研　究　論　文

小　松　孝太郎

数学的探究におけるaction proofの活用の促進*

－事例研究を通して－

小　松　孝太郎**

目　　次

Ⅰ．研究の意図，目的 …… 3
Ⅱ．理論的枠組み …… 4
　1．数学的探究におけるaction proofの活用とその意義 …… 4
　　(1)action proofと数学的探究の概念規定 …… 4
　　(2)数学的探究におけるaction proofの活用 …… 6
　　(3)数学的探究におけるaction proofの活用の意義 …… 7
　2．数学的探究におけるaction proofの活用を促進する方法の理論的考察 …… 8
　　(1)事柄が成り立つ理由の把握 …… 8
　　(2)新たな事柄の生成 …… 8
Ⅲ．調査の計画 …… 9
　1．目的と対象 …… 9
　2．方法 …… 10
　　(1)調査課題と具体物 …… 10
　　(2)事前課題の実施 …… 10
　　(3)観察者の役割 …… 10
　　(4)データの収集と分析 …… 11
Ⅳ．結果 …… 11
　1．調査の概要と事前課題の解決 …… 11
　　(1)調査の概要 …… 11
　　(2)事前課題の解決 …… 11
　2．事柄が成り立つ理由の把握 …… 12
　　(1)事柄の予想 …… 12
　　(2)事柄が成り立つ理由の把握 …… 13
　3．新たな事柄の生成 …… 14
　　(1)反例への直面 …… 14
　　(2)新たな事柄の生成 …… 15
Ⅴ．議論 …… 17
　1．事柄が成り立つ理由の把握の促進 …… 17
　　(1)予想の明確な記述の促進 …… 17
　　(2)事柄が成り立つ理由の把握の促進 …… 18
　2．新たな事柄の生成の促進 …… 19
　　(1)反例に対する望ましい対応の促進 …… 19
　　(2)新たな事柄の生成の促進 …… 20
Ⅵ．研究のまとめと今後の課題 …… 21
謝辞，注，引用・参考文献 …… 22
資料：調査課題 …… 26

キーワード：action proof，数学的探究

Ⅰ．研究の意図，目的

action proofとは，簡単に言えば具体物を用いて行われる証明である[1]．action proofは，証明を数学的な記号や言語で表現される形式的証明[2]だけに限定せずに，子どもの発達に応じて証明に異なる水準を認めることで，証明という数学に特徴的な営みをより早期から実現する意図で提唱された（Morley，1973）．そして，Semadeni（1984）が発達段階に関するPiagetの研究に依拠して，具体的操作期の小学生にも学習可能な証明としてaction proofを理論的に位置づけた．その後，形式的証明の学習の際にもaction proofが効果的に機能しうることが明らかとなってきた（例えば，宮崎，1995；國本，1996；梅川，2002）．

これらの研究は与えられた事柄に対してaction proofを構成することや，action proofを通じて形式的証明の学習を深めることを主要な考察の対象としてきた[3]．しかし，数学の学問的な研究では，事柄を自ら推測したり，事柄を証明した後でも反例への直面を契機としてその事柄や証明を洗練し

*平成21年11月４日受理，平成22年３月16日決定
**筑波大学大学院人間総合科学研究科

たりする数学的探究にも大きな価値が置かれている（Lakatos, 1976; Polya, 1954）．したがって，action proofが小学生にも学習可能な証明であることを考慮すると，action proofの活用の場をこのような数学的探究に求めることは，子どもの発達段階に応じながら，より早期から数学の研究を反映した知的に正直な学習を実現することに結び付くのである．さらに，その学習を通じて，自ら課題を見つけたりよりよく課題を解決したりしようとする態度が育成されるとともに，より豊かな証明観が早くから形成され，そのことが中学校における形式的証明の学習の改善にもつながると期待されるのである．

数学的探究におけるaction proofの活用は，このように数学的，教育的に極めて価値の高い学習であると言える．だが，その分，数学的探究におけるaction proofの活用は，子どもにとって挑戦的（challenging）な取り組みとなるであろう．それゆえ，子どものその取り組みを我々がいかに促進するかが，学習指導上の大きな問題となるのである．そこで，本研究では，数学的探究におけるaction proofの活用を促進する方法を明らかにすることを目的とする．

そのために，本稿では，まず数学的探究におけるaction proofの活用とその意義を明らかにした上で，その活用を促進する方法を理論的に導出する（Ⅱ節）．次に，子どもが数学的探究においてaction proofを活用する活動と，理論的考察から導出した促進の方法に基づいて観察者がその活動を促進することに焦点を当てた事例研究を計画して実施する（Ⅲ，Ⅳ節）．そして，その事例研究から得られた結果に基づいて，理論的に導出した促進の方法を検討することにより，数学的探究におけるaction proofの活用を促進する方法を明らかにする（Ⅴ節）．

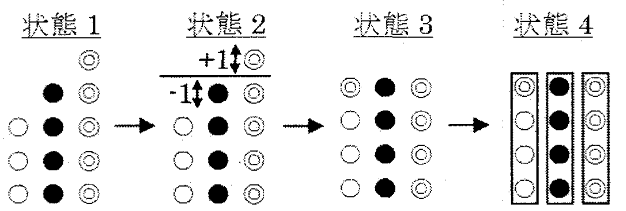
Ⅱ．理論的枠組み

1．数学的探究におけるaction proofの活用とその意義

(1) action proofと数学的探究の概念規定

① 本研究におけるaction proofの概念規定

本研究では，action proofを，「ある個別の場合を代表的特殊の場合として解釈し，その代表的特殊の場合を通じて具体物に対する諸行為の本質的特徴を提示することによって，事柄が成り立つことを演繹的に示すこと」[4]と捉える（小松, 2007a）．例えば，事柄α「連続する3つの自然数の和は真ん中の数の3倍である」に対して，おはじきを用いた図1のaction proofがある．



3＋4＋5は連続する3つの自然数であるから，3は4よりも1だけ小さく，5は4よりも1だけ大きい．そのため，5を表すおはじきの1個を，3を表すおはじきの方へ移せば，4を表すおはじきを3組作ることができる．よって，3＋4＋5は4の3倍になる．他のすべての場合についても，連続する3つの自然数では，真ん中の数のおはじきに比べて，小さな数のおはじきは1つだけ少なく，大きな数のおはじきは1つだけ多いから，大きな数のおはじきの1個を，小さな数のおはじきの方へ移せば，真ん中の数のおはじきを3組作ることができる．よって，この事柄は成り立つ．

図1：事柄αに対するaction proof

action proofについて補足すると，まず具体物[5]を用いる場合，図1の3＋4＋5のようにある個別の場合しか表現することができない．そのため，ある個別の場合における具体物に対する諸行為[6]の中でも，他の場合に共通して適用できるものを認識する必要がある．これは具体物に対する諸行為の内面化に該当し，Piaget（1953）は内面化について，「行為の本質的特徴（original character）を失うことなく思考の中で行われる」（p.8）と述べている．そこで，本研究では，「他の場合に共通して適用できる具体物に対する諸行為」を「具体物に対する諸行為の本質的特徴」と呼ぶこととする．例えば，事柄αのaction proofでは，図1の「連続する3つの自然数では（中略）真ん中の数のおはじきを3組作ることができる」が，具体物に対する諸行為の本質的特徴に該当する．

さらに，証明は事柄の成り立つことを示すことであるから，action proof では具体物に対する諸

行為の本質的特徴を提示する必要もある．しかし，その際にも具体物はある個別の場合しか表現できないという制約がある．したがって，action proofでは，ある個別の場合を，ある一般を代表する個別の場合，すなわち「代表的特殊の場合」(Polya，1954）として解釈する必要がある．そして，その代表的特殊の場合を通じて，具体物に対する諸行為の本質的特徴を提示しなければならないのである．例えば，図1では，連続する3つの自然数の和の代表的特殊の場合として3+4+5を解釈し，その3+4+5を通じて，図1の「連続する3つの自然数では（中略）真ん中の数のおはじきを3組作ることができる」が示されている．

また，演繹法とは一般に，「前提された命題から論理上の規則だけに従って結論を導き出す方法」（青本ら，2005）であるが，action proofの場合，本研究ではより広義に「演繹的」と捉える．具体的には，具体物に関して一般に成り立つ事柄も前提に含め，その前提や論理上の規則が顕在化された推論でなくてもそれをaction proofとして認める．例えば，図1のaction proofを厳密に考えれば，その前提には，具体物に対する諸行為を行ってもおはじきの総数は変わらないことがある．そして，その具体物に対する諸行為を実際に行うことにより，連続する3つの自然数の和を，真ん中の数を表すおはじき3組によって表現できることまで導いている．だが，実際の場面では，図1の「連続する3つの自然数では（中略）真ん中の数のおはじきを3組作ることができる」程度しか明示されないと思われる．

最後に，本研究がaction proofを捉える立場を明確にしておく．本研究では，action proofは人間とは独立して客観的に存在し，その客観的に存在するものを人間が発見するという立場には立たない．なぜなら，具体物に対する諸行為の本質的特徴を認識したり，ある個別の場合を代表的特殊の場合として解釈したりするなど，action proofは単なる物理的な現象を超越して，主体の認識や解釈に大きく依存した営みであるからである．したがって，本研究では，action proofは主体によって構成されるものであると捉える．

② 探究的アプローチから見た数学的探究の意味

本研究では，action proofを活用する場の一つとして数学的探究を捉えている．そのため，数学的探究の概念を一般的に規定するのではなく，証明の文脈に限定して捉えることにする．そして，学校数学における数学的探究のあり方を理論的に考察している研究の中でも，Borasi（1992，1994，1996）の「探究的アプローチ」[7]に本研究は着目する．その理由は次の通りである．Borasiは当時のNCTMやNRC[8]の勧告に賛同し，米国の数学教育の改善を意図してこのアプローチを提案した．さらに，彼女はその探究的アプローチの観点から，定義の構成を題材に，高校生のペアを対象として自ら教授実験を行った．この探究的アプローチは特定の数学的な内容や方法に依存しないものではあるが，教授実験で扱われた定義の構成を意識して理論的に考察されたものであると思われる．そして，この定義の構成は本研究の対象である証明と密接な関係がある[9]．よって，本研究では，証明と関わりが深いBorasiの探究的アプローチを参考に，数学的探究の概念を規定する．

Borasiの探究的アプローチには次の二つの特徴がある．第一に，彼女の探究的アプローチは，数理哲学の一つの立場である可謬主義に基づいている．この可謬主義は，Lakatos（1976）の「非形式的で準経験的な数学は（中略），思索と批判によって，また，証明と論駁の論理によって，推測を絶え間なく改良することを通じて成長する」（p.5）という言葉で最もよく表現されるものである．Borasiはさらに Peirceの探究やDeweyの反省的思考に関する研究にも触れ，数学の不確かさには，それによって継続的な探究を促進する疑念が引き起こされるため，積極的な意味があるとしている．このように，数学は不確かさや疑念を契機として，証明と論駁を繰り返して推測を洗練しながら成長していくと彼女は考えているのである．

第二に，Borasiの探究的アプローチは構成主義の認識論に依拠している．ここで，彼女自身は「探究的アプローチは急進的構成主義の認識論を前提とする」（Borasi，1994，p. 168）と述べている．この急進的構成主義は，認識主体による能動的な知識の構成を前提とし，客観的知識の存在を否定し

ようとする立場である（von Glasersfeld, 1990）．しかし，知識の客観性を否定する急進的構成主義は，その後厳しい批判を受け，構成主義の中でも社会的構成主義など，知識の社会的構成をより強調した立場も提唱されてきた（中原，1994）．そして，Borasi自身も「学習に関する構成主義的な見方が教授学的に重要であることは，数学的知識は社会的に構成されるという点も認めない限り，完全には評価されない」（Borasi, 1992, p. 175）と主張している．したがって，Borasiの探究的アプローチは，急進的構成主義よりも，むしろ広義の構成主義の立場に近いと言える．

