特　集　証明することのカリキュラム開発
中学校第３学年における授業化の過程及びその成果と課題

「円周角と中心角の関係の活用」において課題探究として証明することの授業化*

小　松　孝太郎**・牧　野　圭　介***

要　約

本研究では，課題探究として証明することのカリキュラム開発に関する研究の一環として，中学校第３学年において「円周角と中心角の関係の活用」に関する授業化に取り組んだ．本稿ではその授業化の過程を報告し，その成果と課題について考察する．

キーワード：課題探究，証明すること，授業化，円周角と中心角の関係

１．研究の目的

本研究では，中学校数学において課題探究として証明することを実現することを目標とし，そのためのカリキュラム開発を行っている．現在は，開発したカリキュラムの授業化に取り組んでいる．本稿では，中学校第３学年の中でも，図形領域の「円周角と中心角の関係の活用」に関する授業化の過程を報告し，その成果と課題を考察する．

２．本授業化の位置づけ

本研究のカリキュラム開発では，課題探究として証明することの中でも，証明の構想（P），証明の構成（C），評価・改善・発展（EIA）に焦点を当てている．まず，学習レベルとその移行を設定することで，中学校３年間の学習を通して生徒がこれらの一連の活動に取り組むことができるようになることを意図した．その後，各学年の学習内容に応じて「内容－活動対応表」を作成してきた（宮崎・永田・茅野，2014）．

表１は中学校第３学年の図形領域における「内容－活動対応表」である（宮崎・永田・茅野，2014；永田・小松・中川，2013）．この表１が示すように，本研究では，中学校第３学年の図形領域において，証明の構想と構成，及び評価・改善・発展という一連の活動を実現することを意図している．本稿は表１の項目の中でも「円周角と中心角の関係の活用」に焦点を当てるものである．

表１　第３学年「図形」の「内容－活動対応表」

項　　目	学習レベル・移行
三角形の相似条件	(P1，C2)→(P2，C2)
平行線と線分の比についての性質	(P2，C2)＋EIA
相似な図形の性質の活用	
円周角と中心角の関係が証明できることを知ること	(P2，C2)＋EIA
円周角と中心角の関係の活用	
三平方の定理が証明できることを知ること	(P2，C2)＋EIA
三平方の定理の活用	

３．授業の計画

筆者らは，主として評価・改善・発展を実現するための教材として，「図が付された証明問題」（Komatsu，et al.，2014）に着目した．そして，以下の問題を用いて授業を行うことにした．

問題：２点A，Bで交わる２つの円O，O′がある．点Bを通る２直線m，nが，図１のように，円O，O′とそれぞれ点C，D及び点E，Fで交わっているとき，△ACD∽△AEFであ

*平成26年８月31日受付，平成26年９月５日決定
**信州大学学術研究院教育学系
***長野県東信教育事務所

ることを証明しなさい.

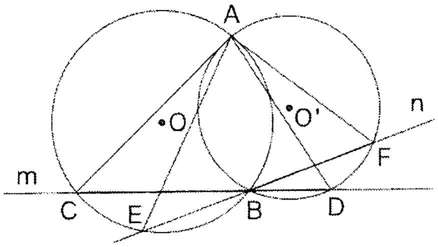

図１　原問題の図

授業は長野県の公立中学校で1.5時間かけて実施した．事前に想定した生徒の活動と学習レベルとの対応は表２の通りである（永田・小松・中川，2013）．時間配分については，証明の構想と構成を１時間目の後半に，評価・改善を２時間目にそれぞれ行うことを計画した．授業者は牧野であり，小松がその授業を観察した．授業は２クラスで行い，１クラスで授業を実施した後，その結果を踏まえて別のクラスでも授業を行った．本稿は先行クラスの授業について報告するものである（後行クラスの授業については小松・牧野（印刷中）を参照）．対象生徒の数学的な能力はいずれのクラスも高かったように思われる

表２　想定した生徒の活動と学習レベルの対応

P2	・三角形の相似条件から，二組の角が等しいことを示せば，二つの三角形が相似であることを証明できることに気付く． ・三角形の各頂点が円周上にあることから，円周角の定理を用いれば，等しい大きさの角を見出すことができることに気付く．
C2	・以上の構想に基づいて，根拠を明らかにして証明を構成する．
E	・直線nの位置を変えても，構成した証明が成り立つかどうか確かめる． ・後掲の図２の場合，円周角の定理から∠ADC＝∠AFEを導くことはできるが，∠AEFは円Oの弧ABに対する円周角ではなくなるため，∠ACD＝∠AEFを円周角の定理から導くことはできないことを見出す．
I	・円に内接する四角形の性質を用いれば∠ACD＝∠AEFを示すことができることを見出す．

