

論 文

到着期限のある閉ループ伝送システムにおけるひずみ最小化
アルゴリズム西新 幹彦^{†a)} 岩井 祐斗^{††}Algorithm for Minimizing Distortion in Delay-Sensitive Transmission
on Closed-Loop SystemMikihiko NISHIARA^{†a)} and Yuto IWAI^{††}

あらまし ストリーミングのように、動画のダウンロードと再生を同時に行う場合、動画のフレームが再生される時刻までにそのデータをダウンロードしておく必要がある。フレームが再生される時刻を到着期限という。到着期限を守るために一般にはデータ量を削減しなければならないが、その場合、フレームの画質は劣化する。各フレームのひずみの総和を動画のひずみとする。本研究では、到着期限を守りながら動画のひずみを最小化するような最適化問題を考える。また、フレームのデータは消失通信路を通して送られると仮定し、消失が生じた場合は送信機に即時に通知されるものとする。送信機は消失の有無を以降の伝送計画の更新のために使う。この問題に対し、従来研究 [1] では伝送計画を導くアルゴリズムが提案されているが、これは到着期限を守らない場合がある。本論文では、到着期限を守る最適アルゴリズムを提案する。

キーワード 到着期限、ひずみ最小化、閉ループシステム、数理モデル、ストリーミング

1. ま え が き

動画のダウンロードと再生を同時に行うようなサービスをビデオ・オン・デマンドまたはストリーミングと呼ぶ。配信される動画データはフレームと呼ばれる静止画を並べたものによって表現されている。ストリーミングのようなサービスを提供する場合、視聴者の見るべきフレームは、それが再生される時刻までにダウンロードを完了していなければならない。滑らかな動画を視聴するために要請されるこの期限を、到着期限と呼ぶ。本研究では通信路を流れる情報のビットレートは一定とする。したがって、到着期限があるということは、フレームを表すデータの長さには制約があり、再生されるフレームはオリジナルのフレームと比較してひずみを含んでいることを意味する。また、一

つのフレームの画質がきれいでも、全体を見て画質が悪ければ視聴者は満足しない。動画全体のひずみを各フレームのひずみの総和で評価することにする。そのため、個々のフレームの詳細な部分を表現するデータを犠牲にすることで、動画全体の概略を表現するデータを到着期限までに送信していくことが重要となる。

一般に、各フレームのデータは雑音のある通信路を通して受信側に送られる。通信路符号化の復号誤りを送信側で検知できる場合、その後の到着期限に余裕があるときは、繰り返しデータを再送信することで動画のひずみを抑えることができる。

本研究では、フレームのデータは消失通信路を通して送られると仮定し、各パケットが通信路で消失したかどうかを送信側で確認することのできる閉ループシステムを考える。送信機は各パケットの受信状況を確認することによってその後の伝送計画を更新する。この意味で送信機はスケジューラとも呼ばれる。このシステムの目的は、動画全体のひずみが小さくなるようにパケットを伝送することである。

このような問題に対して、従来研究 [1] では確実性等価制御を利用して伝送計画を更新することが提案さ

[†] 信州大学工学部, 長野市

Faculty of Engineering, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano-shi, 380-8553 Japan

^{††} 名古屋大学大学院工学研究科, 名古屋市

Graduate School of Engineering, Nagoya University, Furocho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, 464-8603 Japan

a) E-mail: mikihiko@shinshu-u.ac.jp

れている。伝送計画は現在の状況に対して最適であることが望ましい。しかし、提案されたアルゴリズムが導出する伝送計画は到着期限を守らない場合がある。本論文では、自己完備のため従来研究 [1] に沿って問題を詳しく解説しながら数理モデルを定式化した後、最適な伝送計画を導くアルゴリズムを提案する。

