学校数学におけるaction proofの機能に関する研究*

－発見に焦点をあてて－

小　松　孝太郎**

目　　次

キーワード：action proof，機能，発見

Ⅰ．研究の意図，目的

action proofとは，粗く言えば，形式的証明が数学的な記号や文字を用いて表現される証明であるのに対して，具体物や図を用いて行われる証明である[1)]．このaction proofは，Morley (1967, 1973) とSemadeni (1983, 1984) により，子どもの発達に応じた証明として，主に小学校段階を想定して提唱された．その後の研究では，action proofを通じて形式的証明を生成したり納得したりすることや（宮崎，1995；國本，1996），証明の意義指導においてaction proofを経験的議論と形式的証明とを接続するものとして位置づけることも検討されてきた（梅川，2002）．

このように，action proofの機能は，ある事柄が成り立つことを示すことの他には，形式的証明の学習との関係において主に議論されてきた．しかし，形式的証明には，事柄が成り立つことを示す以外にも様々な機能がある（de Villiers，1990；Hanna & Jahnke，1996；宮崎，1993）．例えば，de Villiers（1990）によれば，数学における証明のような形式的証明には，立証の他に，説明，体系化，発見，コミュニケーションの機能がある．それゆえ，action proofにも同様に多様な機能が備わっていることが明らかとなれば，それに応じて価値ある学習活動を展開することが可能になると期待される．

本研究では，このような多様な機能を視野に，特に発見の機能に焦点を当てる．形式的証明の発見の機能とは，詳細は後述の通りであるが，人間が既有の形式的証明を振り返って新たな事柄を生成できることを意味する（de Villiers，1990）．この発見の機能が形式的証明にあることで，与えられた事柄を証明することに終始するのではなく，その証明からさらに新たな事柄を創造する活動を実現することができる（宮崎，2002；杉山，1986）．したがって，action proofが前述のように小学生にも学習可能な証明であることを考慮すると，action proofの発見の機能を明らかにすることは

*平成21年5月7日受理，平成21年10月7日再受理
平成22年1月19日決定
**筑波大学大学院人間総合科学研究科

極めて重要な課題である．

以上の問題意識から，本研究では，action proofの発見の機能を明らかにすることを目的とする．そのために，まずaction proofに関する先行研究を概観し，action proofの発見の機能を明らかにする必要性を，それらの先行研究との関係から指摘する（Ⅱ節）．次に，action proofの発見の機能はaction proofの特質に影響されると思われるため，その特質を抽出する必要がある．したがって，まず，action proofの特質を抽出する準備として，action proofの概念を規定する．それから，action proofと形式的証明を対比しながらaction proofの特質を導出する（Ⅲ節）．続いて，action proofの特質の観点から形式的証明の発見の機能を検討することで，action proofの発見の機能を明らかにし，さらに指導への示唆を導出する（Ⅳ節）．

Ⅱ．action proofに関する先行研究

前述のように，action proofは，当初，子どもの発達に応じた証明として小学校段階を視野として提起された．その後，action proofは中学校の形式的証明の学習においても効果的に機能しうることが議論されてきた．さらに，本研究の焦点である発見の機能のように，action proofを通じた発展的な考察に言及する研究も見られる．そこで，以下では，action proofに関する先行研究をこれら三つに分けて概観する．

1．子どもの発達に応じた証明としてのaction proof

action proofの提唱者であるMorley（1973）は，それまでの証明指導を，証明を構成する能力に関して子どもをあまりにも無力のままにしてきたと，痛烈に批判している．そして，そのような現状の背景には，厳密さの基準が絶対的であるという誤った信念があり，子どもの発達に応じて証明には異なる水準があるという考えが拒否されていると主張する．つまり，彼は子どもの発達に応じて証明に異なった水準を認めるべきであると考えていたのである．

そして，Morleyは子どもの発達に応じた証明について，「幾何的な“代用物（substitutes）”は，ある段階では，数に関する仮説についての容認可能な証明であり，それらが一般化の本質を含む限り，有益に利用することができる」（Morley，1973，p.43）と述べている．さらに，彼はブロックやその図を用いて，ブロックで余りなくペアを作ることができるものとして偶数を，ペアを作るとブロックが一つ余るものとして奇数をそれぞれ表現している（図1左上図）．そして，奇数と偶数をそのように表現することは，例えば奇数と奇数の和は偶数であることについて，図1左下図のようなaction proofを与えると彼は述べている．また，別の例として，自然数の乗法の結合法則が成り立つことを示すために，単位立方体から直方体を構成して，その直方体における単位立方体の総数を異なった方法で数えることが挙げられている（図1右）．

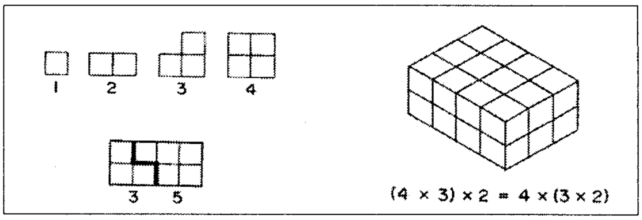


図1：Morley（1973）のaction proof（pp.43-44）

ここで，「代用物」という言葉やMorley自身の例からわかるように，数の性質に関する事柄が成り立つことを示すために，文字式の代わりに具体物や図を利用することをMorleyは想定していた．そして，「一般化の本質を含む限り」とあるように，具体物や図を用いた考察が，例えば図1左の場合で言えば，単なる3+5という個別の場合だけではなく，二つの奇数の和すべてに共通に適用できなければならないと考えていたのである．

その後，Semadeni（1984）は，自身が以前に「前数学的証明（premathematical proof）」という言葉で提唱していたものを，Morleyの言葉を参考にする形でaction proofとして再提案した．Semadeniがそのように再提案した理由は，前数学的証明に関する研究が深まる中で，「前数学的」という言葉が「数学的でない」という印象を与えるために不適切であるとの批判が生じたからであると思われる（國本，1992）．

