Big|_{P, i} \approx \frac{-3u_\alpha(x) + 4u_\alpha(x + c_i \Delta x) - u_\alpha(x + 2c_i \Delta x)}{2c_{i\beta} \Delta x} - \frac{c_{i\alpha}}{c_{i\beta}} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \Big|_{P, l} (1 - \delta_{x\beta}) - \frac{c_{i\gamma}}{c_{i\beta}} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \Big|_{P, m} (1 - \delta_{y\beta}) - \frac{c_{i\gamma}}{c_{i\beta}} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \Big|_{P, n} (1 - \delta_{z\beta}), \quad (11)$$

となる . ここで, $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカのデルタである . l, m, n には, 各 i 方向に対して Table 1 で示される数字の方向を与える . なお, 式 (10) および (11) は, 各 i 方向の Taylor 展開により次のようにして導かれる . まず, 点 Q および点 R における u_α について, 点 P まわりの Taylor 展開を行うと, そ

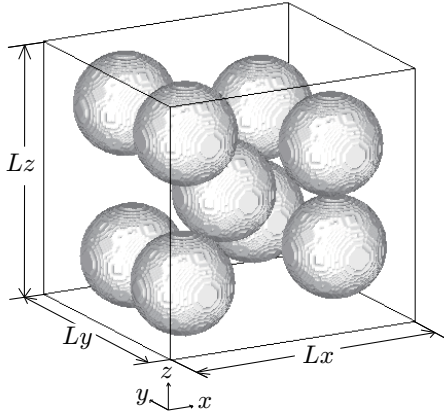


Fig. 2 Porous structure of many spherical bodies.

それぞれ次式となる．

$$\begin{aligned}
u_\alpha(x_p + c_{ix}\Delta x, y_p + c_{iy}\Delta x, z_p + c_{iz}\Delta x) = & \\
& u_\alpha \Big|_P + \Delta x \left(c_{ix} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \Big|_P + c_{iy} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \Big|_P + c_{iz} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \Big|_P \right) \\
& + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left(c_{ix}^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} \Big|_P + c_{iy}^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} \Big|_P + c_{iz}^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2} \Big|_P \right. \\
& \quad \left. + 2c_{ix}c_{iy} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} \Big|_P + 2c_{iy}c_{iz} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y \partial z} \Big|_P + 2c_{iz}c_{ix} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z \partial x} \Big|_P \right) \\
& + O[(\Delta x)^3], \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_\alpha(x_p + 2c_{ix}\Delta x, y_p + 2c_{iy}\Delta x, z_p + 2c_{iz}\Delta x) = & \\
& u_\alpha \Big|_P + 2\Delta x \left(c_{ix} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \Big|_P + c_{iy} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \Big|_P + c_{iz} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \Big|_P \right) \\
& + 2(\Delta x)^2 \left(c_{ix}^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} \Big|_P + c_{iy}^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} \Big|_P + c_{iz}^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2} \Big|_P \right. \\
& \quad \left. + 2c_{ix}c_{iy} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial y} \Big|_P + 2c_{iy}c_{iz} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y \partial z} \Big|_P + 2c_{iz}c_{ix} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z \partial x} \Big|_P \right) \\
& + O[(\Delta x)^3]. \tag{13}
\end{aligned}$$

式(12) × 4 − 式(13)より二階微分項を消去し、例えば $c_{ix} \neq 0$ のケースに対して $\partial u_\alpha / \partial x$ について解くと次式を得る．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \Big|_{P,i} = & \frac{-3u_\alpha(\mathbf{x}) + 4u_\alpha(\mathbf{x} + c_i\Delta x) - u_\alpha(\mathbf{x} + 2c_i\Delta x)}{2c_{ix}\Delta x} \\
& - \frac{c_{iy}}{c_{ix}} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \Big|_{P,i} - \frac{c_{iz}}{c_{ix}} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \Big|_{P,i} + O[(\Delta x)^2]. \tag{14}
\end{aligned}$$

$(\partial u_\alpha / \partial y)_{P,i}$ および $(\partial u_\alpha / \partial z)_{P,i}$ についても同様である．ここで、 $i = 8, 9, \dots, 15$ のとき、式(14)の右辺第2および第3項 (y および z 方向微分項) の取り扱いが必要となる．本研究では、 $i = 8, 9, \dots, 15$ に対して、 $c_i \cdot c_j > 0$ となるような j ($2 \leq j \leq 7$) の方向の微分値を与えた．

