研究論文

# ラカトシュの可謬主義から見た数学的探究とその教育的意義

## ～証明に焦点を当てて～

小　松　孝太郎
信州大学教育学部

# Mathematical Inquiry and Its Educational Values from a Lakatosian Fallibilist Perspective: Focusing on Proof and Proving

Kotaro KOMATSU

Faculty of Education, Shinshu University

Recently, owing to their desire to cultivate pupils' ability to learn and think for themselves, educational researchers and practitioners emphasize inquiry-based learning. Toward inquiry-based learning relying on proof and proving, this paper deliberates a normative meaning of mathematical inquiry from a Lakatosian fallibilist perspective, and discusses educational values of mathematical inquiry. Firstly, this paper examines three aspects of mathematical inquiry and their sub-aspects, through analyzing Lakatos' chief book *Proofs and Refutations* (Lakatos, 1976) in detail. By synthesis of these aspects, this paper then conceptualizes the meaning of mathematical inquiry as "conjecturing statements through investigation of properties or relations of mathematical objects, proving them, and then refining the statements and proofs through refuting them, with the aim to reducing their uncertainty". Subsequently, this paper discusses educational values of the mathematical inquiry from three standpoints; change of pupils' views of mathematics, and their learning on methods for productive mathematical activities; change of pupils' views of proof and proving; learning of proof and proving from primary school level.

Key words: mathematical inquiry, proof and proving, Lakatos, fallibilism, proofs and refutations, heuristic rule, increasing content by deductive guessing, action proof

## Ⅰ. 研究の意図と目的

近年，学校教育では，自ら学び自ら考える力の育成をより一層進めるために，探究型の教育を充実することが求められている．学校数学で扱われる証明に関しても，これまで証明の様々な機能が指摘されてきたように，単に与えられた事柄が成り立つことを立証するだけにとどまらない，より豊かな学習を展開していく必要がある（De Villiers, 1990; Hanna & Jahnke, 1996; 宮崎，1993）．とりわけ最近では，探究的活動としての証明を実現することが一つの目標とされ，推測の生成，論じる活動，探索・評価活動の三つが共同体の中で一体的に展開される学習が志向されている（両角，2010; 岡崎，2010; 関口，2002）．

ここで，その探究それ自体の意味に立ち返ると，それはデューイによれば，「不確定な状況を統一され確定した状況に，方向づけられコントロールされた仕方で転化させること」（デューイ，1938/1968: 504）を意味する．そして，不確定な状況を先行条件として，困難の感得，問題の設定，問題解決策の確定，推論，実験という五つの様相が相互循環的に関係し合いながら，探究は絶えず継続的に進むものとされている（杉浦，1984）．しかし，デューイの探究概念は，各学問の内容や方法には依存しない包括的なものである（佐々木，1974）．したがって，証明に関して探究型の教育を目指していくためには，数学の特性が反映された「数学的探究」の意味を，証明の文脈に限定して特徴付ける必要がある．

ところが，従来の研究では，数学的探究という用語を無定義で用いることが多く，またその意味も数学の特性を考慮した形では十分に検討されてこなかった[1]．例えば，証明に焦点を当てて数学的探究の意味を考察した先行研究として関口（2002）が挙げられ，関口はそこでコーディンガーの提示した図式（Koedinger, 1998: 329）に依拠している[2]．しかし，コーディンガー自身は，推測や議論に関する技能を目標構造の形で表す認知モデルとして，その図式を示しているのである．そして，関口自身もコーディンガーの図式を再構成するにあたって，図式中の各要素の重要性を，数学的な立場からではなく構成主義的教育観の立場から述べている[3]．

そこで，本研究では，数学の特性を考慮して数学的探究の意味を特徴付けるために，数学の研究それ自体を考察の対象としている数理哲学に着目する．そして，その中でも次の二つの理由からラカトシュの「可謬主義」を選択する．第一に，ラカトシュの主著『証明と論駁』(Lakatos, 1976）では，本研究の焦点である証明が大きく取り上げられている．したがって，ラカトシュの研究は，数学的探究の意味を証明の文脈に限定して捉えようとしている本研究の問題意識と合致している．第二に，本稿で考察するように，可謬主義は非形式的で準経験的な数学が成長していく過程を描写することを目的として提唱されたものである．そのため，可謬主義の立場から規定した数学的探究を数学教育に援用することは，数学の創造過程の一端を反映した学習を実現することにつながる．

以上より，本稿では証明に焦点を当てた上で，ラカトシュの可謬主義に基づいて数学的探究の意味を明らかにし，その数学的探究の教育的意義を指摘することを目的とする．そのために，まず数学的探究の意味を明らかにするにあたって，本研究が依拠する可謬主義の基本的立場を概観する（第II節）．次に，以下の方法によって数学的探究の概念を規定する．数学的探究とは一般に何らかの一連の活動であるといえ，その一連の活動の過程では，いくつかの部分的な行為が見られると思われる．そこで，本稿では，その部分的な行為を数学的探究の側面として捉え，その側面を合わせる形で数学的探究の意味を明らかにする．より具体的には，ラカトシュの主著『証明と論駁』の内容を具体的に検討することを通じて，可謬主義から見た数学的探究の側面を挙げ（第III節），それらの側面を総合して数学的探究の概念を規定する（第IV節）．そして，数学教育の研究に言及しながら，その数学的探究の教育的意義について議論する（第V節）．

最後に，本研究の対象である数学的探究の位置を明確にしておきたい．本研究は，数学的探究を数学教育の概念としてではなく，何らかの数学的な営みを意味するものとして捉えている．そして，数理哲学上の立場であるラカトシュの可謬主義に基づいて，その数学的探究の意味を特徴付けようとするのである．

## II．数理哲学における可謬主義の基本的立場

ラカトシュの可謬主義に多大な思想的影響を与えた研究として，ポリヤの「発見学」及びポパーの「反証主義」が挙げられる（デービス・ヘルシュ，1982/1986; Yuxin, 1990）．実際，『証明と論駁』の編者であるウォラルとザハールによれば，ラカトシュはこの著書の原型となった論文の謝辞において，「本論文は，ポリヤの数学的発見学の復興，及びポパーの批判哲学を背景にするものとして見られたい」(Lakatos, 1976: xii）と述べている．

そして，ラカトシュは『証明と論駁』の中で提示した事例研究の目的に関わって，可謬主義の基本的立場を次のように示している．

> この事例研究の核心は数学の形式主義に挑戦することにあるが，数学的独断論の究極的立場に直接挑戦しようとするものではない．そのささやかな目的は以下の点を練り上げることである．それは，非形式的で準経験的な数学は，疑いの余地なく確立された定理の数を単調に増加させることを通じてではなく，思索と批判，証明と論駁の論理によって推測を絶え間なく改良することを通じて成長するということである．(Lakatos, 1976: 5)

このように，ラカトシュはポリヤと同様に，数学を基礎付ける試みよりも，数学が創造されていく過程を描写することを目的としている．そして，その過程では定理とその証明が単調に積み重ねられていくのではなく，ポパーが定式化した「推測と論駁の方法」（ポパー，1972/1974）に見られるように，事

柄を生成して証明した後に，さらに批判や修正を繰り返しながら，よりよい事柄や証明を追究していく活動が続くとラカトシュは考えているのである(Nunokawa, 1996)[4]．