以下では，この探究的アプローチを参考にしながら，本研究の対象であり，数学に特徴的な方法である証明の観点から，数学的探究の概念を規定する．まず構成主義における主体の能動性を前提とすると，他者から事柄が与えられるのではなく，自ら事柄を予想して証明することが求められる．さらに，可謬主義的な数学観から考えれば，証明を構成したら終わりではなく，不確かさや疑念の解消を目指し，さらにその事柄や証明を洗練し続けることが必要になる．加えて，構成主義に基づけば，主体はこれらの営みに他者と相互作用しながら能動的に取り組むことが求められる．そして，本来的には能動性（activity）を前提とした主体の働きを意味する言葉として「活動（activity）」がある．以上より，本研究では，数学的探究を，主体が他者と相互作用しながら，不確かさや疑念の解消を目指して，事柄を予想して証明し，さらにその事柄や証明を洗練し続ける活動と捉える．

(2) 数学的探究におけるaction proofの活用

「活用」という言葉を字義通りに捉えれば，それは「物の性質・働きが十分に発揮できるように使うこと」（松村，2006，p. 493）を意味する．そのため，数学的探究におけるaction proofの活用という場合，活用される側の機能，つまりaction proofの機能を活かす必要がある．そこで，以下では，数学的探究におけるaction proofの活用の意味を，証明の機能とaction proofの特質に基づいて考察する．

数学的探究では，証明がもつ機能に関する研究（例えば，de Villiers，1990；宮崎，1993；Hanna & Jahnke，1996）において，「説明」と「発見」の機能として議論されているものが重要になる．この説明の機能とは，人が証明を通じて，なぜ事柄が成り立つのか，すなわち事柄が成り立つ理由を把握できることである．その一方，発見の機能とは，人が証明を振り返って新たな事柄を生成できることを意味している（de Villiers，1990）[10]．

数学的探究においては，予想した事柄を証明するだけでなく，その事柄や証明をさらに洗練することも求められる．そのためには，既有の事柄に対する証明を通じて新たな事柄を生成できるという，証明の発見の機能が重要になる．そして，そのように新たな事柄を生成するには，証明によって既有の事柄が成り立つことを示すだけでなく，その事柄が成り立つ理由も把握することが必要になる．なぜなら，その理由を把握することは，事柄が成り立つことに必要な条件を特定することにつながり，逆に不必要な条件を除くことによって，より一般的な事柄を生成することが可能になるからである（杉山，1986；de Villiers, 1990）．

さらに，action proofの特質として，具体物を用いることやその具体物を動的に変形させることが挙げられる．そして，Piaget（1953）によれば，具体的操作期（7歳から11歳まで）の子どもは，具体的な事象についてであれば演繹的に推論することができる．また，ブルーナーら（1966/1968）は，子どもの表象作用が動作的，映像的，記号的表象の順に発達することを明らかにしている．とりわけaction proofでは，事柄の条件を具体物の配列として視覚的に表現し，事柄が成り立つことも具体物の動的な変形によって示す．したがって，action proofを行う主体が子どもであることを考慮すると，子どもはaction proofによって事柄の成り立つ理由を把握しやすくなり，そのことが新たな事柄の生成にも結び付くと思われる．

加えて，action proofでは個人の思考が具体物の動的な変形として顕在化される．そのため，他者との相互作用が活発になり，事柄が成り立つ理由の把握や新たな事柄の生成に協同で取り組むことが容易になると思われる．特に，action proofを行った主体とは別の観点から他者が具体物の配列を解釈し，その結果として，両者の当初の想定

を超えた新たな事柄が創発されることも期待される（江森，2006）．

ここで，action proofを振り返って生成した事柄が新しいかどうかを判断するのは，もちろんその行為の主体である．また，action proofを振り返って新たな事柄を生成しようとする際，その新たな事柄やそれが成り立つ理由を，具体物という単なる物理的世界のみで考察することが難しい場合もある．特に，事柄αのaction proofの振り返りに関して後で述べるように，より一般的な事柄を生成しようとすれば，具体物だけではその事柄を表現することが困難な場合も想定される．その場合，物理的な世界を超越して，内的表象の中で具体物や具体物に対する諸行為を解釈することで，それらの一般性を見出すことが必要になる．

以上より，本研究では，数学的探究におけるaction proofの活用の意味を，主体が他者と相互作用しながら，action proofを通じて事柄が成り立つ理由を把握することと，action proofを振り返って新たな事柄を生成することとして捉える．

(3) 数学的探究におけるaction proofの活用の意義

① 数学の学問的な研究を反映した学習の実現

Stylianides（2007）は学校数学における証明を特徴づけるために，二つの規範的原理を据えている．その第一は「知的正直さの原理」であり，学校数学における証明が数学の学問的な研究を反映したものであると同時に，数学の学習者である子どもを尊重していることを求めるものである．彼がこの原理を所産としての証明（proof）の特徴づけを超えて幅広く適用しようとしているように，数学的探究におけるaction proofの活用も含めて，すべての数学学習についてこの原理は重要である．

本研究では，Lakatos（1976）に代表される可謬主義的な数学観に基づいて，数学的探究の意味を捉えた．したがって，その数学的探究は，数学の学問的な研究の中でも，非形式的で準経験的な数学が成長していく過程を反映したものであると言うことができる．

さらに，事柄が成り立つ理由の把握と新たな事柄の生成，すなわち証明がもつ説明と発見の機能に限定して考えれば，これらの機能は，元来，数学の研究に基づいて指摘されたものである（de Villiers，1990）．特に，証明がもつ説明の機能は，数理哲学の分野で大きな価値が置かれており，数学の研究において説明とは何かや，過去の数学者がどのように説明に取り組んできたのか等が議論されている（小松，2007b）．また，新たな事柄の生成に関しても，Lakatos（1976）が仮想の生徒に「‘証明問題’の真の目的は，元々の‘素朴な’推測を改良して—実際完全にし—本物の‘定理’にすることであるべきである」（p.41，強調は原文）と語らせている通り，数学の学問的な研究における証明の目的には，推測の真偽を示すことだけでなく，その推測を修正したり洗練したりすることも含まれる．

その一方で，前述のように，Piaget（1953）の研究に依拠すれば，具体的操作期の小学生であっても，action proofを活用して事柄が成り立つ理由を把握したり新たな事柄を生成したりすることは可能である．したがって，数学的探究におけるaction proofの活用は，子どもの発達に応じながら，数学の学問的な研究を反映した学習をより早期から実現することにつながるものである．

② 形式的証明の学習の素地の形成

Stylianides（2007）が挙げた第二の原理は「連続性の原理」であり，子どもが証明に関して一貫した経験が持てるよう，小中学校など学年段階が異なっても，証明の特徴づけに一貫性があることを要請するものである．このような一貫性があれば，小学校における証明の学習が，中学校から始まる形式的証明の学習の素地になると思われる．

形式的証明の学習に関しては旧来から様々な問題が指摘されているが，その一つとして，証明を単なる「儀式」としてしか見ていない学習者が多く存在することが挙げられる（Harel & Sowder，1998；Healy & Hoyles，2000）．筆者はそのような現状に対して，数学的探究の場に形式的証明の学習を位置づけることで，より多くの子どもが数学的探究を進めるための有効な方法として形式的証明を捉えるようになると期待している．

さらに，事柄が成り立つ理由の把握は，それによって数学的理解が深まるため，形式的証明の学

習において基本的な機能である（Hanna，1995）．また，形式的証明を通じて新たな事柄を生成する学習を経験すれば，生徒は形式的証明を学習の終点ではなく，生産的，創造的な活動の起点として捉えるようになるであろう（宮崎，2002）．

それに対し，子どもが小学校段階から数学的探究においてaction proofを活用する学習を経験していれば，より早期から，事柄が成り立つ理由を把握したり，新たな事柄を生成したりするための有効な方法として証明を捉えるようになると期待される．そして，小学校段階からそのような豊かな証明観を持っていれば，形式的証明について学習する際も，同様に形式的証明を数学的探究において積極的に活用しようとするようになるであろう．ゆえに，数学的探究におけるaction proofの活用は，中学校段階から始まる形式的証明の学習の素地を形成することにも結び付くのである．

2．数学的探究におけるaction proofの活用を促進する方法の理論的考察

action proofを活用して事柄が成り立つ理由を把握したり新たな事柄を生成したりすることは，子どもにとっては容易ではないと推測される．そこで，本項では，action proofの説明と発見の機能を活かすために必要とされる行為を検討することにより，数学的探究におけるaction proofの活用を促進する方法を理論的に導出する．

(1) 事柄が成り立つ理由の把握

action proofでは，具体物に対する諸行為の本質的特徴を提示することで，事柄が成り立つことを示す．この具体物に対する諸行為の本質的特徴は，前述の通り，他の場合にも共通して適用できる具体物に対する諸行為である．ゆえに，action proofを通じて事柄が成り立つ理由を把握するためには，具体物に対する諸行為が他の場合にも共通に適用できる理由を見出さなければならない．

例えば，図１のaction proofであれば，大きな数のおはじきを小さな数のおはじきに１つ移動し，その移動によって真ん中の数のおはじきを３組作ることで，事柄αが成り立つことを示す．そして，さらに事柄αが成り立つ理由を把握するためには，そのようなおはじきの移動が常に可能な理由として，「連続する３つの自然数では，常に真ん中の数のおはじきに比べて小さな数のおはじきは１つだけ少なく，大きな数のおはじきは１つだけ多い」ということを捉える必要があるのである．

したがって，action proofを通じて事柄が成り立つ理由を把握することに関しては，具体物に対する諸行為が他の場合にも共通に適用できる理由に着目するように子どもを促すことが重要になる．

(2) 新たな事柄の生成

はじめに，事柄を証明したらそれで満足せずに，さらに新たな事柄を能動的に追究することを促すためには，その追究の動機となるものが必要になる．ここで，前述のBorasiはPeirceの探究やDeweyの反省的思考に関する研究に基づいて，不確かさや疑念によって継続的な探究が促進されるとしている．それゆえ，新たな事柄の生成を促進するためには，予想した事柄が証明された後に，不確かさや疑念を生み出すことが有効になる．

さらに，action proofでは，具体物に対する諸行為を，事柄が成り立つことを示す目的に合うように行う．そのため，action proofを通じて既有の事柄とは別の事柄を生成するには，action proofを振り返って，既有の事柄には制限されない新たな観点から，具体物に対するそれまでの見方を変更する必要がある．そして，その見方の変更に基づいて，具体物に対する諸行為を新たに生成しなければならない．だが，そのままでは，あくまでも具体物の世界で個別の場合に成り立つことを見出したに過ぎない．よって，新たに生成した具体物に対する諸行為の意味を解釈するとともに，新たな事柄が成立する条件を見出す必要がある．

例えば，図１の状態２では，３つの自然数の連続性に基づき，「真ん中の数のおはじきに比べて，小さな数のおはじきは１つだけ少なく，大きな数のおはじきは１つだけ多い」と見ている．ここで，その状態２を「小さな数と大きな数のおはじきは，真ん中の数のおはじきから等しい分だけ異なっている」と見直し，「おはじきの数が２つずつ異なっても，同様に真ん中の数のおはじきを３組作成できるのではないか」と考えれば，新たに図２のような具体物に対する諸行為を生成できる．そして，真ん中の数のおはじきが３組できることの意

味を「真ん中の数の3倍である」と解釈し，おはじきの数が2つずつ異なるのは3つの自然数の階差が2の場合であることを見出せば，新たな事柄「階差が2である3つの自然数の和は真ん中の数の3倍になる」を生成することが可能になる．さらに考察を進めれば，より一般的な事柄β「階差がkの3つの自然数の和は真ん中の数の3倍になる」を生成することもできる．その際，もちろん「階差がkの3つの自然数」をおはじきで物理的に表現することはできない．そのため，例えば図2の状態2を，「階差がkの3つの自然数」を表すものとして解釈し，その解釈に基づいて図2の一連の行為を捉え直すことで，事柄βの成り立つ理由が示されたと考える必要がある．