さらに，SemadeniはPiagetの発達段階に関す

る研究（Piaget, 1953）に依拠して，小学校段階における証明としてaction proofを理論的に位置づけた．彼は「具体的操作期の子どもは仮説をおいて推論することや，言葉や記号を使って演繹的に推論することができない」(Semadeni, 1984, p.32)と述べる一方で，「事柄を正当化せずに学習することは機械的学習を招く」(Semadeni, 1983, p.98)と主張している．そこで，彼は言葉や記号ではなく具体物や図を用いた証明として，action proofを提案したのである．

加えて，Semadeni（1984）はaction proofは次の道筋から構成されるべきであると述べている．第一は，特別な特徴をもたない例を選び，その動作的または映像的表現を選択し，その例について事柄を確かめるために，ある特定の具体的で物理的な行為（例えば，物を動かす，絵を描く，体を動かす）を行うことである．第二は，他の例を選び，第一と同様の方法でその例について事柄を確かめることである．第三は，もはや物理的な行為が必要でないと感じたら，他の多くの場合にも同様の方法を適用できることがわかるまで，その行為を内的に行うことである．第四は，この方法が成り立つ範囲を決定することである．

もちろん，MorleyやSemadeniの以前から，このように事柄が成り立つことを具体物や図を用いて証明する方法は存在し，その歴史は少なくとも古代ギリシアから見られる（サボー，1976）．そして，学校数学においてもそのような証明は古くから行われてきたであろうことは容易に想像ができる．MorleyやSemadeniはそのような証明をaction proofと名づけ，子どもの発達段階に応じた証明を学校数学の場で実現することを意図したのである．

2．形式的証明の学習におけるaction proofの利用

MorleyやSemadeniがaction proofを提唱した後，形式的証明の学習の際にもaction proofを利用できることが議論されてきた．

例えば，宮崎（1995）は，action proofと形式的証明という言葉それ自体は用いていないものの，action proofから形式的証明を生成する過程について議論している．宮崎は形式的証明を学ぶ目的の中でも，事柄が成り立つ理由を示すことができるようになることに焦点を当てている．そして，形式的証明に至るまでに説明[2)]の水準を設け，その一つの水準にaction proofを位置づけている．さらに，その水準を順に移行することの意義を，前述の形式的証明を学ぶ目的の観点から議論するとともに，その水準を移行するために子どもに要請されることを指摘している．特にaction proofに関わる部分を挙げれば，action proofを生成するために，そして，action proofから言葉による証明を経て形式的証明を生成するために，子どもに要請されることが議論されている．

その一方で，Blum & Kirsch（1991）が，action proofを含むより広い証明の概念として，「前形式的証明（preformal proof）」を提唱した．その背景には，彼らが教室において数学の形式主義的な理解が蔓延している現状を悲しみ，前形式的なレベルで数学を行うことを求めていることがある．彼らは，前形式的証明について，「前形式的証明とは，正しいが形式的に表現されていない一連の推論であり，その一連の推論は，形式的ではないが妥当な前提に基づいている」（Blum & Kirsch, 1991, p.187）と述べている[3)]．そして，前形式的証明の例として，action proofの他に，「幾何的－直観的証明」と「現実に方向づけられた証明」が挙げられている．特に彼らはaction proofの概念を，「（狭義の）action proofとは，手短に言えば，具体的に与えられた範例的もしくは通有的な例(paradigmatic, generic examples）を伴った，ある具体的な行為から成っている（実際に行為が行われる，または，念頭で行われるのみである）」（同，p.187）と規定している．さらに，前形式的証明の例が提示され，その分析が行われている．

Blum & Kirschは，形式的証明の学習に直接的に前形式的証明を活かそうというよりも，むしろ，中学校以降においても前形式的証明それ自体に価値があるという立場に立っている．一方で，國本(1992)は，その前形式的証明が提案されるに至った研究の過程を，ドイツにおける試みを中心として整理している．さらに，國本（1996）はaction proofをBlum & Kirschと同様に捉えた上で，

action proofを含む前形式的証明が形式的証明の学習において果たす役割も考察している．より具体的には，前形式的証明には形式的証明の生成だけでなく，形式的証明の納得の役割もあることが指摘されている．

さらに，梅川（2002）によれば，証明の意義指導においてもaction proofは役割を果たす．梅川は証明の意義として，事柄が成り立つ理由を明らかにすることを挙げている．そして，中学三年生を対象として，経験的議論，action proof[4)]，形式的証明などの五つの説明の中から「一番よいと思う説明」を選択させ，その選択理由を記述させた．その結果，action proofを選択した生徒が4割弱であり，action proofを選択した子どもの多くが事柄の成り立つ理由を意識していた．梅川はその結果と自身の以前の調査結果とを比較検討し，action proofが証明の意義指導において，経験的議論と形式的証明とを接続する役割を担いうることを指摘している．

3．action proofを通じた発展的な考察

これまで見てきたように，action proofに関する従来の研究は，学校数学におけるaction proofの機能について，事柄が成り立つことを示す以外には，形式的証明の生成や形式的証明の意義の理解など，形式的証明の学習に役立つという観点から議論してきた．

もちろん，本研究の焦点である発見の機能のように，action proofを通じて新たな事柄を生成することに関して，全く言及されてこなかったわけではない．例えば，action proofの観点から算数教育における論理的思考力の育成を考察した坂本（1991）は，「action proofによって結果の正しさを主張するだけでなく，そこで用いられた推論を基にして，さらに発展的に考える必要がある」(p.89)と述べている[5)]．しかし，坂本はaction proofによる取り組みの過程の一つに発展的な考察を含めているものの，その可能性に言及しているにとどまっている．