なお、本研究に類似した問題設定の研究は文献 [1] に充実した紹介があるが、ここでは追加として次の研究を紹介する。Salehi ら [2] は符号化済みのパケットを誤りのない通信路を通して受信者に送信するための伝送計画のアルゴリズムを提案した。彼らのモデルでは各フレームには到着期限はある一方、任意のビットレートで通信できる通信路を仮定している。用意したパケットを全て届けることが条件であり、したがってひずみに関して寛容でない。また、再生前のパケットを保存しておく受信側のバッファ容量を有限とし、オーバフローが起きてはならないことも制約条件である。このような条件のもとでビットレートのピークと変動が最小になるという意味で最適な伝送計画アルゴリズムを提案している。

2. 伝送システムの定式化

本研究の伝送システムの特徴は、到着期限が設けられていることと、到着期限を守るためにフレームにひずみが生じるのを許容していることである。以下でそれらを定式化する。

2.1 到着期限とフィードバック

フレームの総数を N とする。各フレームは対応する到着期限 M_i ($i = 1, \dots, N$) をもっている。本研究では問題を一般化し、到着期限は等間隔である必要はない。一般性を損なうことなく、フレームの並び方は到着期限が切れる順とする。すなわち、 $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_N$ とする。

オリジナルのフレームはパケットの並びとして符号化されているとする。到着期限が過ぎたフレームに対して、スケジューラはパケットを送信しない。スケジューラは到着期限前のフレームの中から送信するパケットを選ぶが、送信された各パケットは独立同一分布の確率 p で正しく復号器に届く。パケットの大きさと送信にかかる時間はそれぞれ同一とする。一つのパケットを送信するのに要する時間を時間の単位とする。パケットが正しく届いたかどうかはスケジューラにフィードバックされる。

2.2 ひずみ関数

オリジナルのフレームは無限の情報量を含んでいると仮定し、各フレームはスケラブル符号化されているとする。すなわち、順にパケットを受け取るごとに再生されるフレームのひずみは小さくなり、送信できるパケットの数には上限はない。簡単のため、フレームのひずみは届いたパケット数によって決まると仮定する。届いたパケット数 x に対し、ひずみを $d(x)$ と表す。本論文では従来研究 [1] に従い、ひずみ $d(x)$ を、受け取ったパケット数に関して単調減少で狭義に下に凸な関数であると仮定する。この凸性の仮定が妥当である理由は、画質の悪いフレームと良いフレームに同じ量のデータを追加したすると、悪い画像の方が画質の改善の程度の変化が大きいと考えられるからである。

狭義に下に凸な減少関数には補題 1 のような性質がある。

[補題 1] 狭義に下に凸な関数 $d(\cdot)$ に対し、 $a < b$, $0 < \delta < b - a$ ならば

$$d(a + \delta) + d(b - \delta) < d(a) + d(b) \quad (1)$$

が成立する。

補題 1 は、 $\sum_{i=1}^N x_i = M_N$ の条件のもとで $\sum_{i=1}^N d(x_i)$ を最小化するときの解は $x_i = M_N/N$ となることを意味する。この知見は以降の議論の直感的な理解に役立つ。

3. 閉ループシステム

スケジューラは最初、通信路における消失を考慮した上で最適な伝送計画を立てるが、パケットが正しく復号器に届いたかどうかによって状況が変化する。言い換えると、パケットが正しく届くかどうかを確率的にしか予想できなかったのを確定することができる。そこで従来研究 [1] では、確実性等価制御 (Certainty Equivalent Controller, CEC) [3] を用いて伝送計画を随時更新することを提案している。CEC は、観測していないランダムな値の期待値を求め、各段階で最適解を毎回計算する発見的手法である。

閉ループシステムであるので、スケジューラはどのフレームに対していくつのパケットが正しく受信機に届いているかを常に把握している。これを現状と呼ぶことにする。本研究の伝送モデルに CEC の手法を用いると、システムの動きは以下ようになる。

まず、スケジューラは現状に基づき、ひずみの期待値が最小となるように現在以降の伝送計画を立てる。

- (1) 現状に対して最適な伝送計画を見つける。
- (2) 伝送計画をもとにパケットを送信するフレームを決定する。
- (3) パケットを送信し、受信状況を受け取る。
- (4) 現状を更新する。
- (5) 到着期限が切れたフレームは対象から取り除く。
- (6) 到着期限が残っているフレームがあるなら手順 (1) に戻る。
- (7) 終了。

図 1 伝送アルゴリズム

Fig. 1 Transmission algorithm.