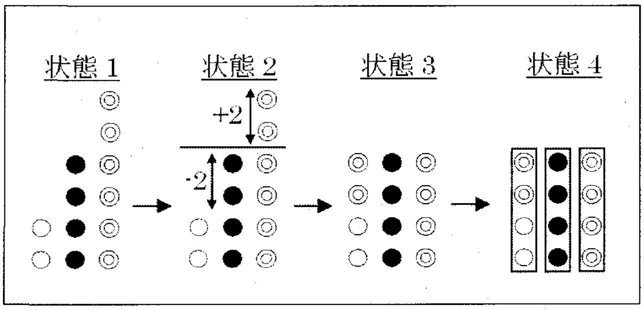


図2：新たな具体物に対する諸行為

以上より，まず新たな事柄の生成を促進するには，予想した事柄が証明された後に，不確かさや疑念を生み出すことが有効である．さらに，action proofを振り返って新たな事柄を生成することに関しては，子どもに次の二つを行うよう促すことが重要になる．第一は，具体物に対するそれまでの見方を変更し，その変更に伴って具体物に対する諸行為を新たに生成することである．第二は，新たに生成した具体物に対する諸行為の意味を解釈するとともに，新たな事柄が成立する条件を見出すことである．

Ⅲ．調査の計画

1．目的と対象

Ⅱ節では，数学的探究におけるaction proofの活用を促進する方法を理論的考察から導出した．そこで，本研究では，その理論的考察から導出した促進の方法に基づいて，観察者（筆者）が実際に数学的探究におけるaction proofの活用の促進を試み，その促進の効果を明らかにすることを目的として調査を実施することにした．

この目的を達成するためには，子どもが数学的探究においてaction proofを活用する活動と，その活動の促進を意図した観察者の関与の影響を，詳細に記述し分析する必要がある．そこで，本研究では通常授業の観察ではなく，小学五年生のペアを対象とした事例研究を行うことを選択した．

二人一組のペアを対象とした理由は，その方が「会話の形態で自然に発話が行われ（中略），相手に説明する必要から，考えの根拠や理由までも言語化される傾向があり，その意味で解決過程に関する豊かなデータを与える」(清水，1990，p.192)と考えたからである．さらに，子どもには調査用紙や具体物の他に，ボールペンを一本のみ渡すことにし，具体物を用いた考察も二人で別々の場合に対して行うのではなく，一つの場合を協同で考えるように求めた[11)]．なぜなら，そのような環境を設定することで，一方が他方に自分の考えを話さざるを得なくなるため，二人の間の相互作用が活発になるとともに，子どもの思考をより顕在化させることができると考えたからである[12)]．

また，小学五年生を調査対象とした理由は，予想した事柄を記述したり，その事柄が成り立つ理由を述べたりするためには，一定の能力が必要になると思われたからである．それに加えて，Ⅱ節で述べたように中学校数学における形式的証明の学習との接続も意識して，小学校高学年の子どもを対象とすることにした．

実際の調査は，茨城県つくば市の郊外に位置する公立小学校に通う男子XとYのペアを対象として行われた．彼らを選択した理由は，二人はお互いに仲が良く，共に自分の考えを積極的に話す子どもであったからである．彼らは調査時には別々のクラスに所属していたが，それ以前は同じクラスに所属したこともあり，調査時点でも共に遊ぶ機会が多いとのことであった．算数の成績に関しては，XとYは自身の所属する小学校においてそれぞれ上位と中位に位置していた．調査実施時期は2009年3月下旬であり，二人とも小学五年生の内容はすべて学習済みであった．

2．方法

(1) 調査課題と具体物

調査では，「二桁の整数[13]とその位の数を入れかえた数との和」(例えば32＋23＝55，以下では単に「二数の和」と呼ぶ）の性質を予想することから始まる課題を用いた(「資料：調査課題」の「本課題」を参照)．この題材は中学校第二学年の「数と式」領域で扱われることが多く，その場合，二数の和が11の倍数になることを，文字式を用いて証明することが典型となっている．だが，子どもが自ら二数の和の性質を予想したとき，その和が11の倍数になるという予想は最初の段階では生まれにくいであろう．「二数の和が二桁の場合，その和はぞろ目になる」など，より限定的な事柄を多くの子どもは予想すると思われる[14]．「二数の和は11の倍数になる」といった事柄は，むしろそのような予想を洗練しながら生み出すべきものである[15]．さらに，二数の和に成り立つ事柄を証明した後に，「二桁の整数とその位の数を入れかえた数との差」を扱うことも考えられる．また，「三桁の整数とその位の数を入れかえた数との和」のように，位の数を増やした場合を追究してより一般的な事柄を見出すことも可能である[16]．

だが，調査時間の制約や子どもの発達段階等を考慮すると，上述の全てを扱うことは現実的でないように思われる．そこで，本研究では，子どもが「二数の和が二桁の場合，その和はぞろ目になる」といった事柄を予想し，action proofによってその事柄が成り立つ理由を把握した後に，そのaction proofを振り返って二数の和すべてに成り立つ事柄を生成することを期待した．そのため，調査課題では，二数の和の性質を予想する段階においては，あえて意図的に，その和が二桁になる場合のみを例示した．ただし，調査実施時期の学習指導要領（文部省，1999）では，倍数という用語自体は第六学年で扱われることになっており，調査対象のXとYもその用語は未習であった．

調査課題の二桁の整数は十進位取り記数法で表現されるものである．そのため，十進位取り記数法の構造と合致した具体物を利用することを子どもが希望すると予想された．そこで，具体物として百円玉，十円玉，一円玉の硬貨を用意した．さらに，硬貨と異なり数学的構造が明示的でない具体物であっても，どの具体物が十の位や一の位の数を表すのかを，具体物の位置や色によって子どもが判断することも予想された．そのような意図から黄緑赤の三色のおはじきも用意した．調査では両方の具体物を机上に置き，どの具体物を用いるのかを子どもが選択できるようにした[17]．

(2) 事前課題の実施

事柄を予想し，具体物を用いてその事柄が成り立つ理由を考察することは，高学年の通常授業ではあまり行われていないと思われる．調査対象のペアも，授業で算数セットのような具体物を用いたのは第三学年までであったと述べていた．

そこで，事柄を予想して具体物を用いてその事柄が成り立つ理由を考察することに子どもが慣れるための準備として，二数の和に関する課題の直前に事前課題を実施した．具体的には，「奇数と奇数の和」の性質を予想して，おはじきを用いてその性質が成り立つ理由を考察する課題を与えた(「資料：調査課題」の「事前課題」を参照)．その際，奇数と偶数それ自体をおはじきで表現する方法を意図的に取り上げることはしなかった．

そして，子どもが事前課題を解決した後，観察者が事前課題や本課題の趣旨として，「きまりを推測すること」や「その推測したきまりがいつでも成り立つ理由を，具体物を使って考察すること」に取り組んでもらうことを子どもに伝えた．また，奇数や偶数の概念それ自体はあまり使わないため，それらの概念には固執しないように求めた．

(3) 観察者の役割

観察者の役割は，第一に子どもの取り組みの様子を観察することである．Ⅱ節で述べたように，action proofは主体の認識や解釈に大きく依存した営みである．それゆえ，例えば子どもがある個別の場合をどの集合の範囲を代表する場合として解釈しているかは，観察者には直接的には捉えることができない．そのため，観察者は，子どもの解釈がどの集合の範囲を想定したものであるかを，子どもが具体物に対する諸行為を他の場合にも同様に行っているかや，具体物に対する諸行為の本質的特徴を一般的な言葉で述べているかなどを基準に，推測によって判断することが求められる．

観察者の第二の役割は，Ⅱ節で導出した促進の方法に基づいて子どもの取り組みを促すことである．しかし，数学的探究は主体の能動性を前提としたものであるから，観察者の介入は極力避けられなければならない．そこで，特に事柄が成り立つ理由の把握については，次のように調査課題を設定することによって，観察者の直接的な介入がない形で子どもの取り組みを促進することを計画した．それは，調査課題の問(3)において，「いつでも」と「わけ」を強調したことである（「資料：調査課題」の「本課題」を参照）．この強調によって，具体物に対する諸行為が他の場合に共通に適用できる理由に着目するよう促すことを意図した．

そして，事柄が成り立つ理由の把握の後に，観察者は新たな事柄の生成の動機付けとして，次のように介入することを計画した．それは，「二数の和はぞろ目になる」のように，子どもの予想がある制限された範囲でしか成り立たないものであった場合，「85＋58はどうですか」等とその予想に対する反例を提示することである．なぜなら，その反例への直面により不確かさや疑念が生じ，二数の和すべてに成り立つ事柄を新たに追究しようとする動機が生まれると考えたからである．

さらに，action proofを振り返って新たな事柄を生成することに関しては，子どもの経験は少なく，子どもが独力でそれに取り組むことは難しいと予想された．そこで，新たな事柄の生成については，事柄が成り立つ理由の把握の場合とは対照的に，Ⅱ節で導出した二つの促進の方法に基づいて観察者が具体的な介入を行うことを計画した．

(4)　データの収集と分析

データの収集の際は，子どもの取り組みの様子をDVDカメラとICレコーダーで記録した．そして，得られた音声記録からトランスクリプトを作成するとともに，映像記録を参照して，具体物を動かしている様子など，子どもの表出行動をトランスクリプトの該当する箇所に記述した．そして，その映像記録を再び参照しながらトランスクリプトの分析を行った．加えて，子どもが調査用紙に記述した内容も分析の対象とされた．

Ⅳ．結果

1．調査の概要と事前課題の解決

(1)　調査の概要

調査の所要時間は表1の通りである．事前課題では，XとYは「奇数＋奇数＝偶数」を含む二つの事柄を予想した．そして，彼らは「奇数＋奇数＝偶数」が成り立つ理由を，おはじきを用いながら，「偶数と偶数の和は偶数である」に帰着して把握した．

本課題では，XとYはまず二数の和に関する予想を不明確な形で記述した．そして，彼らはおはじきを用いてその予想が成り立つ理由を把握した後に，その予想を「2けたの整数と，十の位と一の位を入れかえた整数の和は，ぞろめになる」と明確に記述し直した．次に，観察者が「85たす58でも同じ操作ができますか」と質問すると，その場合には上述の予想が成り立たなくなることを二人は認識した．そして，彼らは観察者とのやりとりの中で当初の予想に対するaction proofを振り返り，二数の和すべてに成り立つ事柄を新たに生成した．

表1：調査の所要時間（分’秒）

事前課題	本課題	前後の補説[18]	合計
21’00	48’32	05’48	75’20

(2)　事前課題の解決

XとYは奇数と奇数の和について，奇数を小さな方から順番に取り上げることを選択し，1＋3＝4，3＋5＝8，5＋7＝12，7＋9＝16と計算した．その後，彼らは奇数と奇数の和の性質について次の二つを予想した（図3）．第一は「奇数＋奇数＝偶数」であり，第二は「二つの奇数を小さな方から順に選ぶと，それらの和は4ずつ異なる（1＋3＝4，3＋5＝8，5＋7＝12など）」である．

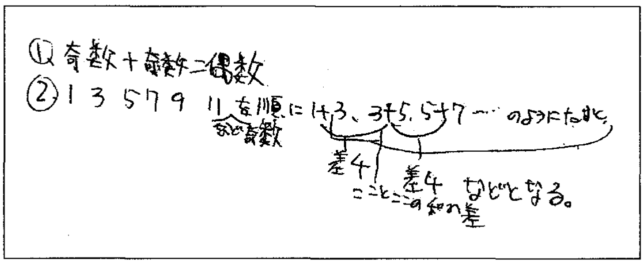


図3：奇数と奇数の和の性質に関する予想

その後，XはYに後者の予想が成り立つ理由を考えるよう指示し，自身は前者の予想が成り立つ理由を考察することにした．Xはその「奇数＋奇数＝偶数」が成り立つ理由を考える際，まず1，3，5，7，9を表すおはじきを順に並べて三角形の形を作った．そして，彼はそれが成り立つ理由を，一方の奇数からおはじき1つを他方の奇数へ移して，「偶数と偶数の和は偶数になる」に帰着して把握し[19]，YはXのその考えに納得した．

それからは，XとYは共に前者の予想が成り立つ理由をさらに考察した．まず，観察者が「偶数たすと偶数になる[20]ってのはいつでも成り立ちますか」と尋ねると，Xはおはじきを図4のように動かして次のように答えた[21]．

［おはじきを図4の状態1の形に並べる］こうなってるときに，偶数はどれだけたしても［状態2］／（中略）こう偶数があって［状態3］，これがまぁちょっと細長い長方形だと考えてみると，この長方形をまた半分に切って［状態4］こうやると［状態5］，両方同じ数になるから