ラカトシュは『証明と論駁』において，こうした数学観を主に二つの事例研究という形で提示している．その第一は多面体に関するデカルト・オイラー予想であり，「多面体の頂点の数を $V$，辺の数を $E$，面の数を $F$ とすると，すべての多面体について $V-E+F=2$ である」を原推測とするものである．第二は一様収束を題材としたものであり，具体的には命題「連続関数の任意の収束級数の極限はそれ自身連続である」の証明，反例，そしてその証明の分析や命題の修正である．その中でも前者の事例研究は，仮想の生徒と教師との対話の形で記述されている．そして，ラカトシュは数学史上の実際の出来事を脚注で補足しながら，その歴史を合理的に再構成して記述している．

ラカトシュはその合理的再構成のいわば規準となるものを，数学的発見のパターンとして，あるいは非形式的な数学の理論が成長していくパターンとして，次のように定式化している．

(1) 原推測
(2) 証明（概略的な思考実験もしくは議論であり，原推測を部分推測または補題に分解する）
(3)「大局的」反例（原推測に対する反例）の出現
(4) 証明再検討：大局的反例が「局所的」反例となるような「有罪補題」が見出される．この有罪補題は以前には「隠れていた」もしくは誤認されていたかもしれない．今やそれが顕在化され，原推測の中に条件として組み込まれる．定理―改良された推測―は，その卓越した新しい特徴として新しい証明生成概念を伴い，原推測を乗り越える．

(Lakatos, 1976: 127，強調は原文，以下同様)

このように，まず事柄が推測され，その事柄が成り立つことの証明が試みられる．その試みでは，厳密な証明を構成することではなく，事柄をいくつかの補題に分解することが行われる．その後，事柄それ自体を論駁する反例，すなわち「大局的反例」が見出される．続いて，その大局的反例に対処するために証明を分析することが行われる．具体的には，まずその証明の中から，その大局的反例によって反証されてしまう補題を見出す．ここで，このように事柄ではなく証明の方を論駁する反例は「局所的反例」と呼ばれる．そして，その反証されてしまう補題を事柄の条件として組み込むことで，事柄が成り立つ範囲を的確に制限するのである[5]．ラカトシュはこうした行為を「補題組み込み法」と呼んでいる(Lakatos, 1976: 34)．

もちろん，ラカトシュは数学が創造されていく過程すべてにこのパターンを適用することが可能であるとは考えていない（Lakatos, 1976: 42)．すなわち，補題組み込み法を通じて事柄を洗練することが常に可能であるとは限らない．それが可能になるのは，反例や証明を通じて事柄の素朴さが明らかになる場合であり，成熟した理論ではそのような場合が起こらないと予想される．それよりも，非形式的で準経験的であり，さらに成長の過程にある数学の理論において，前述のパターンが現れるとラカトシュは主張している[6]．

## III．可謬主義から見た数学的探究の側面

ラカトシュの可謬主義の更なる具体的な意味については，多面体に関するデカルト・オイラー予想を題材とした事例研究の中に見られる．そこで本節では，その事例研究を具体的に検討しながら数学的探究の側面を明らかにする．

まず，第II節で言及した非形式的数学の成長パターンに着目すると，それは大きく次の二つに分けることができる．すなわち，前半の（1）と（2）は事柄の推測と証明であり，後半の（3）と（4）は事柄の論駁と洗練である．その一方で，デカルト・オイラー予想を題材とした事例研究では，事柄ではなく証明の方を論駁して洗練する行為も議論されている．したがって，本稿では，数学的探究の側面を，事柄の推測と証明，証明の論駁と洗練，及び事柄の論駁と洗練の三つに大別して検討する．

ここで，その中でも後者二つ（証明の論駁と洗練，及び事柄の論駁と洗練）をより詳細に考察するためには，何らかの観点を設定することが必要になる．なぜなら，それらの側面に関して，ラカトシュは『証明と論駁』において仮想の生徒と教師に多様な意見を表明させているが，その中でラカトシュがどの意見に価値を見出しているのかは必ずしも

明示的ではないからである（デービス・ヘルシュ，1982/1986）.

その観点として，前述の非形式的数学の成長パターンを用いることも考えられる．だが，上述のように，その成長パターンには，証明の論駁と洗練に該当する記述それ自体が見られない．また，事柄の論駁と洗練については，その成長パターンの（4）で補題組み込み法が挙げられている．しかし，デカルト・オイラー予想に関する事例研究では，補題組み込み法には限らない様々な行為が取り上げられ，生徒や教師がその中でもある特定の行為を称賛している様子も窺える.

そこで，本稿では，証明の論駁と洗練，及び事柄の論駁と洗練についてより具体的に検討するための新たな観点として，次の理由から，ラカトシュが定式化している「発見法的規則（heuristic rule）」に着目する．ポリヤによれば，発見学（heuristic）の目的は，「発見や発明の方法と規則とを研究すること」（Polya, 1957: 112）である．また，「近代発見学は，問題を解決する過程，特にこの過程において‘概して有効な思考作用’を理解しようと試みている」（前掲：129–130）とポリヤは述べている．それゆえ，ポリヤがラカトシュに大きな思想的影響を与えていたことを考えれば，ラカトシュもまたポリヤと同様に，発見法または発見学という用語に規範的な意味を付していたと推測することができる．その上，ラカトシュの発見法的規則には，第Ⅱ節で触れた非形式的数学の成長パターンとは異なり，証明の論駁と洗練に該当する記述が見られ，事柄の論駁と洗練に関しても，補題組み込み法に加えて別の行為も挙げられている．したがって，この発見法的規則に着目することによって，上述の二つの側面に関して，それらの具体的な内容を明らかにすることが可能になると思われるのである.

**1．事柄の推測と証明**

『証明と論駁』において，生徒と教師との対話は，原推測「すべての多面体について $V-E+F=2$ である」に関して，教師がその証明を提示することから始まっている．つまり，事柄がまず与えられたものとして存在し，それからその事柄の証明を試みるという展開が採られている．しかし，ラカトシュはこの原推測を予想して検証する局面はポリヤ（Polya, 1954）が議論していること，そして自身はそのポリヤの続きから多面体に関する議論を始めることを明言している．したがって，ラカトシュがポリヤから多大な思想的影響を受けていたことを考慮すれば，自ら推測した事柄に対して証明を行うこともラカトシュは重視していたと思われる[7].

そのため，まずポリヤの展開を概観すると，最初は「複雑な多面体には数多くの面，頂点，そして辺がある」という漠然とした気付きから始まる．次に，より明確な問い「頂点の数 $V$ が増えるとき，一般に面の数 $F$ も増えるであろうか」を立て，いくつかの多面体について実際に確かめる．その結果，その問いが棄却されることがわかると，さらに新たな問いを立てる．そして，その過程を繰り返す中で前述の原推測を見出すようになり，さらに他の多面体についてもそれが成り立つかどうかを検証していく.

このように，数学的な対象のもつ性質や関係を調べていく中で，次第にその性質や関係に関して成り立つ事柄を見出していくようになるのである．さらに，デカルト・オイラー予想では帰納的推論が取り上げられているが，ポリヤ自身が他の事例で述べているように，事柄を推測する方法としては，他にも類比的推論や既知の事柄の一般化または特殊化などが考えられる.

こうして生成された原推測に対して，ラカトシュはコーシーに由来する次の証明をまず提示している．第一段階として，多面体の表面が薄いゴムでできており，その中身が空洞であると想定する．面の一つを切り出すと，残りの表面を破らずに黒板上に平らに伸ばすことができる（図 1-①は立方体の場合）．その際，面や辺は歪むが，$V$, $E$, $F$ の値それ自体は変化しない．面の一つを取り除いていることから，その平らに伸ばされた形で $V-E+F=1$ が成り立つことを示せばよい.