3. 複数の球体が配置された流路内の流動解析

はじめに、本手法の妥当性を確認するため、多数の球体で構成される多孔質構造内の流動解析を実施し、圧力損失の計算結果に対して既存の実験式と比較した．Fig. 2に示すように $L_y = L_z = 0.945L_x$ の直方体領域内 ($L_x \times$

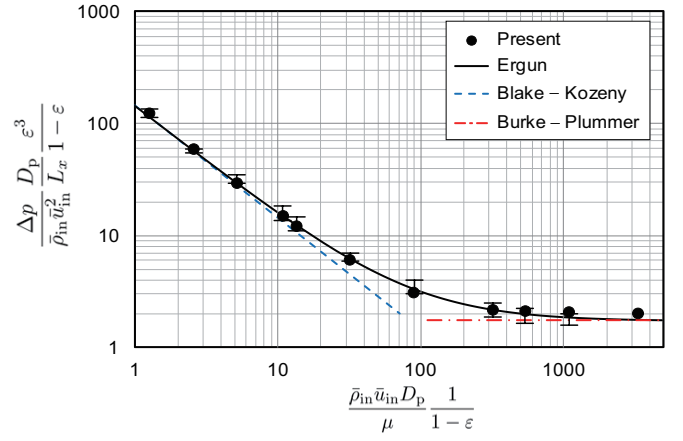


Fig. 3 Pressure drops versus Reynolds numbers in porous structure of many spherical bodies.

$L_y \times L_z$) = $(146\Delta x \times 138\Delta x \times 138\Delta x)$ に相当直径 $D_p = 55.5\Delta x$ の9つの球を配置した．9つの球の中心はそれぞれ $(x/L_x, y/L_y, z/L_z) = (0.21, 0.29, 0.22), (0.21, 0.74, 0.81), (0.22, 0.71, 0.22), (0.23, 0.32, 0.80), (0.48, 0.49, 0.49), (0.75, 0.80, 0.29), (0.78, 0.23, 0.70), (0.78, 0.78, 0.70), (0.80, 0.23, 0.29)$ に位置する．このときの空隙率は $\varepsilon = 0.710$ である．

なお、計算領域内部は格子上で二値データ (流体:0, 物体:1) として扱っている．また、境界条件は x 方向に圧力差 Δp をともなう周期境界条件、 y および z 方向にすべり境界条件を用いた⁽¹⁵⁾．本研究では、レイノルズ数 $Re = \bar{\rho}_{in} \bar{u}_{in} D_p / \mu$ が $0.51 \leq Re \leq 1342$ の範囲になるよう、圧力差 Δp と粘性係数 μ を変化させて計算を行った．ここで、 $\bar{\rho}_{in}$ および \bar{u}_{in} はそれぞれ、 $x = 0$ において、時間および空間平均した密度および流速である．初期条件は、全領域で $\rho = 1, u = 0$ とした．

3.1. 計算結果および考察

Fig. 3に圧力損失とレイノルズ数の関係を示す．縦軸が圧力損失、横軸は修正レイノルズ数 $Re' = Re / (1 - \varepsilon)$ を表している．●は本計算結果、実線、破線および一点鎖線は、それぞれ実験データに基づいて導かれた Ergun の式⁽¹⁶⁾、Blake-Kozeny の式⁽¹⁷⁾ および Burke-Plummer の式⁽¹⁷⁾ を表している．その中でも、Ergun の式は層流域から乱流域にわたって多くの実験データをもとに導かれた実験式であり、Fig. 3に描かれたエラーバーは、それらの実験データの範囲を表している．本図より、遷移域 ($90 < Re' < 600$) において圧力損失の値と Ergun の式に若干差異が見られるが、いずれの計算結果も実験データのばらつきの範囲内にあり、 $Re' < 1000$ の広範囲のレイノルズ数領域にわたって計算結果は実験式と良く一致している．一方、高レイノルズ数領域 ($Re' > 1000$) では、本計算結果は Ergun の式よりも大きな値を示している．この原因の一つには、物体表面近傍の空間解像度の不足が考えられるため、今後さらに詳細な検討が必要である．

次に、レイノルズ数 $Re = 5.47, 1342$ における任意断面上の過渡状態後の速度ベクトルをそれぞれ Fig. 4, Fig. 5に示す． $Re = 5.47$ では、流れは定常状態になり、主流に対して平行な $x-y$ および $z-x$ 断面では、渦などの流れの乱れは見