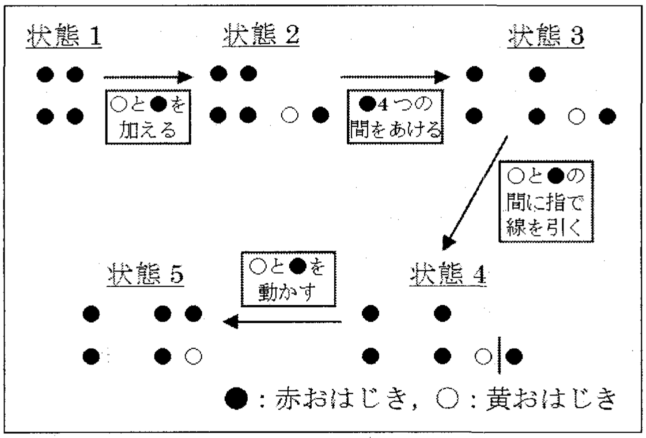


図4：事前課題における具体物の変形の過程

このように，Xは「偶数と偶数の和は偶数になる」が成り立つ理由を考察する際，まずその和を増加で考えている．そして，彼は「こう偶数があって」と述べながら，被加数のおはじきの間を広げて長方形の形を作っている（状態3）．このことから，彼はその長方形の形に，ある特定の偶数ではなく，偶数一般を見ていたと思われる．なぜなら，あくまでも個別の数4を表すものとしてしか見ないのであれば，偶数という一般的な言葉を用いたり，状態3のようにおはじきの間を広げて長方形の形を作ったりする必要はないからである．Xがこのように偶数一般を表現するために長方形の形を作った理由は，「いつでも」という観察者の問いに答えるためであろう．彼のこのような具体物の用い方は，後述の本課題において二桁の整数を二色のおはじきで表現する際にも見られた．

他方，そのような工夫は加数の方には見られない．そのため，一見すると，Xは「偶数に2をたすとその和は偶数になる」が成り立つ理由を把握したに過ぎないと思われる．だが，ここでも彼は「偶数はどれだけたしても」や「この長方形をまた半分に切って」と述べており，個別の数である2には言及せずに，偶数や長方形といった一般的な言葉を用いている．したがって，被加数の場合と同様の理由から，彼は2枚のおはじきで偶数一般を表そうとしていた可能性もある．それゆえ，加数のおはじき2枚をXがどのように見ていたのかに関しては断定的な推測ができない．

その後，観察者が別の方法を述べるために，「奇数の場合，おはじきでペアを作ると余りが1つできる」といった発言をすると，XとYはその方法に気づき，観察者の発言に続いて「その余り同士で新たにペアを作ればよい」という趣旨の発言をした．そして，彼らはその方法が他の場合にも適用できると述べた．

最後に，第二の予想「二つの奇数を小さな方から順に選ぶと，それらの和は4ずつ異なる」に関しては，観察者は調査時間の関係から検討の対象とせずに事前課題を終了することにした．

2．事柄が成り立つ理由の把握

(1)　事柄の予想

本課題において，XとYはまず二数の和に関して52＋25＝77，26＋62＝88，31＋13＝44と計算した．そして，彼らは「すごいぞ，これ」(018Y)と「えー，何で？」(019X)と発言したように，その計算結果に対して大きく驚いた[22]．そして，二数の和に関していつでも成り立つ事柄を，Xは図5のように予想して記述した．さらに，Xはこの予想が他の場合にも成り立つかどうかを試すために，12と21を取り上げ，その和が33になることを確認した[23]．

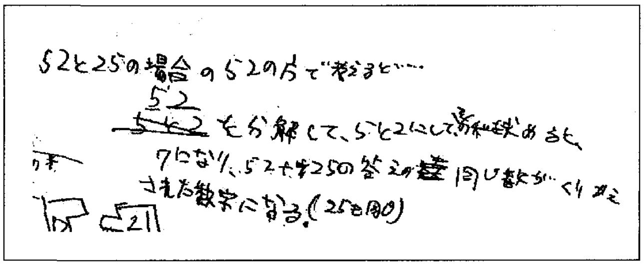


図５：二数の和に関する最初の予想[24)]

ここで，Xが記述したこの予想は，52＋25という個別の場合に限定されている．しかし，彼はある一般的な事柄を予想し，52＋25の場合を例としてその事柄を記述したと思われる．なぜなら，XとYは52＋25の他にも複数の場合を考察しており，さらに，他の場合にも成り立つかどうかを確かめるために21＋12を取り上げたからである．

さらに，図５の予想を一般化して記述すれば，それは「最初の整数（または位を入れかえた数）の各位の数を加えると，二数の和の同じ数が繰り返された数字になる」(以下，丸括弧内は省略）となる．この予想には，二数の和では同じ数字が繰り返されること，すなわち，「二数の和はぞろ目になる」が暗示的に含まれている．そして，そのぞろ目となっている数字が最初の整数のどの部分に起因しているのかを，この予想は表しているのである．したがって，Xが記述した図５の予想には，「二数の和はぞろ目になる」と「二数の和においてぞろ目で揃った数字は，最初の整数の各位の和である」という二つの内容が含まれていると考えることができる．

(2) 事柄が成り立つ理由の把握

XとYは問(3)に進み，まず具体物としておはじきと硬貨のどちらを選択するか検討した．Yは硬貨の枚数の方が多いことから，硬貨を用いることを主張した．Xはそれに対しておはじきを選択することを主張し，おはじきの数が可能な限り最小になるよう，12＋21について考察することを提案した．その結果，彼らはおはじきを用いて12＋21について考察を進めることを選択した．

それから，XとYはまず12枚と21枚のおはじきを並べた．そして，彼らは12枚と21枚のおはじきをそれぞれ10枚２枚と20枚１枚に分けて並べ，それらのおはじきを合わせて11枚のおはじきを３列作った．しかし，彼らはうまく考察を進めることができず，おはじきの配列を崩して最初から考察し直すことにした．

その後，XとYは考察すべき内容が「いつでも」であることを再確認すると，再びYはおはじきの枚数が不足することを主張した．それに対し，Xは，緑おはじきと赤おはじきを，それぞれ10と１を表すものとして考えることを主張した．そして，彼らは二数の和として71＋17を選択し，それを図６の状態１のように表した．しかし，おはじきを並べている間，Yが誤って71の緑おはじき７枚に緑おはじきを２枚加えたため，71の緑おはじきは９枚になっていた．

それから，Xはまず71の赤おはじきと17の緑おはじきが各１枚で等しいことに気づき，71の緑おはじきを17の赤おはじき７枚の右側に移動しようとした．彼らはその過程で71の緑おはじきが２枚余分であったことに気づき，その２枚を片づけ，残りの緑おはじき７枚を17の赤おはじき７枚の右側に並べた（図６の状態２）．次に，Xは17の緑おはじき１枚を71の赤おはじき１枚の近くに寄せ（状態３），それらを赤おはじきと緑おはじきの各７枚の並びの上方へ移した（状態４）．そして，彼は緑おはじきと赤おはじきの各８枚の並びを順番に指差しながら，その配列が88を表していることを確認した．

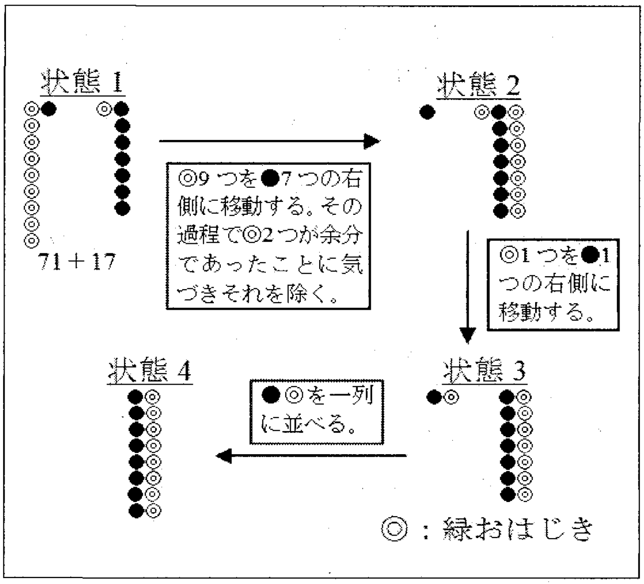


図６：71＋17における具体物の変形の過程[25)]

その後，Xは図6の状態4から状態3の形へおはじきを戻した．そして，彼はそのおはじきを参照しながら，事柄「二数の和はぞろ目になる」が成り立つ理由を，その事柄の条件「一方は二桁の整数であり，他方はその位の数を入れかえた数である」に言及して，一般的な言葉を用いて次のように述べて把握した[26]．

えっと，反対にしたわけだから，なんつーの，数は一緒じゃん（中略），Aが最初の方だと思って，で，Bが後の方だと思って（中略），Aの十の位と［緑おはじき7枚の並びを指差す］Bの一の位は同じじゃん［赤おはじき7枚の並びを指差す］，だったら，Bの，Bの十の位と［緑おはじき1枚を指差す］Aの一の位は同じじゃん［赤おはじき1枚を指差す］，だから，こうなると，なんつーの，ぞろ目になるじゃん［各7枚の並びを指差す］，で，さ，そんで，こう，こう入ってもらうと［図6の状態3から状態4のようにおはじきを動かす］，やっぱぞろ目になるから［各8枚の並びに手をかける］（213X～225X）

このように，Xはまず二桁の整数をA，位の数を入れかえた数をBとして，Aの十の位とBの一の位の数，Bの十の位とAの一の位の数がそれぞれ等しいことに言及した．そして，それぞれの和がぞろ目になり（例えば71＋17では，70＋7＝77と10＋1＝11），さらにそれらの和もぞろ目になることから（同様の例では77＋11＝88），事柄「二数の和はぞろ目になる」が成り立つと彼は述べた．それに続いて，彼は52＋25の場合についても同様の考えが適用できることを確認した．

その後，観察者がYの理解を確かめるために，自分で数字を選んで同様の考えを述べるようYに求めた．ところが，その際，XはYに傾聴せず，自分たちの予想（以下，事柄S）を次のように記述し直した．

2けたの整数と，十の位と一の位を入れかえた整数の和は，ぞろめになる．

その後，Yに傾聴するよう観察者がXに求め，YはXの助けを借りながら，その事柄が成り立つ理由を同様に把握した．

ここで，前述のように，彼らが当初に予想した事柄は「最初の整数の各位の数を加えると，二数の和の同じ数が繰り返された数字になる」であると思われた．しかし，Xが改めて記述した事柄Sは，この予想の内容をすべて表したものにはなっていない．言い換えれば，彼らはこの予想の中でも，「二数の和においてぞろ目で揃った数字は，最初の整数の各位の和である」の部分を考察しなかったのである．

以上を要約すると，XとYは当初，おはじきの枚数によって整数を表そうとした．しかし，「いつでも」を検討しようとするとおはじきの枚数が不足することから，彼らは緑おはじきと赤おはじきがそれぞれ10と1を表すと見なし，71＋17をその二色のおはじきによって表現した．それから，Xは二色のおはじきの合計枚数が同数になることを確認した．そして，彼は71＋17のおはじきを参照しながら，事柄「二数の和がぞろ目になる」が成り立つ理由を，その事柄の条件「一方は二桁の整数であり，他方はその位の数を入れかえた数である」に言及しながら把握した．その後に，彼は自身らの予想を事柄Sの形に明確に記述した．

3．新たな事柄の生成

(1) 反例への直面

事柄Sが成り立つ理由をXとYが把握した後，観察者が彼らに「じゃあ，85たす58でも同じ操作ができますか？」（334I）と尋ねて，事柄Sに対する反例を提起した．それに対して，彼らはおはじきを図7のように動かした．ここで，二人は図7の状態1から状態2のようにおはじきを移動する際に，「こうだから，やっぱり」（349X）と発言しているように，これまでと同様の考察を適用できると考えていた．