第二段階では，このようにして得た形において，三角形ではない多角形があれば，対角線を引いてそれを三角形に分割し，ネットワークを作る（図 1-

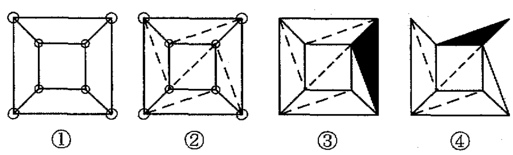


**図 1　コーシーの証明（Lakatos, 1976: 8）**

②）．このとき，対角線を一本引くにつき，辺と面の数がそれぞれ一つずつ増えるため，全体の $V-E+F$ の値は変化しない．

第三段階では，このネットワークから三角形を一つ一つ取り除いていく．このとき，一つの辺を取り除くか，もしくは二つの辺と一つの頂点を取り除くかのいずれかになり（図1-③及び④），いずれの場合であっても全体の $V-E+F$ の値は変化しない．そして，この三角形を取り除いていく手続きの最後には三角形が一つだけ残り，それゆえ $V-E+F=1$ が成り立つ．

『証明と論駁』では，教師からこの証明が提示されると，生徒は各段階の不確かさについて次々と疑問を呈している．以下の引用は教師がそうした批判に対して回答する中で，証明の意味について言及している部分である．

> 教師：（中略）とりあえず，以下のような思考実験もしくは「準実験」に対して，由緒ある専門用語「証明」を用い続けましょう．それは，原推測を部分推測または補題に分解し，そうしてその原推測をおそらくは極めて隔たった知識体系の中に埋め込むことを示唆するような思考実験のことです．例えば，私たちの証明は，結晶体や立体についての原推測を，ゴム版の理論に埋め込んだわけです．（Lakatos, 1976: 9）

この教師の発言からラカトシュの証明観を読み取ることができる．それは，多面体の表面が薄いゴムで構成されていると想定したり，面の一つを切り出して黒板上に平らに伸ばしたりする等，非形式的な方法を用いているコーシーの証明を，正統な証明として認めていることである．実際，ラカトシュはこの証明を「非形式的証明」または「前形式的証明」の一例であると述べ，このように定理が真であることを直観的に示すことを「思考実験」と呼んでいる（Lakatos, 1978: 63, 65）．そして，ラカトシュはこうした非形式的証明や思考実験は数学的な事実を確立する際によく行われる方法であると主張している．

## 2．証明の論駁と洗練

『証明と論駁』では，教師がコーシーの証明を示すと，生徒から様々な局所的及び大局的反例が提示される．そして，事柄や証明の不確かさが次第に明らかになっていくものの，生徒と教師は互いに議論を交わしながら，その不確かさを解消することを目指して，既存の事柄や証明をよりよいものへと洗練していく．

はじめに，証明の論駁に関わって，生徒はコーシーの証明を論駁する局所的反例を次々と提示する．例えば，証明の第三段階には，補題「ネットワークから任意の三角形を一つ一つ取り除いていく場合，一つの辺を取り除くか，もしくは二つの辺と一つの頂点を取り除くかのいずれかになる」が含まれている．しかし，例えば図2のように内側から三角形を取り除けば，辺や頂点を取り除くことはない．四面体であれば，ネットワーク上の三角形はすべて境界三角形となり前述の補題は成り立つため，この局所的反例は，四面体を除くすべての多面体についてこの補題を論駁することにつながる．この論駁に対して，教師は補題の前半部分を「ネットワークから任意の‘境界’三角形を一つ一つ取り除いていく場合」と修正することで対応する．

証明を論駁する局所的反例に直面した際，例えばデカルト・オイラー予想を四面体の場合に限定するように，事柄の範囲をその証明が成り立つ範囲に制限することも考えられる（Lakatos, 1976: 57–58）．しかし，ラカトシュは上述の教師の対応に見られるように，事柄は変えずに証明の方を修正する行為をより重視する．以下は生徒から初めて局所的反例が提示された際の教師の発言である．

> 教師：あなたは議論―証明―の貧困さは示しましたが，私たちの推測が誤っていることは示していないのです．（中略）批判に耐えるよう私の証明を改良しましょう．（中略）その誤った補題を，あなたの反例が論駁しないであろう形にわずかに修正した補題に置き換えることによって，容易に証明を洗練し，そして改良することができます．（Lakatos, 1976: 11）

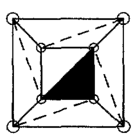

**図2　局所的反例**

そして，ラカトシュは発見法的規則の第四規則として，「局所的であるが大局的でない反例を得たならば，論駁された補題を反証されないものに置き換えることによって証明分析を改良せよ」（Lakatos, 1976: 58）を挙げている．この規則は二通りに解釈することが可能である．第一は，前述の教師の発言に見られるように，全体的な証明には変更を加えず，論駁された補題のみを修正することである．第二はより抜本的な解釈であり，証明の部分的な変更ではなく，別のより深い証明を考案することである[8]．ラカトシュはその上で，後者のように複数の証明と論駁を通じて事柄を洗練していく方法を，証明の部分を複数形にした「証明と論駁の方法（the method of proofs and refutations）」と呼んでいる（Lakatos, 1976: 64）[9]．

したがって，証明の論駁や洗練に関しては，更なる下位側面として，証明を論駁する局所的反例を探すこと，またはそのような反例に直面すること，そしてその論駁に耐えられるよう証明の一部を修正したり，別のよりよい証明を考案したりすることが挙げられる．

### 3．事柄の論駁と洗練

『証明と論駁』では，証明ではなく原推測それ自体を論駁する大局的反例も生徒の側から数多く提示される．そして，大局的反例に対処する方法の中でも，ラカトシュはまず「モンスター排除法」，「例外排除法」，及び「モンスター調整法」を挙げている[10]．そして，特に前者二つを批判した後，ラカトシュは「補題組み込み法」と「演繹的推量による内容の増加」を発見法的規則として定式化している．そのため，以下ではそれら二つの方法について検討する．

#### a．補題組み込み法

第Ⅱ節で言及したように，補題組み込み法では，事柄を論駁する大局的反例に直面した際，まずその事柄の証明を分析し，その大局的反例によって反証されてしまう補題を明らかにする．そして，その補題を事柄の条件として組み込むことで，大局的反例を含まないように事柄が成り立つ範囲を限定するのである[11]．

例えば，図３の「額縁」に関して，その $V-E+F$ の値は０であり，ゆえにそれは原推測を論駁する大局的反例となる．ここで，コーシーの証明を分析すると，図３はその第一補題を反証することがわかる．なぜなら，「額縁」の一つの面を取り除いても，それを黒板上に平らに伸ばすことができないからである．そこで，多面体の中でも一つの面を取り除いて平面上に伸ばすことが可能なものを「単純多面体」と呼ぶことにする．そして，原推測を「すべての単純多面体について $V-E+F=2$ である」と言い換えることで，図３の大局的反例が事柄に含まれないように修正することが可能になるのである．

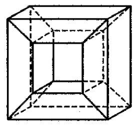

**図３　大局的反例（Lakatos, 1976: 19）**

補題組み込み法は，数学の研究に特有な証明を用いて事柄を修正するものであり，それゆえラカトシュは事柄を洗練するための重要な方法として，この補題組み込み法を強調している．それは証明問題の目的に関する次の発言に表れている．