これをもとにフレームを選んでパケットを送信する。次の時刻では、送信したパケットが無事に復号器に届いたかどうかに基づき、スケジューラは把握している現状を更新する。また、時刻が進んでいることから、各フレームの到着期限も更新する。もし到着期限が残っているフレームがあれば、それらに対して再び伝送計画を立てる。これを全ての（最後の）フレームの到着期限が切れるまで繰り返す。

この手順をまとめたのが、図 1 の伝送アルゴリズムである。現状に対する伝送計画と、パケットを送信するフレームの選び方（伝送指針）については以下で詳しく説明する。

3.1 伝送計画

到着期限前の n 個のフレームに対し、既に届いているパケット数と到着期限までの残り時間をそれぞれ $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$ とする。これらはスケジューラが把握している現状を表しており、初期値は $n = N$, $b_i = 0$, $m_i = M_i$ ($i = 1, \dots, N$) である。現時点での伝送計画を $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ と表す。伝送計画は、フレーム i に対して今後 y_i 個のパケットを送信することを意味する。

本来のシステムの目的からすれば、計画どおりに送信する場合に最終的に届くパケット数を確率変数 B_i とおいて、現状におけるひずみの条件付き期待値

$$E \left[\sum_{i=1}^n d(B_i) \middle| \mathbf{b}, \mathbf{y} \right] \quad (2)$$

を最小化する伝送計画 \mathbf{y} を求めなければならない。しかし、このような伝送計画を見つけることは、ひずみ関数 $d(\cdot)$ の値を評価しなければならないことから、 $d(\cdot)$ の具体的な定義によっては計算量的に高価となる。そこで、式 (2) の代わりに B_i の条件付き期待値を用いて

$$\sum_{i=1}^n d(E[B_i | b_i, y_i]) \quad (3)$$

を最小化する伝送計画 \mathbf{y} を用いることにする。送信するパケット数は整数で表されなければならないが、この後説明する伝送指針の働きにより、各 y_i は実数値をとってよい。ひずみ関数の性質を利用すると、以降の議論から分かるように、式 (3) を最小化するためにひずみ関数 $d(\cdot)$ の値を評価する必要がない。したがって計算量的に非常に安価に計算することができることが利点である。また、式 (3) を小さくするために文献 [1] で提案された伝送計画を用いると、最終的な全体のひずみは式 (2) を用いたときのひずみに匹敵することが実験的に示されている^(注1)。

B_i の条件付き期待値を x_i と表すと

$$x_i = E[B_i | b_i, y_i] = b_i + p y_i \quad (4)$$

が成り立つ。ここで p は前述のとおり、パケットが正しく届く確率である。このことから $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ のことも伝送計画と呼ぶ。負のデータ量を送ることはできないので

$$x_i \geq b_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

が成り立たなければならない。また、データは到着期限の近い順に送信することにする。すると、到着期限を超えてデータを送信しないので、時間の単位に注意すれば

$$\sum_{j=1}^i y_j \leq m_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6)$$

でなくてはならない。式 (6) は x_i を用いると

$$\sum_{j=1}^i x_j \leq \sum_{j=1}^i b_j + p m_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (7)$$

と表される。式 (5), (7) を満たす伝送計画を実行可能であるという。

式 (3) より、最適な伝送計画を求める最適化問題は目的関数

$$\sum_{i=1}^n d(x_i) \quad (8)$$

を最小化する実行可能な伝送計画 \mathbf{x} を求める問題として定式化される。

(注1)：文献 [1] の実験ではひずみ関数として $d(R) = 2^{-2R}$ が用いられている。

3.2 伝送指針

式 (8) を最小化する実行可能な最適解 \mathbf{x} から式 (4) によって得られる最適な伝送計画 \mathbf{y} は、終了までに各フレームにどれだけのパケットを送信すればひずみを最小化できるかを示しているのであって、まさに今、どのフレームのパケットを送信すればよいかは示していない。特に、伝送計画は連続量で表現されているが、実際に送信するパケットは離散的である。そのため、パケットを送信するフレームを決める伝送指針が必要となる。伝送指針は形式的には、伝送計画からフレームインデックスへの写像である。