当初の授業計画の概略は表２の通りであり，小松が作成した．その後，小松と牧野でその授業計画について検討し，以下の三点を変更した．第一に，原問題は対象生徒にとって比較的容易であると予想されたことから，証明の構想は省略することにした．第二に，当初は，原問題の証明において角が等しいことの根拠は「円周角の定理から」程度でよいと考えていた．しかし，その後の展開でこの根拠の部分が評価の対象となることから，証明の根拠をより丁寧に，具体的にはどの円のどの弧かを書くように指導することにした．第三に，図を提示する際に，動的幾何ソフトのGeoGebraを利用することを計画していたことから，どのような場合に証明が成り立たなくなるのかという範囲についても考える機会を設けることにした．

４．授業の結果

(1)　証明の構想と構成

教師は，まず１時間目の後半に，GeoGebra上で作図しながら図１を提示した．そして，△ACDと相似な三角形としてどの三角形が考えられるかと尋ね，ヒロト（仮名）が△AEFと答えた．

次に，教師は「証明の道筋を…考えてください／たぶん，この角とこの角が等しいんじゃないかなって印を入れたり，…相似条件はこうやってやるんじゃないかなって」と問いかけた．つまり，授業の計画段階では省略する予定であった証明の構想に取り組むように発問した．その後，教師が「相似条件どんなになりそうですか」と尋ね，ユイが「二組の角がそれぞれ等しい」と答えた．

続いて生徒は証明の構成に取り組んだ．独力で証明を構成することができた生徒は半数強であり，残りの生徒の大半も，周囲と相談しながら証明を構成することができた．その後，生徒とやりとりしながら教師が次の証明を板書した．根拠となる事柄が分かることから，これはC2レベルの証明の構成に該当するとみることができる（宮﨑・永田・茅野，2014）．

△ACDと△AEFで，
円Oの弧ABより∠ACD＝∠AEF（円周角）①
円O′の弧ABより∠ADC＝∠AFE（円周角）②
①，②より，２組の角がそれぞれ等しいので，
△ACD∽△AEF

(2)　評価・改善

2時間目では，まず前時の復習として，生徒は同じ証明を再び構成した．次に，教師がGeoGebra上で図1から直線nを少しだけ動かした場合を提示し，その場合も△ACDと△AEFが相似になることを生徒は確認した．

続いて，教師がさらに直線nを動かして図2の場合を提示したところ，多くの生徒が戸惑いを示した．そして，教師がこの場合も二つの三角形が相似であるかどうか尋ねると，生徒は「怪しい」や「いや，もうダメだろう」と答えた．

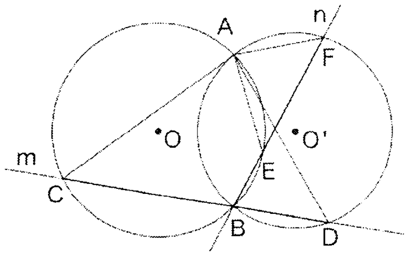

図2　直線nを動かした場合

そこで，教師は図を自分のワークシートにかくように生徒に指示した上で，次の二つの課題を与えた．第一は，二つの三角形が相似ではないと判断する理由を，前時に構成した証明を振り返って説明することである．具体的には，「この証明のこの部分がこうだから成り立つとか，成り立たないとか，まずこの証明を基に説明してもらいたい」と教師は述べた．第二は，点Eがどの位置にあるときに，前時に構成した証明が成り立つのか，あるいは成り立たないのかを指摘することである．

ところが，どの交点にどの記号を付けるのかを教師が全体で説明していたにもかかわらず，図を正しくかくことができていない生徒が複数名見られた（例えば図3）．こうした生徒は，机間指導を通じて教師から個別に助言を受けていたが，それ以降の活動を進めることに困難を感じていた．

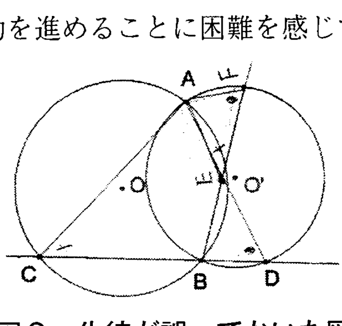

図3　生徒が誤ってかいた図

生徒は，上記の二つの課題に，個人で，続いて周囲で相談しながら10分程度取り組んだ．その後，全体で検討を行った．まず，第一の課題に関して，前時に構成した証明の中でも，②の∠ADC＝∠AFEについては意見が分かれていた．ヒナが，理由は述べずに，図2の場合もそれが成り立つと発言したところ，半数程度の生徒しか賛同しなかった．しかし，周囲と相談して確認する機会を教師が設けたところ，その他の生徒も成り立つ理由を納得することができたようであった．

一方で，①の∠ACD＝∠AEFについては，多くの生徒が図2の場合には成り立たないと考えていた．ヤマトはその理由として，「同じ，等しい弧がないから，円周角の定理が使えないので，等しくないです」や「[∠AEFが] 円周角じゃないから，円周角の定理は使えない」と説明した．