> 生徒Ａ：私たちは二つの自明でない補題を条件に転化したら推測の改良を止めることができます．実際，私は補題組み込みによるこの改良の方法は完璧だと思っているのです．それは推測を改良するだけでなく<u>完全なものにする</u>ように思われます．さらに，このことから私はある重要なことを学びました．「‘証明問題’の目的は，ある明確に述べられた主張が真であることを決定的に示すことか，そうでなければその主張が偽であることを示すことである」（引用者注：ポリヤの引用）と主張することは誤りです．「証明問題」の<u>真の</u>目的は，元々の<u>「素朴な」推測を改良して</u>―実際，完全にし―<u>本物の</u>「定理」にすることであるべきです．（Lakatos, 1976: 41）

そして，大局的反例を積極的に探し出し，補題組み込み法を通じて事柄を洗練していく行為を，ラカトシュは発見法的規則の第一及び第二規則として定式化している．

> 規則１：推測を得たならば，それの証明と論駁に着手せよ．自明でない補題のリストを準備するた

めに証明を注意深く点検せよ（証明分析）．推測に対する反例（大局的反例）と疑わしい補題に対する反例（局所的反例）の両方を見出せ．
規則２：推測を放棄させる大局的反例を得たならば，その反例によって論駁されてしまう適当な補題を証明分析に加え，放棄された推測を，その補題を条件として組み込んでいる改良された推測で置き換えよ．論駁をモンスターとして片付けるな．すべての「隠れた補題」を明らかにするよう試みよ．（Lakatos, 1976: 50）

このように，ラカトシュの研究において補題組み込み法は，事柄を洗練していくための重要な方法として位置付けられている．ラカトシュのそのような姿勢は，補題組み込み法を後に，著書『証明と論駁』の主題にも直結する「証明と論駁の方法（the method of proof and refutations)」へと換言していることにも表れている（Lakatos, 1976: 49–50）.

**b. 演繹的推量による内容の増加**

ラカトシュは補題組み込み法の他に，事柄の洗練に関してもう一つ重要な方法を挙げている．それはラカトシュが「演繹的推量による内容の増加」（以下，ラカトシュに従って単に演繹的推量とする）と呼んでいるものであり，大局的反例をも例として含むより一般的な事柄を作り出すことである(Lakatos, 1976: 76)[12]．

例えば，図３の「額縁」では$V-E+F=0$であり，それは原推測を論駁する大局的反例であった．ここで，図4-①のように二つの立体を用意し，それらを接合させる形で「額縁」を構成する（図4-②)．当初の二つの立体は$V-E+F$の値がともに２であるから，それらの$V-E+F$の和は４となる．しかし，その接合により，頂点と辺の数は同数だけ減少し，四つの接合面が減少することになる．それゆえ，「額縁」の場合には$V-E+F=0$となるのである．さらに，同様に「額縁」に図4-③の立体を接合させることで，二つの穴をもつ立体（図4-

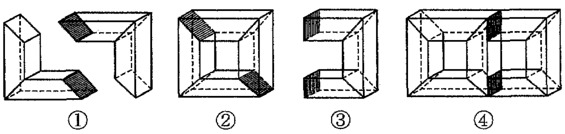


**図４　演繹的推量（Lakatos, 1976: 77）**

④）では$V-E+F=-2$となることを導くことができる[13]．そして，以上の考察を続けることによって，より一般的な事柄「$n$個の穴をもつ多面体で，そのすべての面が単連結であれば，$V-E+F=2-2n$である」を作り出すことが可能になるのである[14]．

この演繹的推量は，補題組み込み法と同様に，発見法的規則の一つとして定式化されている．それは第五規則であり，ラカトシュは「いかなる型であれ反例を得たならば，演繹的推量によって，それらの反例がもはや反例ではなくなるより深い定理を見出すことに努めよ」(Lakatos, 1976: 76）と述べている．そして，演繹的推量を讃える発言も見られる．

生徒Ａ：この漸次的ではあるが，勝利を約束されたキャンペーン（引用者注：演繹的推量）によって，私たちは次のような定理に導かれるでしょう．それはそれ自身自明ではない定理です．しかし，連続的で不断であり，その過程で各段階の明確な展望をもつような精神の働きによって，真で既知の原理から演繹される定理です（引用者注：以上の二文はデカルトを参照)．その定理は，「偏見のない」観察や突然の洞察のひらめきによっては決して到達できなかったでしょう．（Lakatos, 1976: 82）

『証明と論駁』の展開を事例として述べれば，当初はいくつかの立体を具体的に調べることを通じて$V-E+F=2$を推測した．しかし，そのような立体と$V-E+F=0$となる「額縁」との関連を見出すことはできなかった．それに対して，そうした経験的方法には依存しない演繹的推量を用いたからこそ，「額縁」はもちろん，より一般的に$n$個の穴をもつ多面体についても成り立つ事柄を作り出すことができたのである．

本項の考察を要約すると，事柄の論駁や洗練に関しては，更なる下位側面として，事柄を論駁する大局的反例を探すこと，またはそのような反例に直面すること，そして証明の分析を通じて事柄の成り立つ範囲をより的確に述べたり，大局的反例をも例として含むより一般的な事柄を作り出したりすることが挙げられる．

## Ⅳ．可謬主義から見た数学的探究の意味

これまでラカトシュの可謬主義から見た数学的探究の側面として，まず数学的な対象のもつ性質や関係について調べていく中で事柄を推測し，そしてその事柄を証明することを挙げた．さらに，それらの事柄や証明は不確実であり得るがゆえに，その不確かさを解消することを目指して，証明の論駁と洗練，及び事柄の論駁と洗練に継続的に取り組むことを見てきた[15]．以上をまとめると，数学的探究の意味は，「数学的な対象のもつ性質や関係について調べていく中で事柄を推測し，その事柄を証明し，さらに事柄と証明の不確かさを解消することを目指して，その事柄と証明を論駁しながら洗練していく活動」と捉えることができる．

この数学的探究の意味についてさらに二点を付言しておく．第一は証明の意味についてであり，ここでの証明は数学的に厳密な証明のみに限定されるわけではない．そして，事柄の証明には，単に証明を構成することだけでなく，そうした証明を構成するに至るまでの様々な行為も含まれ，そのことは論駁や洗練の対象となる証明についても同様である．実際，ラカトシュはデカルト・オイラー予想について，多面体の表面が薄いゴムで構成されていると想定したり，面の一つを切り出して黒板上に平らに伸ばしたりするコーシーの証明を取り上げている．そして，ラカトシュはコーシーの証明を非形式的証明と呼び，このように非形式的な方法で事柄を証明することを正統な行為の一つとして認めている[16]．

第二は，数学的探究の側面には，それらの下位側面も含めて，必ずしも順序性はないことである．例えば，事柄の論駁と洗練について，更なる下位側面として，事柄を論駁する大局的反例に直面することや，証明の分析を通じて事柄の成り立つ範囲をより的確に述べることを挙げた．しかし，大局的反例に直面することが常に証明の分析に先行するとは限らない．このことはラカトシュ自身も触れており，大局的反例に直面する前に証明の中から疑わしい補題を取り出して分析することを，「高水準の証明分析」と呼んでいる（Lakatos, 1976: 48)．そして，高水準の証明分析を通じて補題を論駁する局所的反例を見出し，その局所的反例が大局的反例となって事柄を論駁するようになる可能性が指摘されている[17]．

## Ⅴ．数学的探究の教育的意義

これまでラカトシュの可謬主義に依拠する形で数学的探究の意味を捉えてきた．この可謬主義は数理哲学上の立場であるため，そこから直ちに教育的な意義を導出することは難しい．そこで本節では，数学教育の研究に言及しながら，数学的探究の教育的意義を指摘する．