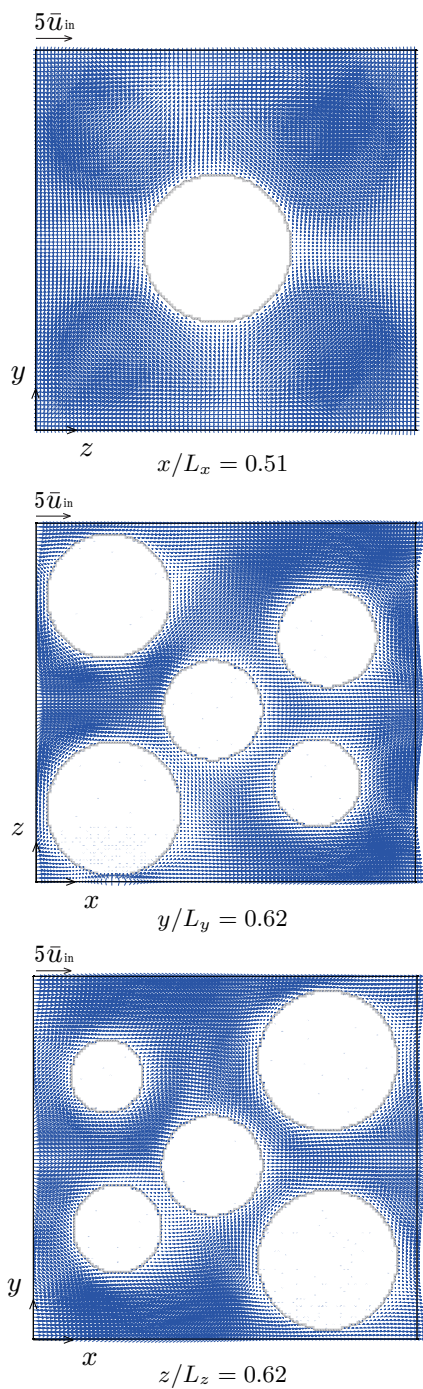


Fig. 4 Velocity vectors in porous structure of many spherical bodies for $Re=5.47$.

られない。また、主流に対して垂直な $y-z$ 断面では、球を避けるような二次流れが確認できる。一方、 $Re = 1342$ では、流れは完全に非定常になり、物体側面で剥離が生じ、球の後方に半径程度の大きさの渦が発生する複雑な流れ場が確認された。主流に対して垂直な $y-z$ 断面においては、二次流れおよび二次渦の存在が確認でき、レイノルズ数が高くなるにつれて複雑な流れ場になっていることがわかる。また、 $Re = 1342$ 、無次元時間 $0.82 \leq t\bar{u}_{in}/L_x \leq 8.57$ における $z-x$ 断面上 ($y/L_y = 0.62$) の速度ベクトルを Fig. 6 に示す。本図より、渦の大きさや位置が時間とともに変動し、複雑な流れ場を形成していることがわかる。このときの、球体の後流の

