大規模共通試験において
数学の証明問題を出題するための検討

平井　佑樹

キーワード：大規模共通試験　数学証明問題　中等教育　自動採点　採点支援

大規模共通試験，学内期末試験などの試験で，受験者の深い理解を問う記述式問題の提示は重要である．そのため，文部科学省の高大接続システム改革会議等では，大学入学希望者学力評価テスト（仮称）などの大規模共通試験において記述式問題を導入することを検討している．同会議では，コンピュータ上で実施する試験（CBT）の実現可能性も検討している．しかし，数学では，本論文で対象とする証明問題を含む「問題解決プロセス全体の表現」に関する問題作成は現状除外されていると言える．
中学校・高等学校に関する次期学習指導要領への改訂においては，探究活動に関する科目や単元の導入が検討されており，この活動には前述の「問題解決プロセス全体の表現」が含まれている．このことから，大規模共通試験においても，数学の証明問題を提示し，生徒の探究活動の成果を評価できることが望ましい．本論文では中学校・高等学校の数学証明問題を対象とし，「大規模共通試験において数学の証明問題を出題するためには現状何が問題なのか」，「その問題を解決するにはどのような研究・実践が必要か」の2点について検討する．

1．はじめに

平成28年8月31日付で文部科学省は高大接続改革の進捗状況に関する情報[1]を掲載し，高等学校基礎学力テストや大学入学希望者学力評価テスト（どちらも仮称．以下，両者を含め，数十万人が同じ問題を同じ時間帯に解答する試験を大規模共通試験と呼ぶ）などの実施に向けた検討事項を掲載した．そこでは，受験者の到達度や学力を評価する場合，学力の3要素[1]の1つである「思考力・判断力・表現力等」の評価がより重要になりつつあるものの，現状では課題が多くあることを述べている．大規模共通試験については記述式問題の導入，マークシート式問題の改善，CBT (Computer-Based Testing)の導入などに関する意義や検討の経緯を記載している．

また，記述式問題で評価すべき能力や作問の構造（素案）についても述べている．数学では，選択式・記述式問題と，生徒が解答する際の思考プロセスが整理されており，(1) 一定の手順にしたがって数学的に処理すること，(2) 問題を焦点化して数式，

図表，グラフなどで表現すること，(3) 問題解決学習の方略を表現すること，(4) 数学における問題解決のプロセス全体を表現することの4つとの関連が述べられている．これまでの大規模共通試験では，上記(1)を問うことが多く，今後は(2)や(3)を問うことを想定している．つまり，数学の証明問題が含まれる上記(4)は，現在のところ出題範囲から除外されている．

文部科学省の中央教育審議会[2]によれば，中学校・高等学校に関わる次期学習指導要領において，数学や科学に関連する探究活動の導入を検討している．これには上記(4)も含まれている．しかし，現状の大規模共通試験で上記(4)を評価することは難しい．そこで本論文では，中学校・高等学校で扱う数学の証明問題を試験で出題して，上記(4)を評価することを想定し，「大規模共通試験において数学の証明問題を出題するためには現状何が問題なのか（以下，検討項目1）」，「その問題を解決するにはどのような研究・実践が必要か（以下，検討項目2）」の2点について検討する．

当然ながら，現状と比較して，(1) 採点にかける時間を増やす，(2) 採点者数を増やす，(3) 採点に必要な費用を増やす，の3点などが行えれば，現状の一般入試前期日程や同後期日程等で出題される記述式問題を大規模共通試験でも出題できる．本論文では，前提としてこれらのようなコストをできるだけかけずに，大規模共通試験において数学の証明問題を出題するための検討を行う．

以下，本論文の構成は次のとおりである．2章から4章では，検討項目1，2について検討を行うための既存の知見を提供する．具体的に2章では，検討項目1に関連して現在実施されている試験や出題形式とそれらの特徴を述べる．3章では，検討項目1に関連して中学校・高等学校の数学教育で扱われる証明問題の種類とその特徴を述べる．4章では，検討項目2に関して生徒が証明問題を解くことに対する，紙媒体による支援，および電子媒体による支援について述べる．4章までに述べた知見を踏まえ，5章では，検討項目1，2について筆者の見解を述べる．6章では，本論文をまとめる．

2．試験と出題形式

本章では，現在実施されている試験やその出題形式とそれらの特徴について述べる．

2．1．試験の種類とその特徴

試験には，大規模共通試験，各種入学試験，各種資格試験，模擬試験，学校内の定期試験，授業中の小テスト，家庭内の自習（生徒自身で問題を選択して解答し答え合わせするもの）など多種多様の試験がある．伊藤[3]によれば，それらは大きく大規模テストと小規模テストに分類できる（表1）．表1では日本語教育に関してそれらの違いを示しているものの，数学教育に置き換えて見ることもできる．