以下では次の三点に焦点を当てて論を展開する．まず，数学的探究に子どもが取り組むことそれ自体に意義がなければ，数学的探究を数学教育に導入する意味はない．よって，第一に，広く数学の学習という観点からその意義について考察する．第二に，本稿では事柄の論駁と洗練の下位側面として演繹的推量を取り上げたが，数学教育の研究でこの演繹的推量について考察しているものは管見の限り見られない[18]．そのため，次に，より限定的に証明の学習という観点から，この演繹的推量に子どもが取り組むことの意義を議論する．第三に，前述のようにラカトシュは証明の意味をより広義に捉えており，非形式的証明を正統な証明として認めている．そこで，数学教育においても証明の意味をより広く捉え，小学校段階から証明の学習を展開することの意義を最後に検討する．

### 1．数学的探究を通じての数学観の変容と方法知の学習

本研究ではラカトシュの可謬主義に基づいて数学的探究の意味を捉えた．この可謬主義は，本稿の第Ⅱ節で述べたように，非形式的で準経験的であり，そして成長の過程にある数学の理論がどのように創造されていくのかを描写することを目的として提唱されたものである．したがって，本稿で概念規定した数学的探究に子どもが取り組むことは，数学の創造過程の一端を反映した学習を実現するという点で，それ自体に意義があるといえる．それに加えて，数学的探究の教育的意義としてさらに次の二つが挙げられる．

第一は子どもの数学観の変容が期待されることである．本稿で規定した数学的探究は，その側面として証明の論駁と洗練，そして事柄の論駁と洗練を含むように，証明を構成することは一連の活動の中間点に過ぎない．むしろ，数学的探究の核心は，その後に，事柄や証明の不確かさを解消することを目指

して，それらを論駁しながら洗練していくことにある．したがって，数学的探究に子どもが取り組み，その体験を振り返ることは，子どもが数学を，知識が常に暫定的であることを認めながらも，より確からしさを求めて知識を更新していく前進的な活動として見るようになる契機になり得る（Borasi, 1992）．

その一方で，現状では，多くの子どもは数学を規則の集まりとして捉え，数学にはしばらく新しい発見がないと考えているようである．また，数学の問題はある決まりきった解法に従って解くものであり，数学の問題を解く際に新しい考えが入る余地はないと見ている子どもも多いと思われる（国立教育研究所，1991）．このような数学観を抱いている子どもは，他者から与えられた規則や解法を批判的に検討せずにそのまま受け入れ，単にそれらを適用して問いに答えるだけの受動的な姿勢で数学の学習に臨んでいると予想される．

それに対して，数学的探究を子どもが経験することは，子どもの数学観が，前述のように，数学的な知識の暫定性を認める見方へと変わることにつながる．その結果，子どもは数学の学習においても，自身や他者の考えには常に不確実な要素があることを認め，それらを批判的に吟味するようになると思われる．そして，そうした批判を乗り越えるために，より確かなものを求めていこうとするようになることが期待される．

第二は方法知の学習についてである．本稿では，ラカトシュの発見法的規則を指標として，証明の論駁と洗練，及び事柄の論駁と洗練の下位側面を明らかにしてきた．この発見法的規則は，事柄や証明を洗練させるための一種の方法知を表しているといえる．実際，ラカトシュに大きな思想的影響を与えたポリヤによれば，発見学の目的は「発見や発明の方法と規則とを研究すること」であった（第Ⅲ節）．そして，ラカトシュ自身も発見法的規則を一貫して「もし…ならば…せよ」という形で記述しているように，一つの方法知を表すものとして発見法的規則を定式化している．それゆえ，数学的探究の全体ではなくても，その下位側面となっているある部分的な行為に子どもが取り組み，さらにその過程を振り返って顕在化させることは，子どもがそうした方法知を学習することに結び付く（Mason, Burton & Stacey, 1985）．

事柄や証明を洗練させるための方法知を学ぶことは，子どもが自らの力で数学の創造的な活動に取り組むことができるようになるために重要である．なぜなら，数学の創造的な活動は子どもにとって容易であるとは限らず，それゆえそうした活動を方向付けて支える知識が必要になるからである．もちろん，当初は教師の支援が不可欠であろうし，あるいは数学的探究の中でもある特定の側面に焦点を当てた学習も必要になると思われる．しかし，そうした中で次第に数々の方法知を学習していき，さらにそれらの方法知を総合して自身の活動の指針としていくことによって，子どもがいずれ自らの力で数学の創造的な活動に立ち向かっていくことができるようになると期待されるのである．

## 2．演繹的推量を通じての証明観の変容

これまでの数学教育の研究においても，ラカトシュの数学観に基づいて，事柄を証明して終わりではなく，さらにその後に事柄を論駁しながら洗練していく活動の重要性は指摘されてきた．ところが，従来の研究では事柄の洗練がどのように行われるのかが明確でないか，補題組み込み法のみが強調されてきたように思われる．例えば，國本（1998）はラカトシュらの数学観を準経験主義として総括した上で，数学の力動的な発展過程を図式化しており，その図式の中には「論駁（反例）」や「推測の修正」等の要素が見られる[19]．しかし，その推測の修正がどのように行われるのかは具体的に示されていない．また，ラーセンら（Larsen & Zandieh, 2008）は，教室での学習を把握したり学習指導を計画したりするための枠組みを，ラカトシュの『証明と論駁』に基づいて構築している．だが，その枠組みは，モンスター排除法，例外排除法，補題組み込み法の三要素のみから構成されている．

それに対して，本稿では事柄の論駁と洗練の下位側面として，補題組み込み法に加えて新たに演繹的推量を挙げた．この演繹的推量は，事柄を論駁する大局的反例に直面した際に，その反例をも例として含むより一般的な事柄を生み出すことであった．

最初に，この演繹的推量の意味を，学校数学で扱われる題材を例として考えていきたい．図５の事柄「図のような二つの正方形 OABC と OXYZ があるとき，線分 AX と CZ は常に直交する」を事例とする

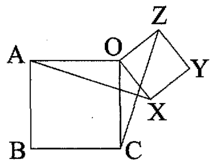


**図5 線分 AX と CZ の直交**

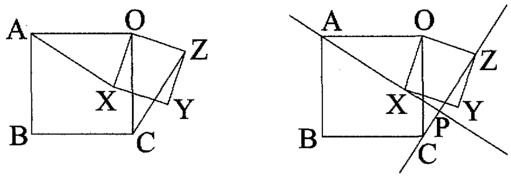


**図6 線分 AX と CZ が交わらない場合**

と，まずこの事柄を証明するためには，線分 AX と CZ の交点を点 P とし，∠APC が直角になることを示せばよい．そこで，最初に二辺挟角相等の合同条件から△OAX ≡△OCZ を，次にその合同に基づいて∠OAX =∠OCZ を導く．続いて，円周角の定理の逆が既知であれば，∠OAP =∠OCP より，四点 O，A，C，P は同一円周上に位置することがわかる[20]．よって，∠AOC は直角であり，円周角の定理より∠AOC =∠APC であることから，∠APC も直角であることが示される．

ところが，その後に正方形 OXYZ を図5とは異なる位置に置くと，線分 AX と CZ が交わらない場合もあることがわかる（図6の左図）．それゆえ，二つの正方形を図6の左図のように配置したものは，前述の事柄を論駁する大局的反例となる．さらに，当初の事柄の「図のような二つの正方形 OABC と OXYZ があるとき」には，線分 AX と CZ が交わるという条件が潜在的に仮定されていることにも気付く．そして，その条件を顕在化させて付加することによって，当初の事柄の成り立つ範囲を制限することが必要になる．