このように，発見の機能という言葉を明示的に使用するにせよしないにせよ，action proofの発見の機能それ自体に関する基礎的な考察は，従来の研究では行われてこなかったのである．action proofの発見の機能を明らかにすることは，冒頭で述べた通り極めて重要な課題である．そこで，以下ではまずaction proofの特質を抽出し，その特質の観点からaction proofの発見の機能を明らかにする．

Ⅲ．action proofとその特質

action proofの特質を抽出するためには，action proofそのものの概念を明確に捉える必要がある．そのため，はじめにaction proofの概念を規定する．そして，その概念規定に基づいて，action proofと形式的証明を対比しながら，action proofの特質を抽出する．

1．action proofの概念規定

(1) 具体物に対する諸行為

action proofに関する先行研究は，具体物を用いることだけでなく図を描くことの一部もaction proofに含めている．その一方で，具体物を用いた説明について議論している宮崎（1995）によれば，具体物の方が図よりも変形しやすく，変形および変形の過程を表すことも容易である．そこで，本研究でも具体物を用いることにaction proofを限定する．

さらに，宮崎（1995）は，具体物を用いた説明の過程では，「具体物の変形」と「具体物への見方の変更」を手がかりとして推論が展開されていると述べ，これら二つをまとめて「具体物に対する諸行為」と呼んでいる．例えば，図1のaction proofについて具体物に対する諸行為の過程をさらに細かく分析すると，その過程の一部には図2の過程が含まれている．

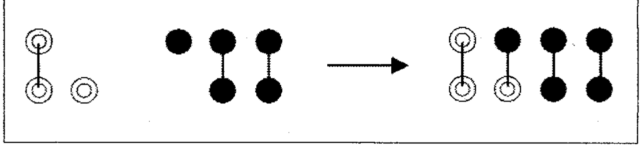


図2：具体物に対する諸行為の過程の一部

図2では，左図から右図にかけて，おはじきの配列を変形することによって，おはじきのペアが生成されている．しかし，そのおはじきの配列の

変形の前には，その変形を示唆する具体物への見方の変更が行われている．すなわち，「3を表すおはじきと5を表すおはじきを別々に見る」という状態から離れて，「それぞれでおはじきが1つずつ余っている」ということに着目することである．このようにおはじきの配列に対して見方を変えることによって，図2左図から右図への具体物の変形が行われるのである．

(2) 具体物に対する諸行為の内面化

具体物を用いて何か一般的なことを主張しようとしても，具体物の特性上，図2の3+5のように，ある個別の場合しか表現することができない．したがって，まずは，ある個別の場合における具体物に対する諸行為を，他のどの場合にも共通して適用できることを見つけなければならない．このことは具体物に対する諸行為の内面化に該当し，Piaget (1953) はこの内面化について，「行為の本質的特徴 (original character) を失うことなく思考の中で行われる」(p.8) と述べている．そこで，本研究では，「他のどの場合にも共通して適用できる具体物に対する諸行為の特徴」を「具体物に対する諸行為の本質的特徴」と呼ぶこととする．

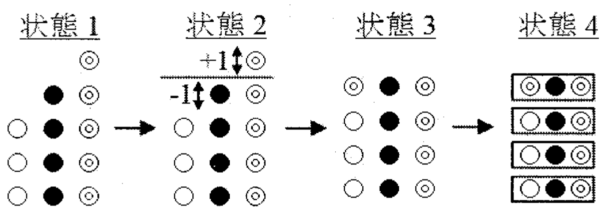
さらに，action proof に限らず一般に証明は事柄の成り立つことを示すことであるから，その具体物に対する諸行為の本質的特徴を提示する必要もある．だが，その際にも，具体物はある個別の場合しか表現できないという制約がある．ゆえに，action proof では，ある個別の場合を，ある一般を代表する個別の場合，すなわち「代表的特殊の場合 (a representative special case)」(Polya, 1954) として解釈する必要がある．そして，その代表的特殊の場合を通じて，具体物に対する諸行為の本質的特徴を示さなければならないのである．このことは，Morley が「一般化の本質を含む限り」という言葉で，また，その他の先行研究が範例的または通有的な例という言葉で意図したことでもある．

例えば，図2に関して言えば，複数の場合を考察する中で，「余ったおはじき同士で新たにペアを構成できる」という具体物に対する諸行為の本質的特徴を捉える必要がある．そして，3+5を代表的特殊の場合と見なし，その場合を通じて，その本質的特徴を示さなければならないのである．

(3) action proof の概念規定

本研究では，(1)と(2)の分析に基づき，action proof の概念を「ある個別の場合を代表的特殊の場合として解釈し，その代表的特殊の場合を通じて具体物に対する諸行為の本質的特徴を提示することによって，事柄が成り立つことを演繹的に示すこと」と規定する[6)]．

例えば，事柄A「連続する3つの自然数の和は3の倍数になる」に対して，おはじきを用いた図3の action proof がある．



3+4+5は連続する3つの自然数であるから，3は4よりも1だけ小さく，5は4よりも1だけ大きい．そのため，5を表すおはじきの1個を，3を表すおはじきの方へ移せば，おはじき3つの組を作ることができる．よって，3+4+5は3の倍数になる．他のすべての場合についても，連続する3つの自然数では，真ん中の数のおはじきに比べて，小さな数のおはじきは1つだけ少なく，大きな数のおはじきは1つだけ多いから，大きな数のおはじきの1個を，小さな数のおはじきの方へ移せば，おはじき3つの組を作ることができる．よって，この事柄は成り立つ．

図3：事柄Aに対する action proof

図3の状態1から状態2にかけては，真ん中のおはじきに比べて，小さな数のおはじきが1つだけ少なく，大きな数のおはじきが1つだけ多いという見方に変更している．そして，状態2から状態3にかけて，そのような見方の変更に基づいて，大きな数のおはじきの1個を，小さな数のおはじきの方へ移動している（具体物の変形）．それに加えて，ここでは3+4+5という個別の場合を連続する3つの自然数の和の「代表的特殊の場合」と見なしている．そして，その3+4+5を通じて，図1の「連続する3つの自然数では（中略），おはじき3つの組を作ることができる」という，具体物に対する諸行為の本質的特徴が提示されているのである．