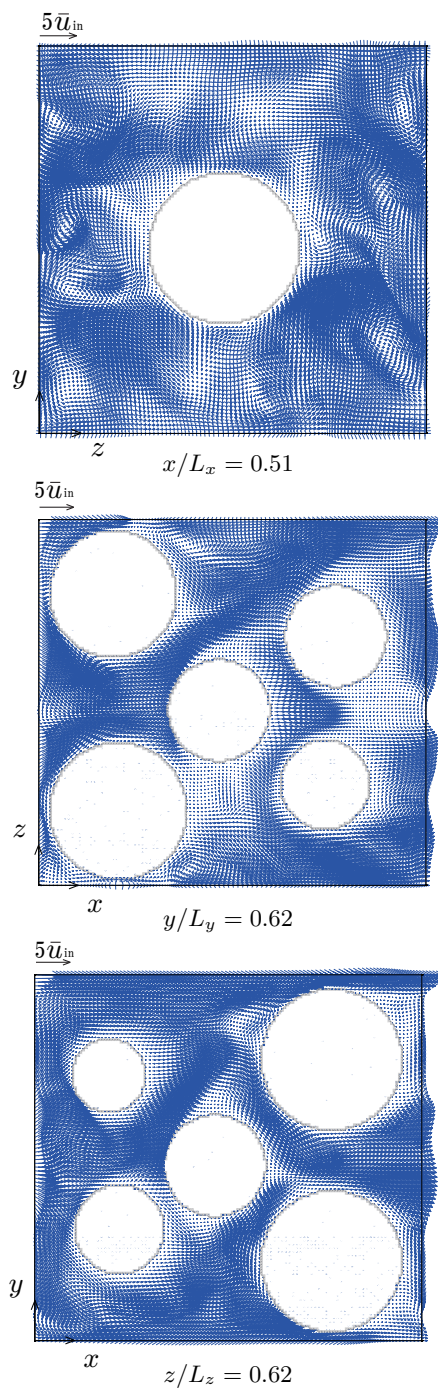


Fig. 5 Velocity vectors in porous structure of many spherical bodies for $Re=1342$.

影響を受けている点 $(x/L_x, y/L_y, z/L_z)=(0.45, 0.62, 0.09)$ での主流方向流速 u_x の時間変動を Fig. 7 に示す。ここで、 \bar{u}_x はサンプリング区間における流速 u_x の時間平均である。本図からも、 u_x が時間とともに変動する非定常な流れ場であることがわかる。

4. 繊維状多孔質構造内の流動解析

フィルターや断熱材などに多く見られる繊維状の多孔質構造は、球状の多孔質構造と異なり、繊維の配向性や繊維径が流れ場に影響を与えると考えられる。したがって、これらについて調べることは工学的な利用価値が非常に高い。そこで、

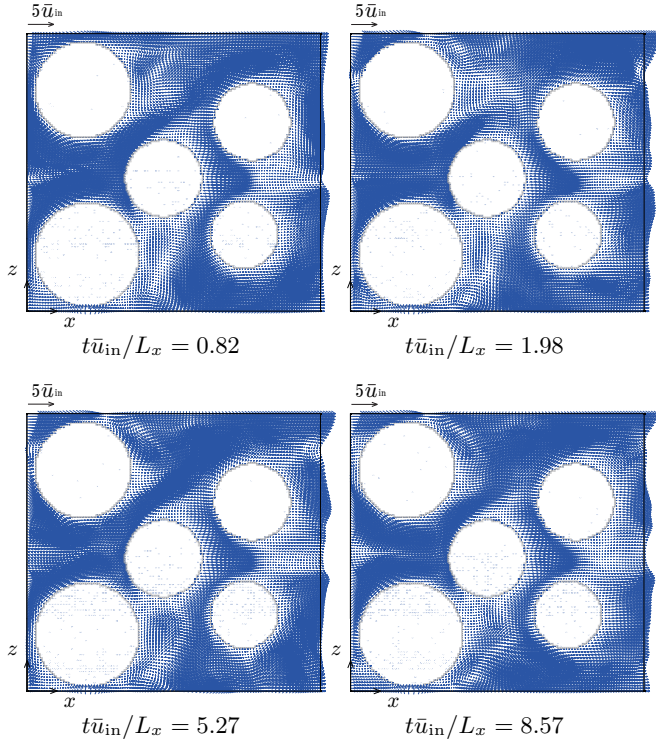


Fig. 6 Time evolution of velocity vectors on $y/L_y = 0.62$ for $Re = 1342$.

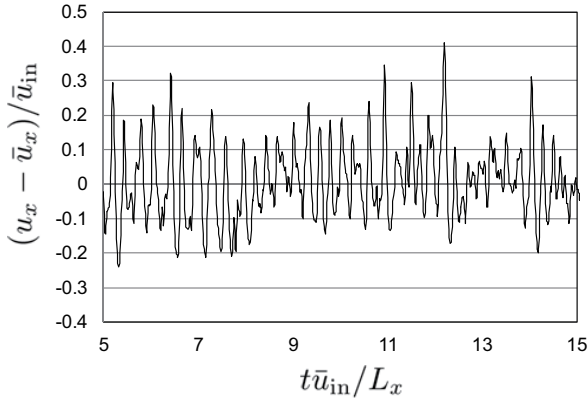


Fig. 7 Streamwise velocity fluctuation at $(x/L_x, y/L_y, z/L_z) = (0.45, 0.62, 0.09)$ for $Re = 1342$. \bar{u}_x is the time-averaged value of u_x .