伝送指針は、パケットが無事に届いたとしても次の時刻に

$$b_1 \geq \dots \geq b_n \quad (9)$$

が成り立つようにフレームを選択する。この選択の仕方によって、到着期限前の二つのフレームの間の最適性に損失は発生しない。なぜなら、前のフレームの到着期限は、後ろのフレームの到着期限より早いから、前のフレームの到着期限が過ぎた後も後ろのフレームのパケットを送信することができるからである。

このような伝送指針 ψ の例として次がある [1]:

$$\psi(\mathbf{y}) = \min \left\{ \arg \max_{1 \leq i \leq j^*} \{y_i\} \right\},$$

$$j^* = \min \left\{ j \mid \sum_{i=1}^j y_i \geq 1 \right\}.$$

4. 伝送計画の導出

式 (8) を最小化する実行可能な最適解を導く試みとして従来法 [1] がある。ところが、従来法は実行可能でない伝送計画を導く場合がある。以下では、従来法に対する反例を示した後、実行可能な最適解を導くアルゴリズムを提案する。従来法も提案法もひずみ関数の値を評価していないことに注意されたい。

4.1 従来法

従来法のアルゴリズムを図 2 に示す。従来法は実行可能でない伝送計画を導く場合がある。その反例は $p = 1/2$, $n = 4$, $\mathbf{b} = (2, 0, 0, 0)$, $\mathbf{m} = (2, 2, 2, 4)$ である。これに対する従来法の出力は $\mathbf{x} = (2, 2/3, 2/3, 2/3)$ となる。このとき $\sum_{i=1}^3 x_i = 10/3 > \sum_{i=1}^3 b_i + pm_3 = 3$ となり式 (7) を満たさないため実行可能ではない。

このように、従来法は到着期限を超えてパケットを送信するような伝送計画を導く場合がある。しかし、

入力: $p, n, \mathbf{b}, \mathbf{m}$

出力: \mathbf{x}

- (1) $C_j \leftarrow \sum_{i=1}^j b_i + pm_j \quad (j = 1, \dots, n)$
- (2) $\ell \leftarrow 1$
- (3) $\mu_j \leftarrow \frac{C_j}{j - \ell + 1} \quad (j = \ell, \dots, n)$
- (4) $t \leftarrow \max \left\{ \arg \min_{\ell \leq j \leq n} \{\mu_j\} \right\}$
- (5) $\mu_t(k) \leftarrow \frac{C_t - \sum_{i=\ell}^k b_i}{t - k} \quad (k = \ell - 1, \dots, n)$
- (6) $\hat{k} \leftarrow \min \{k \in \{\ell - 1, \dots, n\} \mid b_{k+1} < \mu_t(k)\}$
- (7) $x_k \leftarrow \begin{cases} b_k, & \ell \leq k \leq \hat{k} \\ \mu_t(\hat{k}), & \hat{k} < k \leq t \end{cases}$
- (8) もし $t < n$ ならば $\ell \leftarrow t + 1$, $C_i \leftarrow C_i - C_t$ とし、手順 (3) に戻る。
- (9) 終了。

図 2 従来法のアルゴリズム

Fig. 2 A conventional algorithm.