2．action proofの特質

action proofに対して，一般に形式的証明は，既に正しいと認められている事柄に基づいて，数学的な記号や文字を用いて，事柄が成り立つことを演繹的に示すことである．例えば，事柄Aに対する形式的証明として図4のものが挙げられる．

> 最初の自然数をnとすると，連続する3つの自然数はn，n+1，n+2と表すことができる．このとき，n+(n+1)+(n+2)=3k（kは自然数）を示せばよい．左辺を計算すると，次の通りである．
>
> $$\begin{aligned} & n+(n+1)+(n+2) \\ =\ & n+n+1+n+2 \\ =\ & n+n+n+1+2 \\ =\ & 3n+3 \\ =\ & 3(n+1) \end{aligned}$$
>
> n+1は自然数であるから，3(n+1)は3の倍数を表す．よって，連続する3つの自然数の和は3の倍数になる．

図4：事柄Aに対する形式的証明

この形式的証明は，連続する3つの自然数をn，n+1，n+2と表すなど，数学的な記号や文字を用いて記述されている．また，文字式の同値変形の部分が演繹的な推論に該当し，その基になる一般的な事柄には，根拠としての明示的な意識の有無は別として，交換，結合，分配法則がある．

action proofと形式的証明を対比しながらaction proofの概念規定を検討すると，action proofの特質として次の三つを抽出することができる．第一は具体物の利用に関することである．すなわち，action proofでは具体物を，形式的証明では主に数学的な記号や文字をそれぞれ用いる．例えば，図3のaction proofでは，連続する3つの自然数をおはじきで表し，そのおはじきに対する見方を変えたり，そのおはじきを動かしたりすることが行われる．それに対して，図4の形式的証明では，連続する3つの自然数をn，n+1，n+2と表現して，文字式の同値変形を行う．このようにaction proofでは具体物を用いることを，action proofの「具象性」と呼ぶことにする．

第二は具体物に対する諸行為に関わるものである．action proofでは，具体物に対するある見方に基づいて具体物の動的な変形を行うことで，事柄が成り立つことを示す．それに対して，形式的証明では，事柄が成り立つことを示す際，数学的な記号や文字を用いて演繹的な推論を表現する．例えば，図3のaction proofでは，状態1から状態2にかけて，真ん中の数のおはじきを基準とした見方に変更する．そして，その見方に基づいて，状態2から状態3にかけて，大きな数のおはじきの1個を，小さな数のおはじきの方へ移動する．一方，事柄Aの形式的証明が一度記述されれば，例えば文字「3(n+1)」を上下左右に動かすことは行われない．このように，action proofでは，具体物に対するある見方に基づいて具体物の動的な変形を行う．このことを，action proofの「可動性」と呼ぶこととする．

第三は具体物に対する諸行為の本質的特徴，及び代表的特殊の場合に関することである．具体物を用いた場合，ある個別の場合しか表現できないため，action proofでは，具体物に対する諸行為の本質的特徴を捉える必要がある．そして，ある個別の場合を代表的特殊の場合と見なして，その場合を通じて，具体物に対する諸行為の本質的特徴を提示する．一方，形式的証明では，事柄の条件で述べられている範囲すべてを表現するために，数学的な記号や文字を用いる．例えば，図3のaction proofでは，3+4+5を連続する3つの自然数の和すべてを代表する個別の場合と見なして，図3に示すように，具体物に対する諸行為の本質的特徴を提示する．それに対して，図4の形式的証明では，文字nを変数として捉え，連続する3つの自然数をすべてn，n+1，n+2の形で表現できると見なす．そして，文字式の同値変形を行い，その文字式の同値変形も連続する3つの自然数の和すべてに適用できると考える．このように，action proofでは，具体物に対する諸行為の本質的特徴を捉えた上で，ある個別の場合を代表的特殊の場合と見なし，その場合を通じて，具体物に対する諸行為の本質的特徴を提示する．このことを本研究ではaction proofの「通有性」と呼ぶことにする[7)]．

以上より，action proofには具象性，可動性，通有性の三つの特質があることが確認された．ただし，これら三つの特質は相互に関連しており，また，どれか一つだけでaction proofの特質になりえるものではない．例えば，何か物を動かしてい

るだけでその物と考察対象の事柄との関係が意識されておらず，また，ある個別の場合に限定した動かし方になっていては，それはaction proofではない．さらに，通有性は，action proofだけでなく，例えばBlum & Kirsch (1991) の前形式的証明など他の証明も備えている性質である．

Ⅳ．action proofの発見の機能

action proofの発見の機能を検討する前に，まず，本研究において「機能」という言葉そのものをどのように捉えるのかを明確にしておく必要がある．

機能とは「物のはたらき．相互に連関し合って全体を構成している各要素や部分が有する固有な役割．また，その役割を果たすこと」(新村，2008，p.695) である．ここで，学校数学の場合，ある物事の機能と言えば，その物事だけでなく，その物事の使用者である子どもや教師などの人間も当然想定される．例えば，「言葉の機能」として「コミュニケーション」があったとする．このとき，この機能は，言葉それ自体にコミュニケーションの機能があるだけでなく，人間が言葉を活用してコミュニケーションを行うことができることを意味していよう．したがって，本研究では，ある物事の機能を，人間から切り離された純粋に物事に備わっている働きではなく，人間がその物事を活用して何ができるのかを意味しているものと捉える．

さらに，本研究においてaction proofの機能と言った場合，それは，構成されたaction proofを活用して人間が何を行うことができるのかだけを意味しない．より広義に，action proofを構想したり構成したりする過程において何が可能になるのかもaction proofの機能に含めることとする．