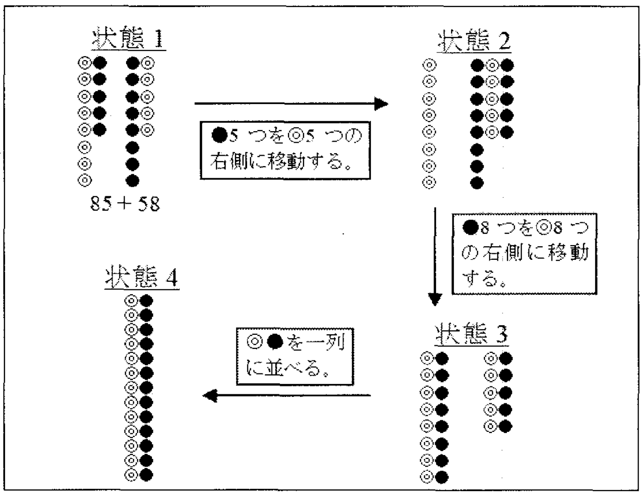


図7：85＋58における具体物の変形の過程

しかし，彼らは図７の状態４までおはじきを動かした後に，それぞれの列の枚数が13枚になることに戸惑いを表した．そして，Xは85＋58を筆算で計算し，143という答えに驚きを示して頭を抱えた．さらにYも答えが143になることを確認すると，「こりゃ大変だ，一から考え直し」(369Y) と述べた．この時点で彼らが85＋58を事柄Sに対する反例として認めたと言える．

XとYはこの反例に直面すると，100を表すものとして新たに黄おはじきを導入するなど，さらに考察を進めた．そして，「ちょっときまりがダメそう？」(383I) という観察者の発言に対しても，彼らは「いや」(384Y) と「何とかするしかない」(385X) と答えた．このことから，85＋58という反例への直面は，彼らの更なる取り組みの動機付けとなったことがわかる．

そして，観察者が別の事例として93＋39も考察するようXとYを促した．彼らは93＋39をおはじきで表す際，Xの発言「確かに縦は一緒になるけど，うーん，繰り上がりが問題」(417X～421X) に表れているように，二色のおはじきの合計枚数は同じであるものの，繰り上がりが生じるために事柄Sが成り立たなくなることを見出していた．

その後，観察者から事柄Sに対して何らかの修正が必要でないかと尋ねられると，Yは再度「繰り上がりが問題だ」(467Y) と述べた．そしてXは事柄Sに「百の位に入った場合は，ちがう数字になる」を書き加え，事柄Sを修正した（図８，以下では修正された事柄Sを事柄S'とする）．

2けたの整数と、十の位と一の位を入れかえた整数の和は、ぞろめになる。(百の位に入った場合はちがう数字になる。)

図８：事柄S'（事柄Sの修正）[27]

このように，観察者から二数の和として85＋58を提示されると，XとYはそれを反例として認めて戸惑いを表した．しかし，Xが「何とかするしかない」(385X) と述べたように，この反例への直面はその後の考察を能動的に進める動機付けとなった．ここで，二人は事柄Sが成り立たなくなる条件として繰り上がりが生じる場合を見出し，それにより，事柄Sを事柄S'に修正することができた．さらに，彼らは二数の和が二桁の場合と同様の考察を，二数の和が三桁になる場合にも適用しようとしていた．そのため，繰り上がりが生じる場合であっても「二色のおはじきが同数である」が同様に成り立つことを二人は捉えていた．

(2) 新たな事柄の生成

XとYは二色のおはじきの配列を縦に見て，それらのおはじきが同数であることを捉えていた．ここで，その見方を縦から横へ変更すれば，二色のおはじきでペアを余りなく生成できる．さらに，二数の和すべてについてそのペアを余りなく生成できることを捉え，ペアを余りなく生成できることの意味を「11で割り切れる」と解釈すれば，「二数の和は11で割り切れる」等の新たな事柄を生成することが可能になる．そこで，XとYがこのような新たな事柄を生成できるよう，観察者はⅡ節で導出した促進の方法に基づいて具体的な介入を行うことにした．観察者はその際，後述のように「おはじきに対して別の見方をしたら？」や「二色のおはじきで余りなくペアを構成できることの意味は？」と尋ねることにし，「おはじきを横に見る」や「11で割り切れる」等の重要な考え方それ自体を与えないように注意した．

まず観察者は，彼らに事柄Sのaction proofを振り返って二色のおはじきが同数であることを改めて確認してもらうために，Xが事柄Sを修正した後，再度85＋58についておはじきを並べるよう求めた．彼らが図７の状態４までおはじきの配列を変形した後，観察者が「そこの時点で，緑色と赤色の枚数は同じだよね」(483I，485I) と確認したところ，Yは「同じです」(487Y) と答えた．続いて，観察者が「枚数同じってことは，緑のやつと赤のやつ，縦で見てるでしょ」(488I) と発言すると，彼らは一瞬の躊躇を示した．その後，おはじきの配列が自分の位置から縦一列で見えるように，彼らは体の位置を変えた．そして，観察者が緑おはじきと赤おはじきの並びを順に指しながら，「こっちが13枚，こっちが13枚かな」(491I) と述べると，Xは「はい」(492X) と答えた．ここで，二人は観察者の発言に対して一瞬の躊躇を示した

ように，おはじきに対する自身らの見方を意識しておらず，観察者の発言によってその見方を意識するようになったと思われる．

そして，観察者はXとYに「別の見方をして，何か，ね，きまりを見つけられませんか？」(494I)と尋ねて，具体物への見方の変更を促した．それに対し，Xは図９の状態１から状態２のようにおはじきを動かし，「縦に見てばっかりいると，13，13しか気づかないんですけど，横から見ると，全部，２個ずつ，こう分かれるんです」(510X，下線は引用者）と述べた．このように，彼はおはじきの配列に対する見方を横に変えることにより，二色のおはじきでペアを余りなく生成できることを見出したのである．

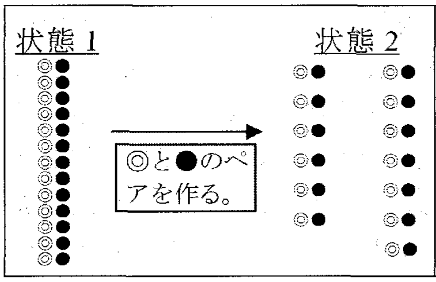


図９：ペアの生成

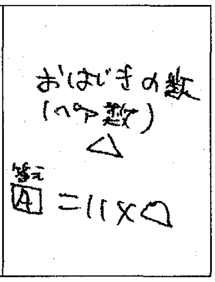


図10：事柄T

続けて，観察者はまずおはじきのペア１組の意味に焦点を当てて，「その緑の，と赤の組って，何を意味しているの？」(511I) と尋ねた．それに対してXは「11です」(512X) と答えた．観察者は次におはじきのペアを余りなく生成できることの意味の解釈を促すために，「11で余りなく組ができるってことじゃない？，そうすると，何か，きまりができませんか？」(523I〜528I) と発言した．だが，XとYはそのペアを余りなく生成できることの意味を解釈できず，そのペアの形を崩して別の考察を行った．そして，「十の位のおはじきの数と一の位のおはじきの数が等しくなる」(582X) というように，二人は事柄Sが成り立つ理由を把握した際の考察に戻ってしまった．

そのため，観察者はXの発言が既に確証した事実であることを彼らに確認し，二色のおはじきのペアが余りなく生成できることの意味を解釈するよう再び促した．それに対して，Yは「11／かける」(596Y) と発言し，Xも「11かけるおはじきの枚数は，は，これ(二数の和)の答えになる」(605X)と述べた．それから，二人は93＋39の場合にも同様におはじきのペアを余りなく生成できることを確認し，Xは新たに生成した事柄（以下，事柄T）を図10のように記述した．

その後，観察者は事柄Tが成立する条件を検討するよう促すために，彼らに「それは93たす39じゃなくても，他の場合でもできますか？」(671I) と尋ねた．その問いに対して，Xは「さっき何回もやって(中略)，おはじきの数を全部合わせると(中略)，数が同じになるっていうことがわかったので，えっと，それで，絶対１個のペアはこれ（緑おはじき）とこれ（赤おはじき）で11なので」(675X)と答え，事柄Tは二数の和すべてについて成り立つと述べた．ここで，「さっき何回もやって…わかったので」という発言に代表される通り，Xは事柄Sのaction proofに基づいて事柄Tが成り立つ条件を捉えていたことが窺える．

一方，記述された事柄Tそれ自体は，△を「おはじきの数（ペアの数)」としている通り，具体物の世界に留まったものである．だが，Xは前述の発言675Xに続いて，おはじきから手を離してボールペンを手に取り，「三角がおはじきのペアの数で，それがおはじきでなくても，こう，端っこにこう，何個かって書いて，書いたって，別にかまわないような感じ」(675X，677X) と述べた．このように，彼は△がおはじきのペアの数である必要性を感じていなかった．そのため，事柄Tの記述は具体物の世界に留まっているが，彼らは事柄Tの中に「二数の和は11×△の形で表すことができる」という意味を見出していたと思われる．

以上を要約すると，観察者の発言を通じて，XとYは二色のおはじきの配列を縦に見ている自分たちの見方を意識化するとともに，その見方を横に変えた．そして，Xはその見方の変更に基づいておはじきの配列を変え，二色のおはじきのペアを余りなく生成できることを見出した．さらに，やや時間を要したものの，彼らは観察者の発言によってそのペアを余りなく生成できることの意味も解釈した．その解釈に基づいて二人が新たに生成した事柄Tは，記述それ自体は具体物の世界に留まったものであったが，彼らはその中に「二数

の和は11×△の形で表すことができる」という意味を見出していたと思われる．さらに，彼らは，二色のおはじきの枚数が同じであることなど，事柄Sのaction proofに基づいて，事柄Tが成り立つ条件を見出していた．

V．議論

XとYは本課題において，まず二数の和をいくつか計算し，その計算結果に驚きを示した．そして，二人は二数の和の性質を自ら予想し，具体物として二色のおはじきを選択してaction proofを構成し，その予想が成り立つ理由を把握した．その後，観察者がその予想に対する反例を提起すると，彼らはそれを反例として認識して戸惑いを示した．そして，二人は観察者の関与の下で既有のaction proofを振り返り，二数の和すべてに成り立つ事柄を新たに生成した．

その一方で，相互作用という観点から見れば，彼らが互いの考えの妥当性を吟味し合うことは多くなかった．具体物の選択に関しては二人の間で議論が展開されたものの，本課題を通して全体的にはXが主導的な立場にあり，YはXの聞き手となることが多かった．しかし，聞き手役のYがいたからこそ，Xは自身の考えをより明確に述べるようになったと思われる．

以上より，Ⅱ節で述べた数学的探究の概念規定や数学的探究におけるaction proofの活用の意味から判断すると，XとYは数学的探究においてaction proofを活用する活動に取り組んだと考えることができる．そこで，彼らのその活動と，その活動の促進を意図した観察者の関与の効果に基づいて，Ⅱ節で理論的に導出した促進の方法について議論することで，数学的探究におけるaction proofの活用を促進する方法を解明する．

1．事柄が成り立つ理由の把握の促進

XとYは本課題において，観察者の介入を特に必要とせずに事柄が成り立つ理由を把握することができた．したがって，本項では，主に問題の設定及び子どもの取り組みに基づいて，事柄が成り立つ理由の把握を促進する方法について議論する．加えて，事前課題は本課題のための準備として位置づけられていたが，その事前課題においても，彼らは事柄を予想し，具体物を用いてその事柄が成り立つ理由を把握した．そのため，事前課題も分析の対象に含めることとする．

(1) 予想の明確な記述の促進

本研究では，数学的探究を，主体が他者と相互作用しながら，不確かさや疑念の解消を目指して，事柄を予想して証明し，さらにその事柄や証明を洗練し続ける活動と規定した．したがって，action proofの活用に限らず一般に数学的探究では，与えられた事柄に対して証明を構成するのではなく，自ら事柄を予想することが求められる．

XとYは本課題において自身らの予想を図5のように記述した．そして，その図5は52＋25という個別の場合に即して記述されていたが，それは「最初の整数の各位の数を加えると，二数の和の同じ数が繰り返された数字になる」という一般的な予想を表すものであった．だが，その後は，Xがその予想を改めて「2けたの整数と，十の位と一の位を入れかえた整数の和は，ぞろめになる」（事柄S）と記述したように，事柄Sが成り立つ理由のみが考察された．換言すれば，彼らは当初の予想の中でも，「二数の和においてぞろ目で揃った数字は，最初の整数の各位の和である」の部分を考察しなかったのである．