第二の課題に関しては，タイチが，点Eが点Bを通り過ぎて弧AB上に位置するときに，前時に構成した証明が成り立たなくなると答えた．

その後，教師が「じゃ，いまこれで [証明が] 成り立たないってことが分かったんだけれども，ちょっとパッと見さ，この二つの三角形はやっぱり相似じゃないかな」と述べたところ，複数の生徒が「相似っぽい」と答えた．そこで，教師は「何とかこの角 [∠ACD] とこの角 [∠AEF] っていうのが等しいと，…これ修正して直せないかな，理由を変えて説明できないかな」と発問した．

生徒は，この問いに，個人で，続いて周囲で相談しながら8分程度取り組んだ．このクラスの生徒は円に内接する四角形の性質についても学んでおり，その性質を使って求角問題を解いた経験もあった．だが，その性質を使って証明問題に取り組んだ経験はなかったこともあり，∠ACD＝∠AEFを独力で導くことができた生徒はわずかであった．そこで，教師は机間指導の間，教室に掲示してある図形の性質を利用するように示唆した．それらの性質の中には，円に内接する四角形の性質が含まれていた．∠ACD＝∠AEFとなる理由を独力で見出すことができなかった生徒も，そうした教師の示唆や周囲との相談を通じて，徐々にその理由を見出していった．

最後に，ミウが∠ACD＝∠AEFとなる理由を「[四角形ACBEは] 円Oに内接しているので，…

ここ［∠ACB，すなわち∠ACD］と，ここの向かい合う角［∠AEB］の和は180度になって，で，ここも一直線で，…ここ［∠AEB］とここ［∠AEF］も180度なので，この角［∠ACD］とこの角［∠AEF］は等しくなります」と説明した．既習であった円に内接する四角形の性質は，向かい合う内角の和が180度であることと，一つの内角がそれに向かい合う角の外角と等しいことであった．後者の性質を利用すれば∠ACD＝∠AEFをより直接的に導くことができたが，ミウの説明は前者の性質を利用したものであった．

5．本授業化の成果と課題

(1) 成果

生徒は一時間目の後半に証明の構想と構成を行った．二時間目の展開については，計画段階では，評価・改善の対象として証明を想定していた（表２）．一方，授業の冒頭では，教師が図２の場合は△ACDと△AEFが相似であるかどうか尋ねたように，評価の対象は事柄であった．しかし，前時に構成した証明を振り返ってその評価を行うように教師が促したこともあり，その後は主として証明が評価・改善の対象となった．すなわち，まず生徒は点Eが弧AB上にある場合について前時の証明を検討し，その証明が成り立たなくなることを理解した．その後，生徒は点Eが弧AB上にある場合に成り立つようにその証明を修正した．以上より，生徒は教師の導きの下，証明の構想と構成，及び評価・改善を行うことができたといえ，そのことが本授業化の成果として挙げられる．

(2) 課題

一方で，今回の授業の結果から，次の二つの課題が明らかとなった．第一は，評価・改善において図を正しくかくことができなかった生徒が複数名見られたことである．図形領域における証明問題では，あらかじめ教師や教科書から図が示されることが多い（Herbst & Brach, 2006）．図が付された証明問題で評価・改善・発展を実現するためには，問題の文章に即して生徒が自ら図を正しくかけるようになるように指導する必要がある．

第二に，生徒のより自律的な活動を実現するためには，複数の課題を開発し，教師の学習指導もふまえてそれらを系列化することが重要である．例えば，今回の授業では，図２の場合について，∠ACD＝∠AEFとなる理由を独力で導くことができた生徒はわずかであった．この状況を改善するためには，円に内接する四角形の性質を使った証明問題を事前に扱う必要があると思われる．また，今回の授業では，評価・改善の契機となる図２は教師が示し，評価・改善において何を行うのかも教師が指示する形となった．生徒が複数の課題を解決することを通じて，次第に教師の導きから離れ，証明の構想と構成，及び評価・改善・発展に自律的に取り組めるようになることを目指すことが重要である．

謝辞

本研究は科学研究費補助金（No.23330255, 24730730）の助成を受けている．

引用・参考文献

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students?. *Cognition and Instruction, 24*(1), 73-122.

小松孝太郎・牧野圭介(印刷中).「中学校数学における課題探究として証明することの授業化：第３学年の小単元'円周角と中心角の関係の活用'」.『日本科学教育学会第38回年会論文集』.

Komatsu, K., Tsujiyama, Y., Sakamaki, A., & Koike, N. (2014). Proof problems with diagrams: An opportunity for experiencing proofs and refutations. *For the Learning of Mathematics, 34*(1), 36-42.

宮崎樹夫・永田潤一郎・茅野公穂（2014).「中学校数学における課題探究として証明することのカリキュラム開発：進行状況と授業化の意味・役割」.『日本数学教育学会誌 数学教育』, 96(9).（本誌掲載）

永田潤一郎・小松孝太郎・中川裕之（2013).「課題探究として証明することのカリキュラム開発：中学校数学科第三学年の領域'数と式'及び'図形'における学習の構想」.『日本数学教育学会第１回春期研究大会論文集』, pp. 25-32.