- ・ 実際にはパケットを送信するにあたって到着期限に間に合うフレームを選択するのは伝送指針の責任なので、伝送指針が正しければ送信されたパケットが到着期限を超えて届くことはない。その一方、到着期限を超えてパケットを送信するような伝送計画を用いると到着期限の早いものに対して過剰なパケットが送られることになり、伝送指針の働きも含めた全体的なアルゴリズム (図 1) の結果としても最適性が損なわれる。とはいえ、既に述べたとおり、従来法を用いて閉ループシステムでパケットを送信しても、動画全体のひずみは式 (2) を用いた場合と同等になる [1]。その理由として、よく似た伝送計画に対して伝送指針が選択するフレームは同じであることが考えられる。

4.2 提案法

閉ループシステムにおける伝送性能だけに着眼するのであれば、前章で述べたように文献 [1] によって目的は達成されている。本論文の意義は、最適な伝送計画を導くアルゴリズムが正しくはどのようなものであるかを指摘することにある。従来法を最適法に差し替えた場合、性能の劣化はあり得ないので、最適法を用いた場合も動画全体のひずみは式 (2) を用いた場合と同等になることは明らかである。

本論文で提案するアルゴリズムを図 3 に示す。従来法 (図 2) の欠点は、手順 (7) で値をひとくくりに決定しすぎていることにある。提案法 (図 3) ではこれを改め、手順 (5.1) のように必要に応じて小刻みに進めている。先ほどの例を提案法に適用すると出力として $\mathbf{x} = (2, 1/2, 1/2, 1)$ を得る。これは実行可能な伝送計画である。このアルゴリズムは式 (8) を最小化する実行可能な最適解を与える。

入力: p, n, b, m

出力: \mathbf{x}

- (1) $C_j \leftarrow \sum_{i=1}^j b_i + pm_j$ ($j = 1, \dots, n$)
- (2) $\ell \leftarrow 1$
- (3) $\mu_j \leftarrow \frac{C_j - \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i}{j - \ell + 1}$ ($j = \ell, \dots, n$)
- (4) $t \leftarrow \max \left\{ \arg \min_{\ell \leq j \leq n} \{\mu_j\} \right\}$
- (5) もし $b_\ell > \mu_t$ ならば (5.1), でなければ (5.2) を実行する.
 - (5.1) $x_\ell \leftarrow b_\ell$ として, $\ell \leftarrow \ell + 1$
 - (5.2) $x_k \leftarrow \mu_t$ ($k = \ell, \dots, t$) として, $\ell \leftarrow t + 1$
- (6) もし $\ell \leq n$ であつたら, 手順 (3) に戻る.
- (7) 終了.

図3 提案法のアルゴリズム
Fig. 3 The proposed algorithm.

[定理1] 単調減少で狭義に下に凸なひずみ関数 $d(\cdot)$ のもとで, 提案法の出力は式 (8) を最小化する実行可能な最適解である.

証明は次の章で行う.

5. 最適性の証明

図3の提案アルゴリズムの最適性を証明する. ここでは, 証明を分かりやすくするため次のような用語を導入する. 図3の手順(5)で $b_\ell > \mu_t$ が成り立ち, 手順(5.1)で $x_\ell \leftarrow b_\ell$ が実行されたフレーム ℓ を「リッチである」という. また, 手順(5)で $b_\ell \leq \mu_t$ となり, 手順(5.2)で $x_k \leftarrow \mu_t$ が実行された一連のフレーム $k = \ell, \dots, t$ に対し, それらは「同じグループに属している」という.

以降の証明では, 伝送指針の働きにより式(9)が成り立っていると仮定する.

[補題2] 提案アルゴリズムの出力 \mathbf{x} は式(5)を満たす.

(証明) リッチなフレーム j に対しては $x_j = b_j$ となる. グループに属するフレーム j に対してはグループの先頭と末尾のフレーム番号をそれぞれ ℓ, t とおくと $x_j = \mu_t \geq b_\ell \geq b_j$ となる. \square

[補題3] 提案アルゴリズムの結果に従ってフレームの並びを見ると, 一つのグループの後ろには別のグループが続く.