このように当初の予想の中でもその一部分のみが考察の対象となった原因は，二数の和がぞろ目になること（事柄S）と，そのぞろ目となる数字が最初の整数の各位の和であることという二つの内容が，一つの予想として総括されて記述されたからであると思われる．特にaction proofでは具体物を動的に動かすことが行われ，その場合，子どもは「数が揃う」ということに着目しやすいであろう．一方，XとYが二数の和を考察するために，二色のおはじきを集めてそれらが同数であることを確認した際は（図6の状態4），最初の二桁の整数を表すおはじきは形として残っていない．ゆえに，二数の和を表す二色のおはじきの各枚数が，最初の整数のどの部分に起因しているのかを読み取ることは難しくなる．そのために彼らは事柄Sしか考察の対象にできなかったのであろう．逆に，彼らが当初の予想を，事柄Sと「二数の和にお

いてぞろ目で揃った数字は，最初の整数の各位の和である」とに分けて初めから記述していれば，二数の和がぞろ目になる理由の後に，そのぞろ目となる数字が最初の整数のどの部分に起因しているのかが検討されていたであろう．

一方，事前課題では，XとYは自身らの予想を「奇数＋奇数＝偶数」と「二つの奇数を小さな方から順に選ぶと，それらの和は4ずつ異なる」に分けて記述した．そして，XがYに後者の予想の成り立つ理由を考えるよう指示し，自身は前者の予想について考察することを選択した通り，両者の予想が検討の対象になった．もちろんその後は前者の予想が成り立つ理由を考察することが中心になり，後者の予想を取り上げずに事前課題を終えることになったが，それは調査時間の制約から観察者が選択したことであった．

また，事前課題における「奇数＋奇数＝偶数」等の予想に比べて，本課題の当初の予想「最初の整数の各位の数を加えると，二数の和の同じ数が繰り返された数字になる」では，その主語と述語が明確に表現されてはいない．事柄を「～は…になる（である）」と明確に記述することは，命題を意識したりその真偽を判断したりすることにつながる（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2008）．さらに，そのように記述することによって，何についてのどのような性質を示すべきか，そしてそのためにはどのような条件を用いることができるかなど，事柄が成り立つ理由を把握するための見通しも得られると期待される．

よって，事柄を予想する機会を設定する際は，「～は…になる（である）」のように，事柄の主語と述語を明確に記述するよう子どもを促すことが重要である．そして，予想が幾つかの内容を含んで複雑になる場合には，子どもにその予想を複数の事柄に分けて記述するように求める必要がある．

(2) 事柄が成り立つ理由の把握の促進

Ⅱ節において，事柄が成り立つ理由の把握を促進する方法として，具体物に対する諸行為が他の場合に共通に適用できる理由に着目するよう促すことを挙げた．観察者はその促進を意図して，問(3)で「いつでも」と「わけ」を強調した．

XとYはまず緑おはじきと赤おはじきをそれぞれ10と1を表すものとして見なし，71＋17を図6の状態1のように表現した．それから，Xは71の緑おはじき7枚と17の赤おはじき7枚，71の赤おはじき1枚と17の緑おはじき1枚がそれぞれ同数であることに基づいて，緑おはじきと赤おはじきの合計枚数が等しくなる理由を捉えた（図6）．さらに，彼は問(3)に答えるために，二桁の整数をA，位の数を入れかえた数をBとし，71＋17の場合を参照しながら，「Aの緑おはじきとBの赤おはじき，Bの緑おはじきとAの赤おはじきがそれぞれ同数であるため，緑おはじきと赤おはじきの合計枚数も同数になる」のように具体物に対する諸行為の本質的特徴を捉え，その具体物に対する諸行為が他の場合に共通に適用できる理由も把握した（213X～225X）．

その際，Xは「反対にしたわけだから」（213X）と述べていたように，事柄Sの条件「一方は二桁の整数であり，他方はその位の数を入れかえた数である」にも言及していた．つまり，彼は事柄の条件に言及しながら，具体物に対する諸行為の本質的特徴を把えていたのである．彼が具体物に対する諸行為の本質的特徴をこのように握えていたことは，事柄Sが成り立つ理由を把握するために決定的であった（三輪，1987）[28]．ゆえに，action proofを通じて事柄が成り立つ理由を把握するためには，事柄の条件に言及しながら，具体物に対する諸行為の本質的特徴を明らかにすることが重要なのである．

ここで，事柄の条件に言及しながら具体物に対する諸行為の本質的特徴を捉えるためには，事柄の条件を具体物によって的確に表現する必要がある．だが，XとYは当初12＋21をおはじきの枚数によって表現したように，十進位取り記数法によって数が表現されていることや，他方が一方の位の数を入れかえた数であることを，具体物によって表すことができなかった．それではこの調査においてその的確な表現が生まれた要因は何であっただろうか．それは，考察すべき内容が「いつでも」であることを彼らが再確認して，おはじきの枚数によって表現することが煩雑な71＋17を選択したことにある．二人が71＋17を選択したことにより，事柄Sの条件を用いて具体物によ

る表現を行う必要性が生まれたのであろう(Zazkis, 2001)[29].

このことは彼らが事前課題において「偶数と偶数の和は偶数になる」が成り立つ理由を把握した際にも表れている.Xは観察者からそれがいつでも成り立つ理由を尋ねられると,図4のようにおはじきを用いてその理由を考察した.その際,彼は「2で割り切れる数」という偶数の性質に基づき,図4の状態3のようにおはじきの間を広げて長方形の形を作った.このようなXの考察も,観察者の「いつでも」という問いに答えるために,偶数一般を表す必要性から生まれたのであろう.

以上より,事柄が成り立つ理由の把握を促進するためには,「なぜその事柄はその条件の場合にいつでも成り立つのか」等と問い,事柄の条件に言及しながら具体物に対する諸行為の本質的特徴を把えるように子どもを促すことが重要である.その際,具体物で表現することが煩雑な例を取り上げることは,子どもが事柄の条件を具体物によって的確に表現するようになる契機になり得る.

2.新たな事柄の生成の促進

(1) 反例に対する望ましい対応の促進

数学的探究では,事柄を証明したらそれで満足せずに,事柄や証明を洗練し続けることが求められる.ここで,新たな事柄の能動的な追究を促すには,事柄が証明された後に,不確かさや疑念を生み出すことが有効になる.観察者はその新たな事柄の能動的な追究を促進するために,XとYが事柄Sの成り立つ理由を把握した後に,事柄Sに対する反例として85+58を提示した.彼らはその85+58に対して戸惑いや驚きを示し,それを反例として認めた.ここで,彼らが戸惑いや驚きを感じたのは,主に次の二つの理由からであろう.第一は,二数の和すべてに成り立つと確信していた事柄Sに対して反例が見つかったことである.第二は,具体物では緑おはじきと赤おはじきが同数になるにもかかわらず,数字においては十の位と一の位の数が等しくならないという不一致が生じたことである.そして,「何とかするしかない」(385X)という発言に代表される通り,この反例に直面したことや,具体物と記号の世界で成り立つ事柄の不一致に気づいたことは,新たな事柄を能動的に追究する動機付けとなった.

反例に対するXとYの反応の中でも,次の二点は,action proofの活用に限らず広く一般に重要である.第一に,「繰り上がりが問題」(421X)という発言に表れている通り,彼らは事柄Sが成り立たなくなる条件として「繰り上がり」に再三言及していた.つまり,二人は反例に直面した際,事柄が成り立たなくなることを認めて終わるのではなく,どの条件になるとその事柄が成り立たなくなるのかまでも考察していたのである.このように事柄が成り立たなくなる条件も捉えることは,当初の事柄を正しい事柄へと修正することにつながる(Peled & Zaslavsky, 1997).実際,XとYはその「繰り上がり」に基づいて事柄Sに条件を付加することで,事柄Sを事柄S'に修正した.

第二に,「確かに縦は一緒になるけど」(417X)という発言に表れているように,XとYはその反例の場合であっても「二色のおはじきが同数である」には変わりがないことを捉えている.すなわち,彼らはそれまでの考察のどの部分がその反例の場合にも適用可能であるかどうかを吟味しているのである.このように,反例を反例として認めるだけでなく,その反例の場合に対してさらに分析を加えることは,新たな事柄を生成するための手がかりを得ることにつながる(Balacheff, 1991).特に,XとYのようにそれまでの考察が適用可能な部分を捉えることができれば,その部分を拠り所とすることにより,その反例も含めたより包括的な事柄を生成する可能性が広がる.実際,後述の通り,二人は和が三桁の場合でも「二色のおはじきが同数である」は成り立つことを利用することによって,二数の和すべてに成り立つ事柄を生成することができたのである.

以上の考察より,事柄が成り立つ理由の把握の後に反例を提起することで,新たな事柄を能動的に追究しようとする動機が子どもの中に生まれる.その際,事柄が成り立たなくなる条件を特定するように促進することは,子どもが当初の事柄を正しい事柄へと修正することにつながる.さらに,事柄が成り立たなくなる場合であっても,それまでの考察のどの部分がその場合にも適用可能

であるかを捉えるよう促すことは，子どもが既有の証明に基づいてより包括的な事柄を生成するために重要である．

(2) 新たな事柄の生成の促進

Ⅱ節において，新たな事柄の生成を促進する方法の第一として，具体物に対するそれまでの見方を変更し，その変更に伴って具体物に対する諸行為を新たに生成するよう子どもを促すことを導出した．調査においてXとYはまず事柄Sが成り立つ理由を把握した．その事柄Sは十の位と一の位の数が等しいことを意味するものであった．そのため，彼らは緑おはじきと赤おはじきが同数であることを示すために，二色のおはじきの配列を縦に見ているように思われた．そこで，観察者は彼らに対して「別の見方をして，何か，ね，きまりを見つけられませんか？」(494I) と発言し，おはじきに対する見方を変更するように促した．Xはその発言に答える形で，おはじきに対する見方を縦から横へ変え，二色のおはじきでペアを余りなく生成できることを見出した（図９）．

しかし，XとYは事柄Sに対するaction proofにおいて，おはじきに対する自身らの見方を明確には意識していなかったようである．なぜなら，観察者が前述の発言「別の見方をして，何か，ね，きまりを見つけられませんか？」(494I) の前に，おはじきに対する彼らの見方を確認するために，「枚数同じってことは，緑のやつと赤のやつ，縦で見てるでしょ」(488I) と問いかけたところ，彼らは一瞬躊躇した後に，自分たちの目線から二色のおはじきの配列が縦一列に見えるように体の位置を変えたからである．それ以前には，二人は「確かに縦は一緒になるけど」(417X) と述べていたように，二色のおはじきを縦の配列で見ていることを自覚していたように思われる．しかし，その後の試行錯誤が長かったせいか，観察者の上述の発言「枚数同じってことは，緑のやつと赤のやつ，縦で見てるでしょ」(488I) の時点では，彼らはおはじきに対する自身らの見方を明確には意識していなかったようである．

大谷 (2002) によれば，証明を振り返って新たな事柄を生成することは，証明のテキストを対象化して，それを外的支援として思考を進めることによって支えられる．しかし，具体物への見方は必ずしも記述されるものではない．そのために，子どもが具体物に対する自身の見方を意識化していることは少ないと思われる．それゆえ，子どもに具体物に対するそれまでの見方を変更するよう促すためには，まず具体物に対するそれまでの見方を確認することによって，その見方を意識化できるようにすることがより重要になるのである．

さらに，新たな事柄の生成を促進する方法の第二として，新たに生成した具体物に対する諸行為の意味を解釈し，新たな事柄が成立する条件を見出すよう子どもを促すことを指摘した．調査において，XとYが二色のおはじきでペアを余りなく生成できることを見出した後に，観察者はペア１組の意味とペアを余りなく生成できることの意味を解釈するよう促した．そして，彼らはやや時間を要したものの，それらの意味を解釈して事柄Tを新たに生成した (図10)．ここで，記述された事柄Tそれ自体は，まだ具体物の世界に留まっていたものであった．しかし，Xの発言「三角がおはじきのペアの数で，それがおはじきでなくても，こう，端っこにこう，何個かって書いて，書いたって，別にかまわないような感じ」(675X, 677X) から判断すると，彼らは事柄Tの中に「二数の和は11×△の形で表すことができる」という意味を見出していたと推測される．

そして，XとYが事柄Tを生成した後に，観察者はその事柄Tが成立する条件を考察するよう促した．Xはそれに対して，「さっき，何回もやって（中略)，おはじきの数を全部合わせると（中略)，数が同じになることがわかったので，えっと，それで，絶対１個のペアはこれ（緑おはじき）とこれ（赤おはじき）で11なので」(675X) と発言した通り，事柄Tは二数の和すべてについて成り立つことを捉えていた．その際，Xは「何回もやって…わかったので」と述べて事柄Sのaction proofに言及していたように，事柄Sと事柄Tを比較検討していた．ゆえに，Xは，二数の和が二桁の場合にしか成り立たない事柄Sに対して，事柄Tは二数の和すべてに成り立つという点から，すなわち一般性という観点から，事柄Sを洗練したものとして事柄Tを捉えていたと言える．このように，事

柄Sが成り立つ場合と成り立たない場合を統合して，二数の和すべてに成り立つ事柄Tを生成した彼らの活動は，数学的理解の深化という観点から見て非常に重要である（和田，1980/1997）.