以下では，まず形式的証明の発見の機能の意味を確認する．そして，action proofの特質の観点からその発見の機能を検討することにより，action proofの発見の機能を明らかにする．

1．形式的証明の発見の機能

de Villiers (1990) によれば，形式的証明の発見 (discovery) の機能とは，「新しい結果を発見または発明」(p.18) できることである．de Villiersはこの「新しい結果」が何を意味するのかを明示的には述べていないが，その機能を次のように例証している．まず，「凧形の各辺の中点を順に結んでできる四角形は長方形である」という事柄に対して，図５の形式的証明を構成したとする．この証明から，対角線が互いに直交するという条件が決定的な影響を与えており，等辺に関する条件は不要であることがわかる．したがって，等辺に関する性質を条件から除くことによって，より一般的な事柄「対角線が直交する四角形について，その各辺の中点を順に結んでできる四角形は長方形である」を生成することができる．

凧形ABCDの各辺の中点を順にE，F，G，Hとし，四角形EFGHが長方形になることを示す．中点連結定理より
AC∥EF∥HG，BD∥EH∥FG
が成り立つ．
よって，２組の対辺が平行であるから，四角形EFGHは平行四辺形である．さらに，対角線AC，BDの交点をIとすると，
凧形の性質より∠AIB＝∠Rである．
よって，平行線の性質より∠FEH＝∠Rであり，同様に∠EFG＝∠FGH＝∠GHE＝∠Rである．
よって，四角形EFGHは長方形になる．

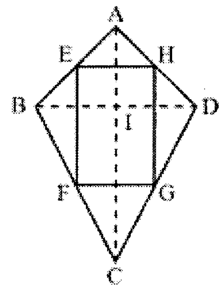


図５：凧形の性質に関する事柄の形式的証明

したがって，発見の機能の「新しい結果」とは「新たな事柄」を意味する[8)]．そして，その新たな事柄の生成の出発点は，既有の形式的証明を振り返ることにある．そこで，本研究では，形式的証明の発見の機能を，「人が既有の形式的証明を振り返ることによって，新たな事柄を生成することができる」と捉える．

ここで，形式的証明を振り返って新たな事柄を生成する方法には少なくとも次の二つがある[9)]．第一に，図５の証明に関わって述べたように，まず，事柄が成り立つことに事柄の条件がどのように関わっているのかを形式的証明から明らかにする．そして，その関わりに不要な条件を捉えて除いたり，その関わりを意識しながら形式的証明を考察したりすることで，新たな事柄を生成することである (宮崎，2002；杉山，1986)．これは従来の形式的証明の機能に関する研究 (例えば，de Villiers，1990) において，説明の機能を前提とし

た発見の機能として議論されているものである.

第二は，形式的証明の過程で見つけたことを新たな観点から検討することで，新たな事柄を生成することである．例えば，図4の形式的証明では n+(n+1)+(n+2)を3(n+1)へと変形する．そして，「和が3の倍数である」という事柄Aが成り立つことを示すために，この3(n+1)を3の倍数を表すものとして解釈する．だが，「和が3の倍数である」ということから離れて3(n+1)それ自体を解釈すると，n+1が真ん中の自然数であることから，3(n+1)が真ん中の自然数の3倍であることも表していることがわかる．それによって，「連続する3つの自然数の和は真ん中の数の3倍である」という事柄を新たに生成することができる.

したがって，以下では上記二つをaction proofの特質の観点から考察する.

2．action proofの発見の機能

(1) 事柄の成立と事柄の条件との関わりの把握に基づく新たな事柄の生成

形式的証明では，前述のように，まず，事柄が成り立つことに事柄の条件がどのように関わっているのかをその形式的証明から明らかにする必要がある．一方，action proofでは，通有性という特質があるように，事柄が成り立つことを示すために，具体物に対する諸行為の本質的特徴を捉える．さらに，事柄の成立と事柄の条件との関わりは，その具体物に対する諸行為が他のどの場合にも適用できる理由に表れている．よって，action proofでは，具体物に対する諸行為の本質的特徴だけでなく，その具体物に対する諸行為がなぜ他のどの場合にも適用できるのかという理由を捉えることが必要となる.

例えば，事柄Aに対するaction proofでは，事柄Aが成り立つことを示すために，図3の「連続する3つの自然数では（中略），おはじき3つの組を作ることができる」という具体物に対する諸行為の本質的特徴を捉える．この具体物に対する諸行為の本質的特徴の一部に，「真ん中の数のおはじきに比べて，小さな数のおはじきは1つだけ少なく，大きな数のおはじきは1つだけ多い」という具体物に対する見方がある．そして，この具体物に対する見方が常に可能である理由を探ると，その理由は事柄Aが連続する3つの自然数の性質に関するものだからであることがわかる．言い換えれば，事柄Aに「3つの自然数が連続している」という条件があるためである．このように考察を進めることにより，事柄Aの「3つの自然数が連続している」という条件と，事柄Aが成り立つこととの関わりを明らかにすることができる.

続いて，形式的証明では，事柄の成立と事柄の条件との関わりを明らかにした後に，その関わりに不要な条件を捉えて除いたり，その関わりを意識しながら形式的証明を考察したりすることで，新たな事柄を生成することができる．一方，action proofでは，具象性という特質が示すように，事柄の条件に限らず事柄全体を具体物で表現する．そして，可動性という特質があるように，その事柄が成り立つことの証明は具体物に対する諸行為によって示される．したがって，ある具体物に対する諸行為がなぜ他のどの場合にも適用できるのかという理由を捉えた後に，新たな観点から具体物を見てその関わりに不要な部分を捉えて除いたり，その関わりを意識しながら具体物に対する諸行為の過程を考察したりする必要がある．しかし，そのままでは，action proofの具象性という特質ゆえに，あくまでも具体物の世界で成り立つことを発見したに過ぎない．したがって，さらにその見つけたことの意味を解釈することによって，新たな事柄を生成することが可能になる.