多数の繊維状物体で構成される多孔質構造内の流動解析を実施した。計算領域 $(L_x \times L_y \times L_z)$ を $250\Delta x \times 250\Delta x \times 250\Delta x$ の立方体格子に分割し、内部に繊維径 $\phi = 8.0\Delta x$ の繊維を Fig. 8 のように不規則に配列した⁽¹⁸⁾。このときの空隙率は $\varepsilon = 0.950$ である。本計算では、繊維を x 方向に積層した場合を考え、 y, z 方向に対して不規則な配列としている。境界条件は、 x 方向に圧力差 Δp をともなう周期境界条件、 y および z 方向にすべり境界条件を用いた。本計算では、圧力差を $\Delta p = 1.0 \times 10^{-4}$ 、粘性係数を $\mu = 2.0 \times 10^{-3}\Delta x$ とした。

計算の一例として、 $Re = \bar{\rho}_{in}\bar{u}_{in}\phi/\mu = 12.6$ 、無次元時間 $t\bar{u}_{in}/L_x = 1.25$ における任意断面上の速度ベクトル図を Fig. 9 に示す。本図より空隙の大きい箇所を内部流体が流れていく様子が見られる。また、レイノルズ数が低いため、

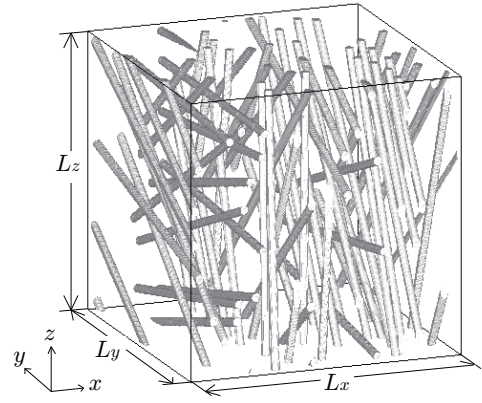


Fig. 8 Porous structure of many fibrous bodies.

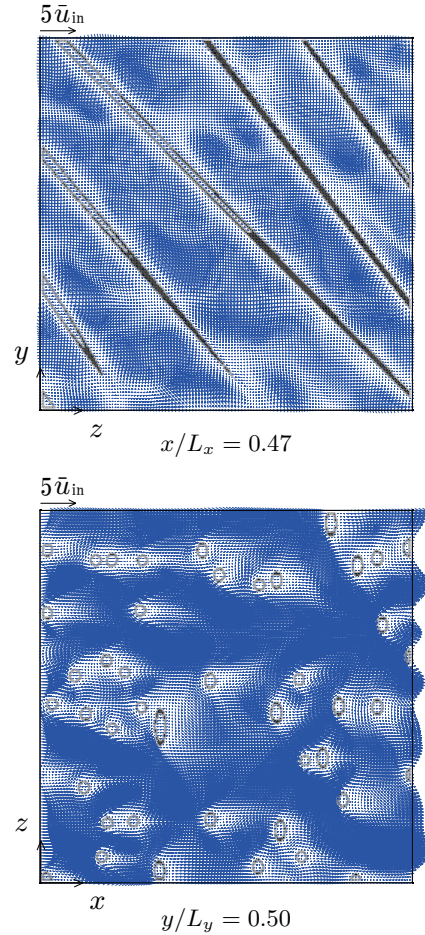


Fig. 9 Velocity vectors in porous structure of many fibrous bodies for $Re=12.6$ at $t\bar{u}_{in}/L_x = 1.25$.

内部流体は繊維の隙間を乱れることなく流れ、主流に垂直な $y-z$ 断面では、二次流れや二次渦は見られなかった。次に、内部構造による影響を調べるため、Ergun の式と本計算結果を比較した。その結果、修正レイノルズ数は $Re' = 252$ 、圧力損失は 5.53 であり、Ergun の式から得られる $Re' = 252$ のときの圧力損失よりも 2.36 倍大きい値となることがわかった。なお、高レイノルズ数域における数値計算の実施、および内部構造の違いに関する詳細な検討については今後の課題である。

5. 結言

Lattice Kinetic スキームにおける巨視的変数の空間微分項に対する新たな近似方法を提案し、多孔質構造内の流動解析を実施した。複数の球体が配置された流路内の流動解析では、得られた圧力損失の計算結果が既存の実験式と良く一致し、本手法の妥当性が確認された。次に、不規則に配列した繊維状物体で構成される多孔質構造内の流動解析を実施した結果、空隙の大きな箇所を優先的に流れるといった定性的に妥当な結果が得られた。以上より、本手法を LKS に適用することにより複雑流路形状に対する適用性が広がり、任意形状で構成される流路内流れの数値解析も計算可能となった。