ここで，本研究では数学的探究におけるaction proofの活用の意味の一つを，事柄の洗練に関わって，action proofを振り返って新たな事柄を生成することと捉えた．しかし，新たに生成した事柄が既有の事柄に比べて洗練されたものであるかどうかを捉えるためには，新たな事柄を生成してそれで終わりにするのではなく，Xが行ったように，一般性等の観点から新たな事柄と既有の事柄とを比較検討することが必要である[30]．実際，II節で考察した事柄αと事柄βに関しても，事柄βを生成した後にそれら二つを比較することによって，一般性の観点から事柄βを事柄αの洗練したものとして捉えるとともに，事柄αを事柄βの特殊として位置づけることができるのである.

だが，新たに生成した事柄が，常に既有の事柄に比べて洗練されたものになっているとは限らない．しかし，その場合であっても既有の事柄と新たな事柄を比較検討することで，事柄を洗練するための方向性や観点が得られると思われる.

さらに，Xは事柄Sと事柄Tの比較検討を，前述の発言675Xに表れている通り，それら二つの事柄のaction proofの異同に基づいて行っていた．その同一点とは二色のおはじきが同数になることであり，相違点は，事柄Tのaction proofでは，その後に二色のおはじきで11を表すペアを構成することである．このように既有の事柄のaction proofと新たな事柄のaction proofの異同を明らかにした上で，それらの事柄を比較することが重要である．なぜなら，それらの異同を捉えることによって，事柄の成り立つ理由まで含めて事柄間を比較することが可能になるからである.

以上を要約すると，新たな事柄の生成では，まず子どもに具体物に対するそれまでの見方を確認することによってその見方を意識化できるようにした上で，その見方を変更して具体物に対する諸行為を新たに生成するように促すことが重要である．そして，その新たに生成した具体物に対する諸行為の意味を解釈したり，新たな事柄が成立する条件を見出したりするよう子どもに求めることが必要である．その際は，子どもに既有の事柄のaction proofと新たな事柄のaction proofの異同を明らかにしながら，一般性等の観点から既有の事柄と新たな事柄を比較検討するように促すことが重要である.

VI. 研究のまとめと今後の課題

本研究の目的は，数学的探究におけるaction proofの活用を促進する方法を明らかにすることであった．この目的を達成するために，本研究では，まず数学的探究におけるaction proofの活用の意味を，主体が他者と相互作用しながら，action proofを通じて事柄が成り立つ理由を把握することと，action proofを振り返って新たな事柄を生成することと捉えた．そして，それら二つを促進する方法をそれぞれ理論的考察から導出した．次に，小学五年生のペアを対象として，彼らが数学的探究においてaction proofを活用する活動と，理論的考察から導出した促進の方法に基づいて観察者がその活動を促進することに焦点を当てた事例研究を計画して実施した．そして，理論的考察から導出した促進の方法を，その事例研究から得られた知見に基づいて検討して精緻化することによって，数学的探究におけるaction proofの活用を促進する方法を明らかにした.

本研究の結論を要約すると次の通りである.

(1) 数学的探究では，事柄を子どもが自ら予想する機会を設定する必要がある．その際，「～は…になる（である）」のように，事柄の主語と述語を明確に記述するよう子どもを促すことが重要である．さらに，予想が幾つかの内容を含んで複雑になる場合には，子どもにその予想を複数の事柄に分けて記述するように求める必要がある.

(2) 事柄が成り立つ理由の把握については，「なぜその事柄はその条件の場合にいつでも成り立つのか」などと問い，事柄の条件に言及しながら具体物に対する諸行為の本質的特徴を把えるように子どもを促すことが重要である．その際，具体物で表現することが煩雑な例を取り上げることは，子どもが事柄の条件

を具体物で的確に表現するようになる契機になり得る．

(3) 事柄が成り立つ理由の把握の後に反例を提起することで，新たな事柄を能動的に追究しようとする動機が子どもの中に生まれる．さらに，子どもに事柄が成り立たなくなる条件を明らかにしたり，それまでの考察のどの部分がその条件の場合にも適用可能であるかを捉えたりするよう促すことは，子どもが当初の事柄を修正したりより包括的な事柄を生成したりすることにつながる．

(4) 新たな事柄の生成では，まず子どもに具体物に対するそれまでの見方を確認することによってその見方を意識化できるようにした上で，その見方を変更して具体物に対する諸行為を新たに生成するように促すことが重要である．そして，その新たに生成した具体物に対する諸行為の意味を解釈したり，新たな事柄が成立する条件を見出したりするよう子どもに求めることが必要である．その際は，子どもに既有の事柄のaction proofと新たな事柄のaction proofの異同を明らかにしながら，一般性等の観点から既有の事柄と新たな事柄を比較検討するように促すことが重要である．

これら四つの結論の中でも(2)と(4)は，action proofを通じて事柄が成り立つ理由を把握することと，action proofを振り返って新たな事柄を生成することにそれぞれ対応する．その一方で，(1)と(3)は，action proofに限らず，広く事柄の予想と反例への対応について成り立つことである．

I，II節で述べたように，数学的探究におけるaction proofの活用は，数学的，教育的に大きな価値のある学習である．だが，action proofに関する従来の研究では，数学的探究におけるaction proofの活用について考察されてこなかった．それに対し，本研究は，子どもが数学的探究においてaction proofを活用する活動が実現可能であること，及び，その活動を促進する方法を具体的に示した．加えて，本研究によって明らかとなったその促進の方法は，教師が実際の学習指導を考案するための指針になり得るものである．

しかし，本研究で得られた結論は，小学五年生のペアを対象に，二数の和を題材として行った事例研究に基づくものである．よって，今後は，他の題材を用いたり，他の子どもを対象としたり，教室における授業も検討の対象にしたりすることで，この結論の妥当性をより吟味していく必要がある．さらに，一般に数学的探究は子どもの能動性を前提としたものである．それゆえ，本研究の結論に基づく指導を継続的に受けた子どもが，その指導の後に，指導者の介入を特に必要とせずに自ら数学的探究においてaction proofを活用できるようになるかなど，長期的な研究も今後の課題として残されている．

謝　辞

調査にご協力いただいたつくば市公立小学校教諭の山口保雄先生，吉田正善先生，田中真樹子先生，並びに児童とその保護者の方々に深謝申し上げます．また，本論文の作成にあたって貴重なご批評をいただいた査読者の方々に深謝申し上げます．

注

1）本研究では，証明の意味をより広義に，「既に正しいと認められている事柄に基づいて，ある事柄が成り立つことを演繹的に示すこと」と捉える．そして，演繹的な推論の厳密さ，根拠として用いられる事柄の内容，演繹的な推論の表現様式などに応じて，action proofや後述の形式的証明など，証明には様々な種類があるという立場に本研究は立つ．なお，action proofの他，後述の「数学的探究」や「数学的探究におけるaction proofの活用」の概念規定についてはII節で述べる．

2）本研究では，日本の学校数学において中学二年生から「証明」という名で学び始めるものを，本研究の主題であるaction proofと区別するために「形式的証明（formal proof)」と呼ぶことにする．

3）後述の事柄の予想や新たな事柄の生成に関して，これまでも部分的には研究が行われてきた．例えば宮崎（1992）では，小学六年生が自ら事柄を推測し，その事柄に対してaction proofに類するものを構成している．また，坂本（1991）

は小学校段階を想定して，action proofによる取り組みの過程の一つに発展的な考察を含め，その可能性に言及している．

4）この概念規定はaction proofそのものを対象としており，action proofを構想する過程までは含まれていない．action proofを構想する際は，まずある個別の場合について事柄が成り立つことを確認したり，複数の場合を考察する中で具体物に対する諸行為の本質的特徴を把えたりするなど，この概念規定の他にも様々な取り組みが行われると思われる．

5）本研究では，ある1つの物だけでなく物の配列全体も具体物として意味する．そして，後述の具体物の変形は，具体物の配列を変形することを意味する．

6）具体物に対する諸行為には，具体物の変形と具体物への見方の変更がある（宮崎，1995）．

7）正確には「ヒューマニスティックな探究の観点から学校数学へアプローチすること(a humanistic inquiry approach to school mathematics)」である．しかし，Borasi自身も，1992年の文献ではa humanistic inquiry approachと述べているが，1994年と1996年の文献では単にan inquiry approachとしている．だが，後述の可謬主義や構成主義に関する議論については，それら三つの文献を通じて大きな相違は見られない．

8）それぞれNational Council of Teachers of MathematicsとNational Research Councilの略称である．

9）相対的真理観に基づく証明指導を通じて批判的思考や反省的思考の育成を志向したFawcett (1938）は，「子どもは次のことを理解しているとき，演繹的証明の本性を理解している」と仮定した（p.10).

1．あらゆる命題を証明する際の無定義概念の位置と重要性
2．明確に定義された用語の必要性と，命題に対するその影響
3．前提または証明されない命題の必要性
4．いかなる論証も，前提から含意されない事柄を証明できないこと

この中でも，定義に直接関わる記述は，一番目と二番目に見出すことができる．

10）宮崎（2002）は発見の対象をより広義に解釈し，新たな事柄とその証明だけでなく，暗黙の前提を顕在化することや，既有の概念を新たな概念に精緻化することなども挙げている．

11）この指示は後述の事前課題と本課題の間に行われた．なぜなら，今回の調査が具体物の利用に関係していることは，事前課題の時点では子どもに伝えない予定であったからである．

12）同様の調査方法はBalacheff（1988）やPedemonte（2007）でも採用されている．

13）数学的には「自然数」であるが，小学生を対象とした調査のため「整数」としている．

14）平成17年に実施された「特定の課題に関する調査」（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2006）では，同様に，二数の和の性質を予想する問題が出題された．その結果，小学五年生では，「たした数の十の位と一の位の数が同じ」などと解答している子どもは27.7%と大多数であった．この解答は「準正答」として見なされており，通過率（正答と準正答）は30.0%であった．すなわち，この解答は通過率の9割程度にまで及んでいる．この傾向は小学四，六年生についても同様である．

15）清水（2007）は，同様の二数の和について，生徒の探究の過程では「和は11の倍数である」といった事柄の特殊な事柄が数多く登場すること，そして，それらの特殊な事柄が「和は11の倍数である」といった事柄に洗練されていくという，数学をつくる過程を体験できることを述べている．そして，中学一年生を対象として実際に授業を行い，子どもの多様な予想を分析している．

16）一般に，自然数nに対して，2n桁の自然数とその位の数を入れかえた数との和は，常に11の倍数になる．その一方で，(2n+1）桁の自然数とその位の数を入れかえた数との和は，ある条件の下では11の倍数になる．その条件には，例えば，「‘最初の自然数の奇数桁の数の和’と‘最初の自然数の偶数桁の数の和’との差が11の倍数（0も含む）である」がある．具体物に対する諸行為やその解釈を通じて，これらの事柄を