例えば，事柄Aの成立と「3つの自然数が連続している」という条件との関わりを，前述のように捉えたとする．ここで，おはじき3つの組を作るためには，真ん中の数のおはじきと他の二つのおはじきが等しい分だけ異なればよく，必ずしも1つだけ異なっている必要はない．つまり，3つの自然数の階差が等しければ，その和は同様に3の倍数になる．このように，事柄Aのaction proofを振り返り，新たな観点からおはじきを見ることで，「階差が2である3つの自然数の和は3の倍数である」という事柄や，さらに一般的な事柄「階差がkである3つの自然数の和は3の倍数である」を生成し，その特殊として事柄Aを位置づけることが可能になる（図6）.

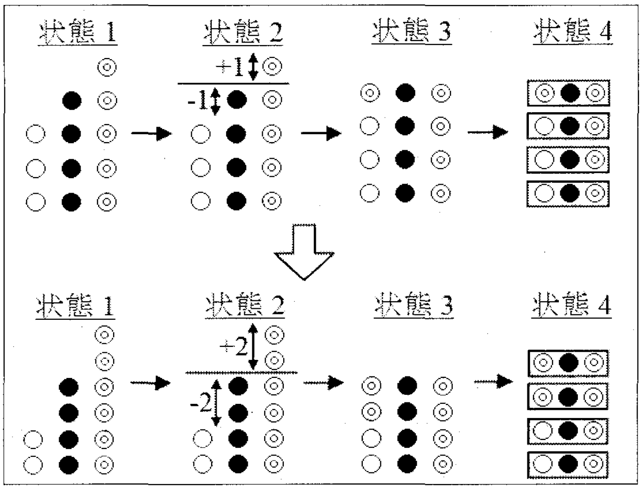


図6：action proof の振り返りによる新たな事柄の生成①

このように，まず，事柄の成立と事柄の条件との関わりを明らかにするために，具体物に対する諸行為の本質的特徴だけでなく，その具体物に対する諸行為がなぜ他のどの場合にも適用できるのかという理由を捉える．そして，その理由を捉えた後に，新たな観点から具体物を見てその関わりに不要な部分を捉えて除いたり，その関わりを意識しながら具体物に対する諸行為の過程を考察したりする．それから，具体物の世界で成り立つことの意味を解釈することによって，新たな事柄を生成することが可能になる．

(2)　**証明の過程で見出したことの検討に基づく新たな事柄の生成**

形式的証明では，前述のように，その過程で見つけたことを新たな観点から検討することにより，新たな事柄を生成することができる．このとき，既有の事柄とは別の事柄を生成するためには，既有の事柄には制限されない観点から形式的証明を考察する必要がある．

一方，action proof には，具象性や可動性という特質があるように，事柄が成り立つことを示すために，事柄を具体物で表現して具体物に対する諸行為を行う．したがって，既有の事柄とは別の事柄を生成するためには，既有の事柄には制限されない新たな観点から，具体物への見方の変更を行う必要がある．そして，その見方の変更に基づいて，必要に応じて具体物に対する諸行為を調整する必要がある．さらに，同様に，具体物の世界で成り立つことを発見した後に，その見つけたことの意味を解釈することにより，新たな事柄を生成することが可能になる．

例えば，図3の action proof では，「和は3の倍数である」という事柄Aが成り立つことを示すために，おはじき3つの組を構成した．ここで，「和は3の倍数である」ということから離れて図3の状態4を見ると，おはじき3つの組は4組あり，その4は真ん中の自然数を表していることに気づく．したがって，その状態4において，横の並びから縦の並びへとおはじきの見方を変更し，その見方の変更に基づいておはじきの組を構成すると，真ん中の自然数を表すおはじきを3組作ることができる．そして，そのことの意味を検討することで，「連続する3つの自然数の和は真ん中の数の3倍になる」という新たな事柄を生成することができる．そして，「真ん中のおはじきに合わせて組を作る」という新たな観点から，状態1から状態2にかけておはじきの見方を変えることや，状態2から状態3にかけておはじきを1つ動かすことの意味も見直される（図7）．加えて，この「真ん中のおはじきに合わせて組を作る」という新たな観点は，さらに「連続する(2k+1)個の自然数の和は，真ん中の自然数の(2k+1)倍になる」を生成し，その特殊としてこれまで生成した事柄を位置づけることにもつながる．

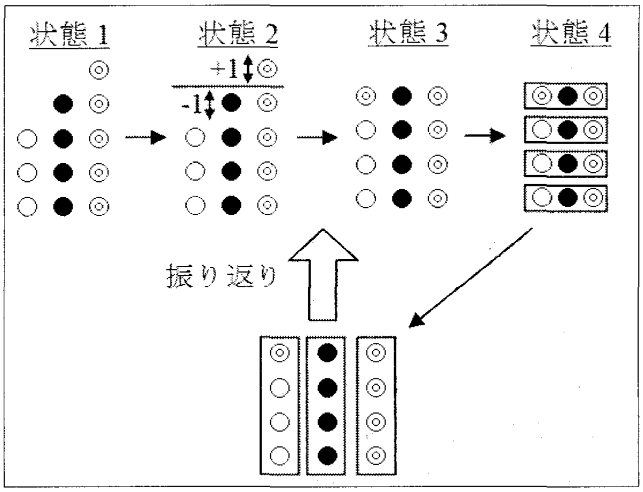


図7：action proof の振り返りによる新たな事柄の生成②

このように，既有の事柄には制限されない新たな観点から具体物への見方の変更を行い，その見

方の変更に基づいて，必要に応じて具体物に対する諸行為を調整する．そして，同様に具体物の世界で成り立つことの意味を解釈することによって，新たな事柄を生成することができる．