(証明) 手順(5)で $b_\ell \leq \mu_t$ が成立しているときの ℓ, t をそれぞれ ℓ_1, t_1 とおく. このとき,

$$x_k = \mu_{t_1} \quad (k = \ell_1, \dots, t_1)$$

となる. 更に, $\ell_2 = t_1 + 1$ として

$$t_2 \triangleq \max \left\{ \arg \min_{\ell_2 \leq j \leq n} \left\{ \frac{C_j - \sum_{i=1}^{\ell_2-1} x_i}{j - \ell_2 + 1} \right\} \right\}$$

$$\mu_{t_2} \triangleq \frac{C_{t_2} - \sum_{i=1}^{\ell_2-1} x_i}{t_2 - \ell_2 + 1}$$

とする. このとき $t_1 < t_2$ であるから, t_1 の定義より

$$\begin{aligned} \mu_{t_1} &< \frac{C_{t_2} - \sum_{i=1}^{\ell_1-1} x_i}{t_2 - \ell_1 + 1} \\ &= \frac{C_{t_2} - \left(\sum_{i=1}^{\ell_2-1} x_i - \sum_{i=\ell_1}^{\ell_2-1} x_i \right)}{t_2 - \ell_1 + 1} \\ &= \frac{C_{t_2} - \sum_{i=1}^{\ell_2-1} x_i + (\ell_2 - \ell_1)\mu_{t_1}}{t_2 - \ell_1 + 1} \end{aligned} \quad (10)$$

となり, μ_{t_1} について整理すると

$$\mu_{t_1} < \frac{C_{t_2} - \sum_{i=1}^{\ell_2-1} x_i}{t_2 - \ell_2 + 1} = \mu_{t_2} \quad (11)$$

を得る. よって $b_{\ell_2} \leq b_{\ell_1} \leq \mu_{t_1}$ であることから $b_{\ell_2} < \mu_{t_2}$ となる.

以上より, $b_\ell \leq \mu_t$ が成立したとき, 次のグループでも, $b_\ell \leq \mu_t$ が成立する. \square

[補題4] 提案アルゴリズムの出力は式(7)を満たす.(証明) まず, フレーム j をリッチであるとする. このとき補題3より, 1から j まで全てリッチなので

$$\sum_{i=1}^j x_i = \sum_{i=1}^j b_i \leq C_j \quad (12)$$

となる.

次に, j がグループに属しているとする. グループの先頭と末尾をそれぞれ ℓ, t とおくと

$$\mu_t = \min_{\ell \leq k \leq n} \frac{C_k - \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i}{k - \ell + 1} \leq \frac{C_j - \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i}{j - \ell + 1} \quad (13)$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j x_i &= \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i + \sum_{i=\ell}^j x_i \\ &= \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i + (j - \ell + 1)\mu_t \\ &\leq \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i + C_j - \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i = C_j \end{aligned} \quad (14)$$

となる.

以上より, 提案アルゴリズムの出力 \mathbf{x} は式(7)を満たす. \square

[補題5] フレーム n はグループに属する.

(証明) 背理法の仮定として, フレーム n がリッチで

あったとする。このとき補題 3 より、全てのフレームはリッチである。すなわち $x_k = b_k$ ($k = 1, \dots, n$) となる。また、最後のループで $\ell = t = n$ となっていないなければならない。すると

$$b_n > \mu_n = \frac{C_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n - n + 1} = C_n - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \quad (15)$$

すなわち $\sum_{i=1}^n b_i > C_n$ でなければならず、手順 (1) の C_n の定義に矛盾する。よって、最後のフレームはグループに属する。□

[補題 6] グループ内の最後のフレーム t に対し $\sum_{i=1}^t x_i = C_t$ が成り立つ。

(証明) グループの先頭のフレーム番号を ℓ とすると

$$x_k = \mu_t = \frac{C_t - \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i}{t - \ell + 1} \quad (k = \ell, \dots, t) \quad (16)$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t x_i &= \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i + \sum_{i=\ell}^t x_i \\ &= \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i + (t - \ell + 1)\mu_t \\ &= \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i + C_t - \sum_{i=1}^{\ell-1} x_i = C_t \end{aligned} \quad (17)$$