最後に、繊維状物体で構成される流路内流れについては、今後定量的に評価する必要がある。とりわけ、繊維の配向性や空隙率が流動現象に及ぼす影響について調べることは工学的に非常に有意義なことであり、今後の課題である。

謝辞

本研究の一部は、独立行政法人 日本学術振興会 学術研究助成基金助成金 (基盤研究 (C) No. 23560192) , ならびにニチアス株式会社の助成により行われた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- (1) T. Inamuro: Lattice Boltzmann Methods for Viscous Fluid Flows and for Two-Phase Fluid Flows, *Fluid Dynamics Research*, **38**(2006), pp. 641–659.
- (2) 松隈洋介: 多孔質体内流動解析への格子ボルツマン法の工学的適用, *混相流*, **24**(2010), pp. 282–288.
- (3) T. Inamuro: A Lattice Kinetic Scheme for Incompressible Viscous Flows with Heat Transfer, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, **360**(2002), pp. 477–484.
- (4) 吉野正人, 安倍伸一, 松原雅春: 多数の球を過ぎる流れ場における乱流現象の数値解析, *計算数理工学論文集*, **4**(2004), pp. 53–56.
- (5) M. Yoshino, T. Murayama, A. Matsuzaki, T. Hitomi: Simulation of Mass Transfer of Calcium in Concrete by the Lattice Kinetic Scheme for a Binary Miscible Fluid Mixture, *Journal of Fluid Science and Technology*, **4**(2009), pp. 13–24.
- (6) K. Moriyama, T. Inamuro: Lattice Boltzmann Simulations of Water Transport from the Gas Diffusion Layer to the Gas Channel in PEFC, *Communications in Computational Physics*, **9**(2011), pp. 1206–1218.
- (7) K. Yamamoto, K. Yamauchi, N. Takada, M. Misawa, H. Furutani, O. Shinozaki: Lattice Boltzmann Simulation of Continuously Regenerating Diesel Filter, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, **369**(2011), pp. 2584–2591.
- (8) C.S. Peskin: Flow Patterns around Heart Valves: A Numerical Method, *Journal of Computational Physics*, **10**(1972), pp. 252–271.
- (9) C.S. Peskin: Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart, *Journal of Computational Physics*, **25**(1977), pp. 220–252.
- (10) Z.-G. Feng, E.E. Michaelides: The Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method for Solving Fluid-Particles Interaction Problems, *Journal of Computational Physics*, **195**(2004), pp. 602–628.
- (11) H.K. Jeong, H.S. Yoon, M.Y. Ha, M. Tsutahara: An Immersed Boundary-Thermal Lattice Boltzmann Method Using an Equilibrium Internal Energy Density Approach for the Simulation of Flows with Heat Transfer, *Journal of Computational Physics*, **229**(2010), pp. 2526–2543.
- (12) J. Wu, C. Shu: An Improved Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method for Simulating Three-Dimensional Incompressible Flows, *Journal of Computational Physics*, **229**(2010), pp. 5022–5042.
- (13) 瀬田剛: 埋め込み境界法を用いた格子ボルツマン法による自然対流解析, *計算数理工学論文集*, **10**(2010), pp. 1–6.
- (14) 棟方稔久, 稲室隆二, 兵頭志明: 毛管圧の解析に対する Leverett 関数の適用性 (格子ボルツマン法による検討) , *日本機械学会論文集 B 編*, **75**(2009), pp. 1568–1575.
- (15) T. Inamuro, M. Yoshino, F. Ogino: Lattice Boltzmann Simulation of Flows in a Three-Dimensional Porous Structure, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **29**(1999), pp. 737–748.
- (16) S. Ergun: Fluid Flow through Packed Columns, *Chemical Engineering Progress*, **48**(1952), pp. 89–94.
- (17) R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot: *Transport Phenomena*, (1960), John Wiley & Sons, Inc.
- (18) V.P. Schuz, J. Becker, A. Wiegmann, P.P. Mukherjee, C.-Y. Wang: Modeling of Two-Phase Behavior in the Gas Diffusion Medium of PEFCs via Full Morphology Approach, *Journal of the Electrochemical Society*, **154**(2007), pp. B419–B426.