(3) 指導への示唆

(1)と(2)において，action proofにも発見の機能があることを，action proofの特質の観点から指摘した．一方，このaction proofの特質に基づいてaction proofの機能について議論することから，数学の教授・学習について示唆を得ることも可能である．例えば，action proofを通じて新たな事柄を生成する際は，いずれの場合も，具体物に対する諸行為の過程を振り返ることが必要とされる．しかし，action proofには可動性という特質があるように，具体物に対する諸行為の過程は形として残らない．それゆえ，具体物に対する諸行為の過程を振り返ることが，子どもにとって困難になる場合もあると予想されるのである．その場合に求められる教師の対応の一つとしては，具体物に対する諸行為の過程を図示して残すよう子どもに求めることが考えられるだろう．

また，具象性という特質から明らかなように，action proofでは具体物を用いて考察を進めることになる．このことから，子どもがその後に生成する新たな事柄の内容が制限されてしまうかもしれない．例えば，中学校段階を想定したとき，事柄Aのaction proof（図3）ではおはじきを用いるため，その後の考察の範囲も自然数に限定されがちであろう．言い換えれば，負の整数も表すものとしておはじきを見ることは，多くの子どもにとって困難であると予想されるのである．一方，事柄Aの形式的証明（図4）では，nが自然数であるという条件を用いていないため，その証明を整数一般の場合にも同様に適用することで，より一般的な事柄を生成することができる．

このことは形式的証明とaction proofの優劣を一般的に示すものではない．例えば，事柄Aの形式的証明において，事柄の成立と事柄の条件との関わりは，文字式の同値変形の部分で示されている．だが，この文字式の同値変形は機械的に進められるため（石谷，1957），その関わりを捉えることは子どもにとって容易ではないと推測される．その一方で，事柄Aのaction proofでは，事柄の条件は具体物の配列によって，その条件と事柄の成立との関わりは具体物に対する諸行為の過程によって，それぞれ視覚化されることになる．それゆえ，より一般的な事柄「階差がkである3つの自然数の和は3の倍数である」の生成については，action proofを活用した場合の方がより容易になると予想されるのである．したがって，とりわけ中学校数学では，action proofと形式的証明を相互に活用して新たな事柄を生成する学習を取り入れるべきであろう．

V．研究のまとめと今後の課題

本研究の目的はaction proofの発見の機能を明らかにすることであった．この目的を達成するために，まずaction proofに関する先行研究を概観し，これまでaction proofの発見の機能が検討されてこなかったことを確認した．次に，具体物に対する諸行為，具体物に対する諸行為の本質的特徴，及び代表的特殊の場合という三つの観点からaction proofの概念を規定した．さらに，その概念規定に基づいて，action proofと形式的証明を対比しながら，action proofの特質として具象性，可動性，通有性を指摘した．そして，action proofの特質の観点から形式的証明の発見の機能を考察することによって，action proofの発見の機能として次の二つを指摘し，さらに指導への示唆を導出した．

(1) まず，事柄の成立と事柄の条件との関わりを明らかにするために，具体物に対する諸行為の本質的特徴だけでなく，その具体物に対する諸行為がなぜ他のどの場合にも適用できるのかという理由を捉える．そして，その理由を捉えた後に，新たな観点から具体物を見てその関わりに不要な部分を捉えて除いたり，その関わりを意識しながら具体物に対する諸行為の過程を考察したりする．それから，具体物の世界で成り立つことの意味を解釈することによって，新たな事柄を生成することが可能になる．

(2) 既有の事柄には制限されない新たな観点から具体物への見方の変更を行い，その見方の変更に基づいて，必要に応じて具体物に対する諸行

為を調整する．そして，同様に具体物の世界で成り立つことの意味を解釈することによって，新たな事柄を生成することができる．

このaction proofは，当初，小学生にも学習可能な証明として，主にある事柄が成り立つことを立証する手段として提唱された．それに対して，本研究では，従来は形式的証明について議論されてきた発見の機能が，action proofにも備わっていることを具体的に示した．それゆえ，本研究の成果から，既有の事柄に対するaction proofを通じて新たな事柄を生成するような創造的な学習活動が，小学校段階から実現することができるようになると期待される．

今後は，子どもがaction proofを通じて新たな事柄をどのように生成するかや，我々教師はそのような子どもの取り組みをどのようにしたら促進することができるかなど，実践的な検討が必要とされる．一方で，action proofの特質は，action proofの発見の機能だけでなく，その機能の限界にも影響を与えると思われる．そのため，その機能の限界も明らかにする必要がある．さらに，冒頭で触れたように，形式的証明には多様な機能がある．したがって，発見の機能の他にもaction proofの機能を検討することが今後の課題として残されている．

謝　辞

本稿の作成にあたって貴重なご批評をいただいた査読者の方々に深謝申し上げます．

注

1）本研究では，証明の意味をより広義に，「既に正しいと認められている事柄に基づいて，ある事柄が成り立つことを演繹的に示すこと」と捉える．そして，演繹的な推論の厳密さ，根拠として用いられる事柄の内容，演繹的な推論の表現様式などに応じて，action proofや後述の形式的証明など，証明には様々な種類があるという立場に本研究は立つ．一方，日本の学校数学において中学二年生から「証明」という名で学び始めるものを，本研究では「形式的証明（formal proof）」と呼ぶことにする．

2）ここでの説明の意味は，形式的証明の説明の機能とは異なる．詳細は宮崎（1995）を参照されたい．

3）Blum & Kirsch（1991）は，さらに前形式的証明が満たすべき条件について，「一連の推論は，具体的な場合から，直接，一般化されることができなければいけない」と，「一連の推論は，形式化されるなら，正しい形式的数学的な議論に対応していなければならない」（p.187）と述べている．これらの条件はSemadeni（1984）もaction proofについて述べている．

4）梅川（2002）は，「action proofを，Sema‘deni（1984）の定義に基づき，‘証明のアイデアを含む操作的証明’と捉え（る）」（p.70，丸括弧は引用者による）と述べている．