となる。□

[補題 7] フレーム i がリッチであり、フレーム i が最初のグループに属するならば、 $x_i > x_i$ である。

(証明) 補題 5 より少なくとも一つのグループが存在することに注意されたい。

最後のリッチなフレームの番号を ℓ_1 とおく。このとき

$$x_i = b_i \geq b_{\ell_1} = x_{\ell_1} \quad (18)$$

である。ここで手順 (3), (4) に従い

$$t_1 \triangleq \max \left\{ \arg \min_{\ell_1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{C_j - \sum_{i=1}^{\ell_1-1} x_i}{j - \ell_1 + 1} \right\} \right\}$$

とおく。すると $t_1 > \ell_1$ となる。なぜなら、もし $t_1 = \ell_1$ ならば、 ℓ_1 がリッチであることから

$$b_{\ell_1} > \mu_{t_1} = \frac{C_{t_1} - \sum_{i=1}^{\ell_1-1} x_i}{t_1 - \ell_1 + 1} = C_{t_1} - \sum_{i=1}^{\ell_1-1} b_i \quad (19)$$

より $\sum_{i=1}^{\ell_1} b_i > C_{\ell_1}$ となって C_{ℓ_1} の定義に矛盾するからである。更に $\ell_2 \triangleq \ell_1 + 1$ とし

$$t_2 \triangleq \max \left\{ \arg \min_{\ell_2 \leq j \leq n} \left\{ \frac{C_j - \sum_{i=1}^{\ell_2-1} x_i}{j - \ell_2 + 1} \right\} \right\}$$

とする。すると、 ℓ_2 は最初のグループに属し、 $t_1 \geq \ell_2$ であるため

$$\begin{aligned} x_i = x_{\ell_2} = \mu_{t_2} &= \min_{\ell_2 \leq j \leq n} \left\{ \frac{C_j - \sum_{i=1}^{\ell_2-1} x_i}{j - \ell_2 + 1} \right\} \\ &\leq \frac{C_{t_1} - \sum_{i=1}^{\ell_2-1} x_i}{t_1 - \ell_2 + 1} = \frac{C_{t_1} - \sum_{i=1}^{\ell_1-1} x_i - b_{\ell_1}}{t_1 - \ell_1} \\ &< \frac{1}{t_1 - \ell_1} \left(1 - \frac{1}{t_1 - \ell_1 + 1} \right) \left(C_{t_1} - \sum_{i=1}^{\ell_1-1} x_i \right) \\ &= \frac{C_{t_1} - \sum_{i=1}^{\ell_1-1} x_i}{t_1 - \ell_1 + 1} \\ &= \mu_{t_1} < b_{\ell_1} = x_{\ell_1} \leq x_i \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここに、2 番目の不等式で

$$b_{\ell_1} > \mu_{t_1} = \frac{C_{t_1} - \sum_{i=1}^{\ell_1-1} x_i}{t_1 - \ell_1 + 1}$$

を用いた。□

[定理 1] 単調減少で狭義に下に凸なひずみ関数 $d(\cdot)$ のもとで、提案アルゴリズムの出力は式 (8) を最小化する実行可能な最適解である。

(証明) 補題 2 と補題 4 より、提案アルゴリズムの出力は実行可能である。最適性を以下に示す。

背理法の仮定として、提案アルゴリズムの出力 \mathbf{x} が最適解でないとする。実行可能な最適解を \mathbf{x}' とおく。これは $\sum_{i=1}^n d(x'_i) < \sum_{i=1}^n d(x_i)$ を意味する。したがってこのとき、あるフレーム i に対して $d(x'_i) < d(x_i)$ すなわち $x'_i > x_i$ となっているはずである。フレーム i は、リッチであるかまたはグループに属するかどちらかである。

まず、フレーム i がリッチであるとする。補題 5 より少なくとも一つのグループが存在する。このとき、最初のグループの中のある i に対して、 $x'_i < x_i$ が成立する。なぜなら、さもなければ最初のグループの末尾 t で $\sum_{i=1}^t x'_i > \sum_{i=1}^t x_i$ となるが、補題 6 より $\sum_{i=1}^t x_i = C_t$ であるので \mathbf{x}' が実行可能であることに矛盾する。リッチなフレーム i に対して $x'_i \geq x_i = b_i$ でなければならないことに注意されたい。また補題 7