生成したり，その成り立つ理由を考察したりすることも可能である．例えば，後述の本調査のXとYのように，各位の数をおはじきで表現したとする．自然数が三桁の場合，百の位と一の位の数の和が十の位の数に等しければ，求める和において110のペアと11のペアを余りなく生成できるため，その和は11の倍数となる．一方，自然数が四桁の場合，和において1001のペアと110のペアを余りなく生成できるため，その和は常に11の倍数になる．もちろん，位の数を増やせば，とりわけ奇数桁の場合に，厳密に考えると複雑な場合分けが必要となってくる．

17）硬貨は各種類45枚程度，おはじきは緑赤を各20枚，黄を10枚用意した．

18）「前後の補説」は調査の趣旨や課題解決時の注意点の伝達であり，事前課題の前，事前課題と本課題の間，そして本課題の後に行われた．所要時間はその合計である．

19）実際のXの発言は次の通りである．

　　奇数じゃん，両方，両方奇数なんだけど，この１個あるじゃん，１個をこっちに移すと，偶数と偶数になるじゃん，偶数たす偶数は偶数でしょ，だから，えー，だから，いつでも成り立つんだよ

20）この部分の真意は「偶数と偶数をたすと偶数になる」である．質問の言葉が不十分であるが，XとYのその後の様子から，観察者の発言の真意は二人に伝わっていたと判断できる．

21）子どもの発言の中で，[　]内は表出行動，(　)内は筆者による補足，／は１秒以上の休止，？は質問や上がり調子の発言を意味する．

22）「018Y」は18番目の発言または表出行動であり，それがYによって為されたものであることを意味する．番号は本課題の開始時点から数えられたものであり，事前課題の発言等は含まれていない．

23）これはPolya（1954）の帰納的プロセスの中でも支持的接触に該当する．一方，それ以前の三つの計算の考察は暗示的接触に該当する．

24）図５の記述は次の通りである．

　　52と25の場合の52の方で考えると…52を分解して，５と２にしてその和を求めると，７になり，52＋25の答えの同じ数がくりかえされた数字になる．（25も同じ）

25）XとYは同じ机に対して90度の角度で対面しており，図６はYの位置から見える形である．これ以降，上下左右への言及や図の記述は，Yの位置から見た場合で行う．実際，XもYの位置から見て上下左右を判断している様子が窺えた．

26）この間，YはXの発言に相槌を打ったりうなずいたりしていた．

27）図８の記述は次の通りである．

　　２けたの整数と，十の位と一の位を入れかえた整数の和は，ぞろめになる．（百の位に入った場合は，違う数字になる．）

28）de Villiers（1990）が挙げた証明の機能のいわば源流に，Bell（1976）が指摘した証明の意義（sense）がある．その証明の意義の中でも照明（illumination）が，説明の機能と発見の機能に関わるものである．三輪（1987）はこの照明の一部に関わって，証明を通じて事柄が成り立つことに事柄の条件がどのように関わるのかを明らかにできると述べている．

29）Zazkis（2001）は教職（小学校教師）希望者を対象としたインタビュー調査に基づき，大きな数を考察の対象として取り上げることは，学習者が数を代数的に表現したり数の構造を把えたりすることにつながると述べている．

30）事柄を比較する際の観点には，一般性だけでなく，明瞭性，簡潔性，的確性などの算数・数学のよさも挙げられる（清水，2000）．

引用・参考文献

青本和彦・上野健爾・加藤和也・神保道夫・砂田利一・高橋陽一郎ら(2005)．*岩波数学入門辞典*．東京：岩波書店．

Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. In I. Wirszup, & R. Streit (Eds.), *Developments in School Mathematics Education around the World: Applications-Oriented Curricula and Technology-Supported Learning for all Students, Vol. 2* (pp. 284-298). Reston, VA: NCTM.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp.89-110). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23-40.

Borasi, R. (1992). *Learning Mathematics through Inquiry.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166-208.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Error*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

ブルーナー, J. S.・オルバー, R. R.・グリーンフィールド, P. M.ら (1966/1968). *認識能力の成長:認識研究センターの協同研究* (岡本夏木・奥野茂夫・村川紀子・清水美智子訳). 東京:明治図書.

de Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

江森英世(2006). *数学学習におけるコミュニケーション連鎖の研究.* 東京:風間書房.

Fawcett, H. P. (1938). *The Nature of Proof: A Description and Evaluation of Certain Procedures Used in a Senior High School to Develop an Understanding of the Nature of Proof (The Thirteenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics).* New York, NY: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, *15* (3), 42-49.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, Vol. III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2006). *特定の課題に関する調査(算数・数学)調査結果(小学校・中学校).* http://www.nier.go.jp/kaihatsu/tokutei/04002030200004000.pdf (参照2009.02.18)

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2008). *平成20年度全国学力・学習状況調査解説資料中学校数学.* http://www.nier.go.jp/08tyousa/08kaisetu_04.pdf (参照2008.04.23)

小松孝太郎 (2007a). 学校数学におけるaction proofの概念規定. *筑波数学教育研究, 26,* 29-38.

小松孝太郎 (2007b). 学校数学における証明の機能「説明」に関する一考察:数理哲学における議論に着目して. *日本数学教育学会第40回数学教育論文発表会論文集* (pp.637-642). 千葉:東京理科大学.

國本景亀 (1996). *空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善* (平成6~7年度文部省科学研究費補助金一般研究(C)研究成果報告書, 課題番号06680256).

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

松村明(編)(2006). *大辞林第三版.* 東京:三省堂.

三輪辰郎 (1987). 証明の指導を通して思考力を育てる. *学習指導研修, 9* (11), 64-67.

宮崎樹夫 (1992). 推測したことに一般性があることを示すために行われる活動:生徒はどのようにして生成的な例による説明を行うか. *日本数学教育学会誌数学教育学論究, 57,* 3-19.

宮崎樹夫（1993）．学校数学における証明の意義に関する考察：証明の機能に焦点を当てて．*筑波大学教育学系論集，18*(1)，155-169.

宮崎樹夫（1995）．*学校数学における証明に関する研究：証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して*．博士学位請求論文，筑波大学．

宮崎樹夫（2002）．中学校数学において，生徒が証明の発見機能を活用するための諸条件に関する研究．*科学教育研究，26*(5)，358-369.

文部省（1999）．*小学校学習指導要領解説算数編*．東京：東洋館出版社．

Morley, A. (1973). Mathematics as "process". *Mathematics Teacher, 66*(1), 39-45.

中原忠男（1994）．数学教育における構成主義の展開：急進的構成主義から社会的構成主義へ．*日本数学教育学会誌数学教育，76*(11)，302-311.

大谷実（2002）．*学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成*．東京：風間書房．

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analyzed?. *Ed-ucational Studies in Mathematics, 66*(1), 23-41.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also) explain. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *19*(3), 49-61.

Piaget, J. (1953). *Logic and Psychology* (W. Mays & F. Whitehead, Trans.). Manchester: Manchester University Press.

Polya, G. (1954). *Induction and Analogy in Mathematics (Mathematics and Plausible Reasoning, Vol. 1)*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

坂本美知夫（1991）．論理的思考力を育成する算数指導：action proofを視座として．*数学教育研究，6*，85-94.

Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics, 4*(1), 32-34.

清水静海（2000）．発展的な考察を促し，高める算数授業の創造．*新しい算数研究，350*，8-11.

清水静海（2007）．*数学的活動をコアとした学校数学カリキュラムの開発に関する基礎的研究*（平成16年度～18年度科学研究費補助金 基盤研究(B)研究成果報告書，課題番号16300247）．

清水美憲（1990）．ペアによる数学的問題解決のプロトコール分析について．*筑波大学教育学系論集，14*(2)，183-195.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20.

杉山吉茂（1986）．*公理的方法に基づく算数・数学の学習指導*．東京：東洋館出版社．

梅川貢司（2002）．数学教育における証明の意義指導に関する基礎的研究：Action Proofを選択肢に取り入れた証明の意義理解調査から．*上越数学教育研究，17*，67-78.

von Glasersfeld, E. (1990). An exposition of constructivism: Why some like it radical. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics* (pp.19-29). Reston, VA: NCTM.

和田義信（1980/1997）．理解とは何か．和田義信著作・講演集刊行会（編），*和田義信著作・講演集4講演集(2)考えることの教育*（pp.251-268）．東京：東洋館出版社．

Zazkis, R. (2001). From arithmetic to algebra via big numbers. In H. Chick, K. Stacey, & J. Vincent, (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.676-681). Victoria: The University of Melbourne.

資料：調査課題

事前課題

問題　次の問題に答えましょう．

(1) 奇数を二つ書き，その二つの奇数の和を計算しましょう．

(2) (1)と同じことを，他の奇数についてもしてみましょう．

(3) (1)と(2)の計算を参考にして，奇数と奇数の和について，いつでも成り立つ「きまり」を見つけましょう．見つけたきまりを下に

書いてください.

(4) (3)で気づいたきまりは，なぜ**いつでも**成り立つのでしょうか．そのきまりが**いつでも**成り立つ**わけ**を，おはじきを使って考えて説明しましょう.

※(1)から(3)までが調査用紙の一枚目，(4)が二枚目に記述されている.

本課題

2けたの整数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和がどんな数になるか考えます.

例えば,

52のとき	52 + 25 =＿＿
26のとき	26 +＿＿=＿＿
31のとき	31 +＿＿=＿＿

(1) $\boxed{\quad}$ の中の下線部に，当てはまる数字を書きましょう.

(2) 上の計算を参考にして，2けたの整数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の和について，いつでも成り立つ「きまり」を見つけましょう．見つけたきまりを下に書いてください.

(3) (2)で見つけたきまりは，なぜ**いつでも**成り立つのでしょうか．そのきまりが**いつでも**成り立つ**わけ**を，モノを使って考えて説明しましょう.

※(1)と(2)が調査用紙の一枚目，(3)が二枚目に記述されている.

Facilitating Pupils' Utilization of "Action Proof" in Mathematical Inquiry : A Case Study

Kotaro KOMATSU

(Abstract)

"Action proof" is, in short, proof in which one performs certain operations with manipulative objects in a generic example. The previous studies on action proof have discussed its utilization in the context of verifying statements or learning formal proof. However, we also need to focus on mathematical inquiry in which one makes a conjecture, proves it and refines the conjecture and its proof, because such inquiry reflects mathematical research and may lead to productive learning of formal proof. Thus, this study explores how we can facilitate pupils' utilization of action proof in mathematical inquiry.

Firstly, the author considered the meaning of utilizing action proof in mathematical inquiry from two viewpoints: grasping why statements are true and inventing new statements. Then the methods for facilitating pupils' grasp and invention were theoretically examined. After that, the author planned and conducted a case study in which a pair of fifth graders utilized action proof in mathematical inquiry and the author intended to facilitate their activities according to the methods that had been theoretically examined before. The methods were then discussed and elaborated, based on the findings of the case study.

The conclusions of this study are as follows.

- In mathematical inquiry, we have to provide pupils with opportunities to make conjectures themselves. It is then important to promote them to describe the subjects and predicates of their conjectures clearly, such as "S becomes (is) P". If a conjecture includes several matters and therefore becomes complicated, we need require pupils to divide the conjecture into several statements.
- When pupils try to grasp why a statement is true through action proof, we should facilitate them to grasp the original character of actions on manipulative objects with making reference to the conditions of the statement, for example questioning "why the conditions make the statement always true?". Then, it seems that, through selecting examples which are troublesome for being represented by manipulative objects, we can promote pupils to represent exactly the conditions of the statement by manipulative objects.
- After grasping why a statement is true, pupils pursue actively new statements if we raise counter-examples to the statement. Furthermore, facilitating pupils to seize the following two points is important for them to modify the original statement and to invent more general statement: conditions in which the original statement becomes

false, and part of the previous examination which is applicable to the conditions.

- When pupils try to invent new statement through the previous action proof, it is important that after we provide them with opportunities to become aware of their previous views of manipulative objects, we promote them to change their views and to invent new actions on manipulative objects. After that, we need require them to interpret the meaning of new actions on manipulative objects and to find the conditions of new statement. Then we should facilitate them to compare previous and new statements in terms of generality through examining differences of action proof of the two statements.