その一方で，線分 AX と CZ が交わらない場合にも交点 P を作り出すために，線分 AX と CZ を延長して直線に変えてみる（図6の右図）．そして，前述の証明を参考にすると，△OAX と△OCZ が合同であることや，四点 O，A，C，P が同一円周上に位置することを，演繹的に導くことができる[21]．つまり，直線 AX と CZ が直交することを導くことができる．したがって，以上の考察を通じて，事柄「図のような二つの正方形 OABC と OXYZ があるとき，直線 AX と CZ は常に直交する」を演繹的に導き出すことが可能になるのである．さらに，この事柄は，当初の事柄に比べて，線分 AX と CZ が交わらない場合にも成り立つという点で，すなわち，当初の事柄の大局的反例をも例として含んでいるという点で，より一般的なものとなっている[22]．

以下では，この演繹的推量に子どもが取り組むことの意義を，証明の学習に焦点を当てて議論したい．上述の例が示すように，子どもは演繹的推量に取り組むことを通じて，事柄を論駁する大局的反例に直面した際に，その反例に屈することなく，その反例の場合にも成り立つより一般的な事柄を作り出す活動を実際に体験することができる．したがって，その体験を振り返ることによって，子どもは証明を，事柄の論駁に耐えながらもより一般的な事柄を追究していく力動的な活動として捉えるようになることが期待される．

子どもの証明観がこのように変容することは，次の二点で重要である．第一は，証明の学習状況を改善することにつながることである．証明の学習状況については，多くの生徒が証明を構成することができない，証明の意義を見出すことができない等，古くから様々な課題が指摘されている．その中でも深刻な課題の一つとして，多くの生徒が証明の学習を自身にとって意味のあるものとしては考えておらず，証明を単なる学校での「儀式」としてしか見ていないことが挙げられる（Healy & Hoyles, 2000）．こうした証明観を抱いている生徒は，証明をいわば他人事として捉えているといえ，証明の構成や証明の意義の理解に積極的な姿勢で臨もうとはしないと思われる．

それに対して，演繹的推量を子どもが経験することは，子どもの証明観が，証明を単なる儀式として受動的に捉える見方から変容していく契機になり得る．より具体的には，子どもが証明を，前述のように，事柄の論駁に耐えながらもより一般的な事柄を追究していく力動的な活動として見るようになると思われる．そして，それによって，子どもは証明を他人事として受け止めるのではなく，より積極的な姿勢で証明の学習に取り組むようになると期待されるのである．

第二は広く人間形成についてである．自身の考えを主張する際，自ら批判的に考えたり他者の批判を真摯に受け止めたりして，自身の主張を制限するこ

とも重要である．しかし，自己や他者の批判に屈することなく，よりよい主張を新たに打ち立ててそれらの批判を乗り越えようとすることの方がより生産的であろう．子どもが証明を前述のような力動的な活動として捉えるようになることは，そうしたたくましい人間を育成することにも結び付くのである．

**3．広義の証明概念に基づいたより早期からの証明学習の実現**

一般に我が国の学校数学では，子どもは中学校第二学年の図形領域で「証明」という言葉に初めて出会う（以下，この意味での証明を形式的証明とする）．この形式的証明は，通常，数学的な記号や言語を用いて表現されるものである．その一方，ラカトシュは証明の意味を広く捉えており，デカルト・オイラー予想について，多面体の表面が薄いゴムで構成されていると想定したり，面の一つを切り出して黒板上に平らに伸ばしたりしているコーシーの証明を取り上げている．そして，ラカトシュはこのような証明を非形式的証明または思考実験と呼び，数学的な事実を確立する際によく行われる方法であると述べている．それゆえ，ラカトシュの証明観を視点とすれば，数学教育においても，証明を形式的証明のみに限定すべきではないということが示唆される．そして，証明の意味をより広義に捉えることができれば，証明の学習を小学校段階から実現することが可能になる．

実際，数学教育の研究領域においても，証明の意味を広く考えようとする動きは従来からあり，その中でも代表的な証明概念の一つとして「操作的証明（action proof)」が挙げられる．この操作的証明の提唱者として一般に知られているのはセマデニ（Semadeni, 1984）である．そして，セマデニが子どもの発達段階に関するピアジェの研究（Piaget, 1953）に依拠していたように，操作的証明は心理学を背景とした概念であると思われてきた．ところが，セマデニ自身が触れているように，操作的証明は彼以前にモーリー（Morley, 1967, 1973）によって提唱されていた．そして，モーリーは子どもの発達に応じて証明に異なる水準を設けることの合理性を，より具体的には小学校段階において操作的証明を正統な証明として認めることの合理性を，ラカトシュの数理哲学に求めていたのである[22)]．したがって，操作的証明の本来的な提唱者の着想に立ち返れば，操作的証明とラカトシュの可謬主義は理論的に整合していることが新たにわかる．

もちろん，本稿での証明学習は，単に与えられた事柄を児童が立証することだけを指しているのではない．むしろ，本稿で規定した数学的探究が示すように，事柄を自ら推測して証明したり，その後にさらに事柄と証明を論駁しながら洗練したりする一連の活動に児童が取り組むことをそれは意味している．そうした活動の実例として，ある小学五年生のペアを対象とした小松の事例研究（Komatsu, 2010; 小松, 2010）が挙げられる．その事例研究では，児童が事柄を自ら推測し，操作的証明を通じてその事柄の成り立つ理由を把握するものの，その後にその事柄を論駁する大局的反例に直面した．だが，彼らは実験者の支援の下，当初の操作的証明を振り返ることによって，その反例の場合にも成り立つより一般的な事柄を生成することができたのである．

第Ⅱ節で触れたように，ラカトシュは数学の創造過程を描写することを目的として可謬主義を提唱した．したがって，数学的探究に子どもが取り組む機会を小学校段階から設けることは，数学の創造過程の一端を反映した算数の学習を実現することにつながる．そして，そのことによって，児童が算数を創造的なものとして捉えるようになることが期待される．さらに，数学的探究の一つの側面として，証明を通じて事柄を洗練する活動が挙げられるが，そうした活動を小学校段階に位置付けることは，中学校数学における形式的証明の学習の素地を形成する契機にもなり得る．具体的には，そうした活動を経験することにより，児童は証明を，事柄を洗練していくための重要な方法として捉えるようになると思われる．そして，子どもが小学校段階から証明に対してそのような豊かな見方を持っていれば，中学校での学習においても同様に，形式的証明を積極的に活用しようとするようになることが期待されるのである．

**Ⅵ．研究のまとめと今後の課題**

本稿では証明に焦点を当てた上で，ラカトシュの可謬主義に基づいて数学的探究の意味を明らかにし，その数学的探究の教育的意義を指摘することを目的とした．それに対して，まずラカトシュの主著

『証明と論駁』の内容を具体的に検討することを通じて，数学的探究の側面として，事柄の推測と証明，証明の論駁と洗練，事柄の論駁と洗練の三つを指摘し，その更なる下位側面についても考察した．そして，それらの側面を合わせる形で，数学的探究の意味を，数学的な対象のもつ性質や関係について調べていく中で事柄を推測し，その事柄を証明し，さらに事柄と証明の不確かさを解消することを目指して，その事柄と証明を論駁しながら洗練していく活動と捉えた．さらに，その数学的探究の教育的意義について，数学的探究を通じての数学観の変容と方法知の学習，演繹的推量を通じての証明観の変容，及び広義の証明概念に基づいたより早期からの証明学習の実現の三点から議論した．