より $x_i > x_i$ である。したがって $x'_i > x_i > x_i > x'_i$ が成立する。ここで

$$\delta \triangleq \min \{x'_i - x_i, x_i - x'_i\} > 0 \quad (21)$$

を用いて x'' を

$$x''_i \triangleq \begin{cases} x'_i - \delta, & i = \hat{i} \\ x'_i + \delta, & i = \check{i} \\ x'_i, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

のように定義する。このとき x'' は実行可能である。すると補題 1 より

$$\sum_{i=1}^n d(x''_i) < \sum_{i=1}^n d(x'_i) \quad (23)$$

となるため x' の最適性に矛盾する。

次に、フレーム \hat{i} がグループに属しているとする。グループの末尾を t とおく。補題 6 と x' の実行可能性より

$$\sum_{i=1}^t x'_i \leq C_t = \sum_{i=1}^t x_i \quad (24)$$

が成り立つ。すると、 $1 \leq i \leq t$ なるある i ($\neq \hat{i}$) に対して $x'_i < x_i$ でなくてはならない。このとき i はリッチではない。もし $i > \hat{i}$ ならば式 (21), (22) のように x'' を定義すれば矛盾が導かれる。以降は $i < \hat{i}$ である場合を考える。すると i は \hat{i} と同じかそれより前のグループに属するので

$$x'_i < x_i \leq x_i < x'_i \quad (25)$$

が成り立つ。一般性を損なうことなく

$$x'_i \leq x_i \quad (1 \leq i < \hat{i}) \quad (26)$$

と仮定する。ここで式 (21), (22) のように x'' を定義する。すると $i \leq j < \hat{i}$ なる j に対して

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j x''_i &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \hat{i}}}^j x'_i + (x'_i + \delta) \\ &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \hat{i}}}^j x_i + (x_i) = \sum_{i=1}^j x_i \leq C_j \end{aligned} \quad (27)$$

となり、 x'' は実行可能である。一方、補題 1 より

$$\sum_{i=1}^n d(x''_i) < \sum_{i=1}^n d(x'_i) \quad (28)$$

となるため x' の最適性に矛盾する。

以上より、 x は最適解である。 \square

6. むすび

本論文では、到着期限のある伝送システムにおいて、ひずみを最小とする伝送計画を立てるアルゴリズムを提案し、最適性を証明した。今後は、オリジナルのフレームが有限の情報量をもつ場合や、フィードバックに誤りや遅れを考慮した場合など、より一般的な条件のもとでひずみを最小化する課題が考えられる。

謝辞 本研究の一部は、科研費 (23560448) の援助による。

文 献

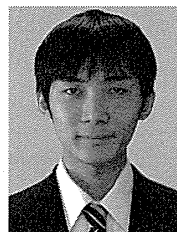
- [1] A. Faridi and A. Ephremides, "Distortion control for delay-sensitive sources," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.54, no.8, pp.3399–3406, Aug. 2008.
- [2] J.D. Salehi, Z.-L. Zhang, J.F. Kurose, and D. Towsley, "Supporting stored video: Reducing rate variability and end-to-end resource requirements through optimal smoothing," Proc. ACM SIGMETRICS, pp.222–231, May 1996.
- [3] D.P. Bertsekas, Dynamic programming and optimal control, vol.I, 3rd ed., Athena Scientific, Belmont, MA, 2005.

(平成 24 年 5 月 12 日受付, 8 月 11 日再受付)



西新 幹彦 (正員)

1998 電気通信大学大学院情報システム学研究科博士前期課程了。2001 同研究科博士後期課程了。博士 (工学)。同年同研究科助手。2007 より信州大学工学部准教授、現在に至る。2004 情報理論とその応用学会奨励賞。情報理論、データ圧縮、情報源符号化の時間的側面の研究に従事。IEEE 会員。



岩井 祐斗 (学生員)

2011 信州大・工・電気電子卒。現在、名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程電子情報システム専攻在学中。主として、フォトニックネットワークの研究に従事。