5）坂本（1991）は，action proofの概念を，actionとproofに分けてそれぞれを分析した上で，「必ずしも厳密な数学的証明ではなく，命題が成り立つ根拠を具体的な操作活動を基にして，自分なりに納得し，相手を説得するためのproof strategy」（p.89）と規定している．

6）これはaction proofそのものの概念規定であり，具体物に対する諸行為の本質的特徴を捉えることなど，action proofを見出す過程までをも含めたものになってはいない．なお，Semadeni（1984）とBlum & Kirsch（1991）は，前述のように，action proofにおける一連の推論は，形式化された場合に，正しい形式的数学的な議論に対応していなければならないと述べている．しかし，子どもがaction proofを行っている場合，その子どもが形式的証明をまだ知らない状況にいることも多いだろう．それゆえ，Semadeniらが述べていることをaction proofの概念規定に含めた場合，子どもが未知の形式的証明の観点から，action proofの正否を判断しなければならない問題が生じる．実際，この矛盾はBlum & Kirschによっても指摘されている．そのため，本研究では，Semadeniらのこの主張をaction proofの概念規定には含めない．

7）通有性とは「特有でなく，一般の人・物に共通してある性質」（新村，2008，p.1856）である．通有性の英語はgenericityであり，Mason

& Pimm (1984) によれば,「通有的な例 (generic example)」は, 実際には一つの例であるが, 一般性を運ぶことが意図されたものである.

8) 宮崎 (2002) はこの「結果」の意味をより広義に解釈し, 新たな事柄とその証明だけでなく, 暗黙の前提を顕在化することや, 既有の概念を新たな概念に精緻化することなども挙げている.

9) 本稿では, 形式的証明を振り返って新たな事柄を生成する方法を二つに分けて取り上げるが, それは議論の都合上のことであり, とりわけ実際の数学の教授・学習場面では, それら二つは明示的には分けられるものではないだろう. このことは以下のaction proofについても同様である.

引用・参考文献

Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics, 22*(2), 183-203.

de Villiers, M.D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp.877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

石谷茂 (1957). *図形と論証.* 大阪：啓林館.

國本景亀 (1992). 前形式的証明とその教育的意義：証明の社会学的見方に関連して. *高知大学学術研究報告社会科学, 41*, 1-15.

國本景亀 (1996). *空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善* (平成6～7年度文部省科学研究費補助金一般研究(C)研究成果報告書, 課題番号 06680256).

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic example: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277-289.

宮崎樹夫 (1993). 学校数学における証明の意義に関する考察：証明の機能に焦点を当てて. *筑波大学教育学系論集, 18*(1), 155-169.

宮崎樹夫 (1995). *学校数学における証明に関する研究：証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して.* 博士学位請求論文, 筑波大学.

宮崎樹夫 (2002). 中学校数学において, 生徒が証明の発見機能を活用するための諸条件に関する研究. *科学教育研究, 26*(5), 358-369.

Morley, A. (1967). Changes in primary school mathematics. *Mathematics Teaching, 41*, 20-24.

Morley, A. (1973). Mathematics as "process". *Mathematics Teacher, 66*(1), 39-45.

新村出(編)(2008). *広辞苑第6版.* 東京：岩波書店.

Piaget, J. (1953). *Logic and Psychology* (W. Mays & F. Whitehead, Trans.). Manchester: Manchester University Press.

Polya, G. (1954). *Induction and Analogy in Mathematics (Mathematics and Plausible Reasoning, Vol. 1).* Princeton, NJ: Princeton University Press.

サボー, A.K. (1976). *数学のあけぼの* (伊藤俊太郎, 中村幸四郎, 村田全訳). 東京：東京図書.

坂本美知夫 (1991). 論理的思考力を育成する算数指導：action proofを視座として. *数学教育研究, 6*, 85-94.

Semadeni, Z. (1983). Integration of content and pedagogy in pre-service training of mathematics teachers. In M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak, & M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp.96-98). Boston: Birkhäuser.

Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics, 4*(1), 32-34.

杉山吉茂 (1986). *公理的方法に基づく算数・数学の学習指導.* 東京：東洋館出版社.

梅川貢司 (2002). 数学教育における証明の意義指導に関する基礎的研究：Action Proofを選択肢に取り入れた証明の意義理解調査から. *上越数学教育研究, 17*, 67-78.

A Study on Function of "Action Proof" in School Mathematics :

Focusing on Discovery

Kotaro KOMATSU

(Abstract)

The previous studies on "action proof" have discussed its function in the context of verifying statements or learning formal proof. However, there are any other functions of proof in mathematics than verification: explanation, systematization, discovery and communication. The purpose of this study is, however, to clarify discovery function of action proof in school mathematics among all. The reason why this study selects its discovery function is that we could achieve many productive learning activities in even primary school mathematics.

Firstly, this study reviews and summarizes the previous studies on action proof and then points out that they have not discussed discovery function of action proof. Next, this study defines the concept of action proof in terms of actions on manipulative objects, the original character of the actions and a representative special case. According to this definition and to comparison between action proof and formal proof, this study points out "embodiment", "movability" and "genericity" as the characteristic properties of action proof. After that, through examining discovery function of formal proof in terms of the characteristic properties of action proof, this study clarifies two kinds of discovery function of action proof, as follows.

First, in order to clarify relation between the conditions of the statement and a truth of the statement, one has to grasp not only the original character of actions on manipulative objects but also the reason why the actions can be applied to all cases of the statement; after grasping the reason, one must notice and eliminate unnecessary parts for the relation or examine the process of actions on manipulative objects with consciousness of the relation; then by interpreting facts on manipulative objects which one finds out, one can produce new statements. Second, one has to view manipulative objects from new viewpoints which are not limited to the given statement and then, if necessary, organize the actions on manipulative objects; then by interpreting facts on manipulative objects which one finds out, one can produce new statements.