本稿の冒頭で述べたように，従来の研究では数学的探究という用語を無定義で用いることが多く，またその意味も数学の特性を考慮した形では十分に検討されてこなかった．それに対して，本研究の理論的な意義は，数理哲学上の立場であるラカトシュの可謬主義に基づいて，証明の文脈に特化して数学的探究の意味を具体的に示し，さらにその数学的探究の教育的意義を明らかにしたことである．加えて，その教育的意義を議論する際，ラカトシュの発見法的規則の中でも，先行研究では十分に着目されてこなかった演繹的推量に焦点を当てて，その演繹的推量に子どもが取り組むことの意義を指摘した．また，小学校段階における証明の代表概念である操作的証明について，可謬主義との理論的整合性を新たに指摘した上で，小学校段階から証明を学習することの意義を議論した．

一方，本研究の実践的な意義に関わって，近年，算数・数学科に限らず広く学校教育において探究型の教育を充実することが目標とされている．本研究の成果は，算数・数学科において，とりわけ説明や証明に関して，探究型の教育がどうあるべきかを方向付ける指針になり得るものである．

今後の課題は，数学的探究を実現するための条件を明らかにするとともに，その実現のための学習指導を計画し，それを実践して評価，改善していくことである．そして，そのためには，数学的探究に子どもがどのように取り組むのかを詳細に記述して分析することも必要とされる．また，本稿では，証明の意味を広義に捉えた上で，数学的探究を反映した学習を小学校段階から取り入れることの可能性も示唆した．その可能性をよりよく実現するためには，そうした学習を第何学年のどの単元に位置付けるのかを，カリキュラム構成の立場から考察する必要がある．さらに，ラカトシュは科学哲学者でもあり，ラカトシュの数学論と科学論との間には一定の関連が見られる．したがって，そのことを考慮すると，数学的探究が科学教育に寄与する意義を考察することも今後の課題として挙げられる．

## 謝辞

本論文の作成にあたって，貴重なご批評をいただいた信州大学の宮崎樹夫先生，茅野公穂先生，並びに査読者の方々に深謝申し上げます．また，本研究は科学研究費補助金（No. 20330181, 22830035, 23330255）の支援を受けて行われたものである．

## 註

1) 証明に限定せず広く数学教育の研究に目を向ければ，数学的探究に関する先行研究として，ボラシ (Borasi, 1992) による「探究的アプローチ」が挙げられる．彼女はラカトシュの可謬主義 (Lakatos, 1976) やクラインの史的考察（クライン，1980/1984）を受けて，自身の数学観を「ヒューマニスティック」という用語で表している．だが，ボラシ自身が「ヒューマニスティックな探究」の意味を定めることを避け，その用語を比喩として用いることを明言しているように (Borasi, 1992: 3)，ヒューマニスティックな探究がどのような活動を意味するのかは明らかにされていない．

2) 前述の両角（2010）及び岡崎（2010）も，探究的活動の意味を関口（2002）に基づいて捉えている．

3) もちろん関口（2002）は数学的探究の図式の中でも，「推測の生成」と「論じる活動」の二つの要素が循環的に進むことを，意味付けようとしている．しかし，本稿で考察するように，ラカトシュ自身はその循環的なプロセスについて，証明の分析を通じて事柄の範囲をより的確に定める行為や，反例をも例として含むより一般的な事柄を見出す行為を具体的に挙げながらより詳細に検討している．関口も別の論文（例えば，関口，1983）でそれらの行為を取り上げてはいるが，それらの行為のすべてが数学的探究に関わるのか，あるいはその中でもある一部の行為のみが関わるのかは明らかにしていない．

4) ラカトシュの数学観とポリヤの数学観は完全に一致しているわけではなく，そのことはラカトシュの科学論とポパーの科学論についても同様である．それらの異同は大谷（2002）や真野（2010）において詳細に

検討されている．

5）ラカトシュはこのパターンについて，実際の数学史上では第四段階が第三段階に先行することがあることに言及している．すなわち，証明を分析して疑わしい補題を取り出し，その補題を論駁する局所的反例を見出すことは，事柄それ自体を論駁する大局的反例を作り出すことにつながる．

6）ラカトシュはある理論が「準経験的」であるかどうかを，「虚偽性の逆移行」という観点から特徴付けている（Lakatos, 1978: 29）．

7）ラカトシュはポリヤの数学観に関して，数学の創造過程における帰納的推論の役割をポリヤが強調し過ぎていることを批判している（Lakatos, 1976; 大谷, 2002）．だが，それは，事柄を推測する行為それ自体への批判ではなく，「事実から推測へ，そして推測から証明へ」と順序が固定化されていることへの批判である．

8）『証明と論駁』では，この抜本的な解釈の事例として，コーシーの証明とジェルゴンヌに由来する証明とが対比されている．

9）『証明と論駁』では，証明の部分が単数形である「証明と論駁の方法（the method of proof and refutations）」という用語が先に導入され（第Ⅲ節第3項のaを参照），その後にそれが複数形のものが取り上げられている．本稿では，証明に関する側面に先に言及する関係で，証明の部分が複数形のものをまず取り上げた．

10）モンスター排除法は，反例をモンスターと見なして排除するために，当該対象の定義をアドホックに修正することである．例外排除法は，反例を例外として排除することができるよう，例外についての記述を事柄に加えたり事柄の成り立つ範囲を制限したりすることであるが，その際に証明の分析は行われない．モンスター調整法は，当初，事柄を論駁するモンスターとして解釈していたものを，その解釈を修正することによって，事柄を満たす例に転化させることである．

11）ラカトシュによれば，証明分析を通じて隠れた補題を明らかにする方法はザイデルに由来する．ラカトシュは，当初，ザイデルが1847年にこうした証明分析を通じて「一様収束」という概念を発見したと考え，証明分析を通じて作り出された概念を「証明生成概念」と呼んでいた（Lakatos, 1976: 136）．だが，実際にはワイエルシュトラスが既に1841年に一様収束について言及しており（中根，2010），ラカトシュもそのことを後に認めている（Lakatos, 1978: 46）．しかし，ラカトシュが合理的再構成の立場からそのことを承知の上で『証明と論駁』を記述したのか，あるいは修正の機会があればこの点について修正を加えていたのか等は不明である．

12）ラカトシュ（1970/1990，1978/1986）が自身の科学論の中で主張している「洗練された反証主義」や「前進的問題移動」を考慮すると，演繹的推量はラカトシュの科学哲学とも整合している．

13）図4において立体②及び③の $V-E+F$ の値はそれぞれ0と2である．それゆえ，二つの立体を接合して立体④を構成し，その接合によって重なる頂点，辺，面を考慮しなければ，立体④の $V-E+F$ の値は2となる．しかし，実際にはその接合によって立体③の頂点が4つ，辺が2つ，面が2つそれぞれ消えることになるため，立体④の $V-E+F$ の値は$-2$となるのである．その接合によって上面及び下面がそれぞれ一つの面になると考えたとしても，同様に $V-E+F=-2$ となる．

14）ラカトシュはこの展開を述べるに当たって「正規多面体」という概念を導入しているが，本稿ではその概念を省略して述べた．なお，ある面が単連結であるとは，対角線によってその面が二つの部分に分割されることを意味する．また，『証明と論駁』では，この事柄を作り出した後に，さらに環状面や空洞をもつ多面体の場合にも成り立つように事柄を広げていく展開が挙げられ，事柄の内容をどこまで増加することが適切なのかといったことも議論されている．

15）本稿では，ラカトシュが定式化した発見法的規則の中でも，第三規則「局所的反例を得たならば，それがまた大局的反例でないかどうか点検せよ．もしそうなら，容易に規則2を適用することができる．」（Lakatos, 1976: 50）のみ取り上げなかった．その理由は，第三規則は他の発見法的規則に帰着されることができると思われたからである．具体的には，局所的反例を得た場合，その反例が大局的でもあれば第三規則に述べられているように第二規則を適用し，大局的でなければ第四規則を適用すればよいと本研究は捉えている．

16）証明の構成に至るまでの様々な行為が含まれることについても，『証明と論駁』の記述の中に見られる．例えば，コーシーの証明を論駁する第二の局所的反例が生徒から提示された際，教師は当初，ネットワーク上の三角形を連結したままで各三角形を取り除いていくことを想定していたと述べている．そして，教師は証明には表れていないその暗黙の想定を顕在化させる形で証明を修正している．

17）ラカトシュは非形式的数学の成長パターンを定式化している部分でも同様の内容を指摘している（Lakatos, 1976: 127）．

18）管見の限り大谷（2002）と関口（1983）が簡潔に言及しているのみである．

19）デービス・ヘルシュ（1982/1986）も同様の図式を示している．

20）円周角の定理の逆を用いなくてもこの事柄を証明することは可能である．例えば，四角形ABCPの内角の和が360度であることを用いたり，図5の場合に線分

AX と OC の交点を点 Q として，△ OAQ と△ PCQ に着目して考えたりすることが挙げられる．

21）△ OAX ≡△ OCZ を示す際には，若干の修正が必要とされる場合がある．例えば，二つの正方形が重なる場合は，∠ AOX と∠ COZ はいずれも90度と共通部分との差になる．

22）以上の展開は演繹的推量に焦点を当てたものであり，事柄の推測や，証明の論駁と洗練についての記述は省略した．例えば，証明の論駁と洗練に関しては，正方形 OXYZ をより上方に位置すると，挟角の共通部分が∠ COX ではなく∠ AOZ になる場合がある．そのため，そうした場合に対応するために，証明を場合分けして記述しなければならないと考えることも想定される．

23）モーリーがラカトシュの数理哲学に逸早く言及していたことは注目に値する．デカルト・オイラー予想を題材としたラカトシュの研究成果は，まず1963年から64年にかけて『イギリス科学哲学誌（British Journal for the Philosophy of Science）』上で公にされており，モーリーはその学術誌の内容を参照している．だが，モーリーは子どもの発達に応じて証明に異なる水準を設けることの合理性をラカトシュの研究に求めていたのであり，『証明と論駁』の中で描かれている数学的なプロセスそれ自体を実現することは目的としていなかった．もちろん，モーリーは1973年の論文の冒頭において，数学が創造される様子を描写した研究としてもラカトシュの研究に言及しているが，その言及は簡潔なものにとどまっている．

## 引用・参考文献


Borasi, R.: *Learning mathematics through inquiry*, Portsmouth, NH: Heinemann, 1992.

デービス，P. J.・ヘルシュ，R.：数学的経験（柴垣和三雄・清水邦夫・田中裕訳），東京：森北出版，1986.（原著出版1982年）

De Villiers, M.: The role and function of proof in mathematics, *Pythagoras*, 24, 17–24, 1990.

デューイ，J.：論理学：探究の理論（世界の名著48）（魚津郁夫訳），東京：中央公論社，1968.（原著出版1938年）

Hanna, G., & Jahnke, H. N.: Proof and proving, In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, pp.877–908, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

Healy, L., & Hoyles, C.: A study of proof conception in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428, 2000.

クライン，M.：不確実性の数学：数学の世界の夢と現実（上・下）（三村護・入江晴栄訳），東京：紀伊國屋書店，1984.（原著出版1980年）

Koedinger, K. R.: Conjecturing and argumentation in high-school geometry students, In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, pp.319–347, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1998.

国立教育研究所：数学教育の国際比較：第 2 回国際数学教育調査最終報告，東京：第一法規，1991.

Komatsu, K.: Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics, *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), 1–10, 2010.

小松孝太郎：数学的探究における action proof の活用の促進：事例研究を通して，日本数学教育学会誌　数学教育学論究，93, 3–29, 2010.

國本景亀：準経験主義の哲学に基づく証明指導の研究，日本教科教育学会誌，21(2), 35–43, 1998.

Lakatos, I.: *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*, Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

Lakatos, I.: *Mathematics, science and epistemology: Philosophical papers, Volume 2*, Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

ラカトシュ，I.：方法の擁護：科学的研究プログラムの方法論（村上陽一郎・井上弘幸・小林傳司・横山輝雄訳），東京：新曜社，1986.（原著出版1978年）

ラカトシュ，I.：反証と科学的研究プログラムの方法論，I．ラカトシュ・A. マスグレーブ（編），批判と知識の成長（森博監訳）131–278，東京：木鐸社，1990.（原著出版1970年）

Larsen, S., & Zandieh, M.: Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 205–216, 2008.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K.: *Thinking mathematically* (Revised ed.), London: Addison-Wesley, 1985.

宮崎樹夫：学校数学における証明の意義に関する考察：証明の機能に焦点を当てて，筑波大学教育学系論集，18(1), 155–169, 1993.

Morley, A.: Changes in primary school mathematics, *Mathematics Teaching*, 41, 20–24, 1967.

Morley, A.: Mathematics as “process”, *Mathematics Teacher*, 66(1), 39–45, 1973.

両角達男：探究的活動としての証明の学習指導の充実に向けて：学習のリズム感と証明の必要感を重視した単元をつくる，日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録　45–50，宮崎大学，2010.

中根美知代：ε-δ 論法とその形成，東京：共立出版，2010.

Nunokawa, K.: Applying Lakatos' theory to the theory of mathematical problem solving, *Educational Studies in Mathematics*, 31(3), 269–293, 1996.

大谷実：学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成，東京：風間書房，2002.
岡崎正和：探究的活動としての証明を実現するために：形式的証明導入前の活動を充実させる，日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録　39–44，宮崎大学，2010.
Piaget, J.: *Logic and psychology* (W. Mays & F. Whitehead, Trans.), Manchester: Manchester University Press, 1953.
Polya, G.: *Induction and analogy in mathematics: Mathematics and plausible reasoning, Vol.* 1, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954.
Polya, G.: *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.), Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.
ポパー，K. R.：客観的知識：進化論的アプローチ（森博訳），東京：木鐸社，1974.（原著出版1972年）
佐々木俊介：探究のモデルと授業，東京：明治図書，1974.
関口靖広：Imre Lakatos における数学の方法論：発見学への新しいアプローチ，筑波大学大学院教育研究科修士論文，1983.（未公刊）
関口靖広：探究的活動のための証明，日本数学教育学会第35回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録　181–184，鳥取大学，2002.
Semadeni, Z.: Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training, *For the Learning of Mathematics*, 4(1), 32–34, 1984.
真野祐輔：算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究：「数」領域の展開を中心に，博士学位申請論文，広島大学，2010.（未公刊）
杉浦美朗：デューイにおける探究としての学習，東京：風間書房，1984.
Yuxin, Z.: From the logic of mathematical discovery to the methodology of scientific research programmes, *British Journal for the Philosophy of Science*, 41(3), 377–399, 1990.

（受付日2011年４月12日；受理日2011年７月13日）

〔問い合わせ先〕
〒380-8544　長野県長野市大字西長野６のロ
信州大学教育学部理数科学教育講座
小松孝太郎
e-mail: kkomatsu@shinshu-u.ac.jp