大規模テストは不特定多数の受験者を対象とし，不特定多数の場所で実施される．出題範囲は広く，多くの受験生が受験することから利害関係が大きい試験である．本節冒頭で挙げた試験の中では，大規模共通試験，各種入学試験，各種資格試験，模擬

表 1　大規模テストと小規模テストの違い（[3]で示されている表を一部改変）

	大規模テスト	小規模テスト
テスト例	・日本語能力試験 ・日本留学試験 ・BJT ビジネス日本語能力テスト ・J.TEST 実用日本語検定	・教師作成テスト ・教育機関作成テスト （中間試験・期末試験など）
受験者	不特定多数	特定少数
実施場所	不特定多数	教室
問題作成者	日本語教育の専門家，教師	指導を行った教師
出題内容	特定の学習目標や学習内容に直接関係しない	学習者の学習目標や学習内容と深く関係する
利害関係(※)	大きい	小さい

※試験結果が多くの人の利害に関係するか否か

試験が該当する．一方，小規模テストは少数の受験者を対象とし，特定の場所で実施される．出題範囲は狭く，受験生が少ないことから利害関係が小さい試験である．本節冒頭で挙げた試験の中では，学校内の定期試験，授業中の小テストが該当する．家庭内の自習はどちらにも属さないものの，小規模テストの一種と考えることができる．

表 1 によれば，本論文で着目する大規模共通試験は大規模テストの一種である．1 章で定義したように，数十万人が同じ問題を解答する試験であるから，正解がただ 1 つであっても，生徒の解答は多岐にわたる．正解が複数ある記述式問題の場合は，さらにバリエーションが広がるため，それらを不公平なく採点するためには，多くの時間が必要である．また，小規模テストでは，受験者数が少ないこともあり，生徒の解答に対して，きめ細やかなフィードバック（例えば，正しい解答を示したり，それに対する補足を示したりすること）を与えることができる．しかし，大規模テストでこのようなフィードバックを与えるには，解答のバリエーションを考慮すると多くの時間がかかる．

ただし，大規模共通試験に含まれる，選抜を行うための試験では，生徒の解答の正否のみ分かれば良い場合が多い．しかし，数学の証明問題のように，解答が多岐にわたる場合は，正解に対して，「どの程度までできたか」を評価する必要性もでてくる．その場合は，きめ細やかなフィードバックは与えなくとも，それができる程度の評価をする必要がある．

２．２．出題形式とその特徴

試験の規模や「生徒の何を評価したいか」によって出題形式が異なるものの，出題形式は大きく選択式と記述式に分類できる．文部科学省[4]は，それらを詳細化し，学力の 3 要素とともに分類している（図 1）．図 1 の縦軸は評価の対象となる能力を示しており，上に行くほど思考力・判断力・表現力の評価が対象になり，下に行くほど知識・技能の評価が対象になることを示している．横軸は採点可能性を示しており，不

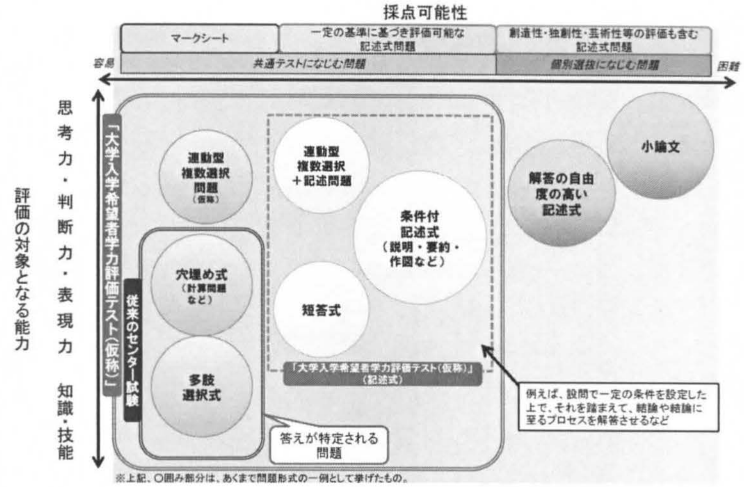


図 1　「知識・技能」や「思考力・判断力・表現力」とそれらを評価する方法[4]

公平なく採点するなどの意味で，右にいくほど困難であり，左に行くほど容易である．

次に図 1 内の各出題形式について説明する．多肢選択式は，与えられたいくつかの選択肢から正しいものを 1 つ（あるいは 1 セット）選択する問題である．数学の試験では穴埋め式を採用している問題が多く，問題文中にある空欄に，0 から 9，+（プラス），-（マイナス）などの記号，あるいは a，b などのアルファベットを埋めることで解答する．このような穴埋め式問題は，多肢選択式よりも解答のバリエーションが大きいものの，穴に埋まるものが限定されているため，選択式問題の一種と考えることができる．ただし，穴の大きさや穴に埋まるものが限定されていない場合は，後述する短答式等の記述式問題となる．

文部科学省の定義によれば，連動型複数選択問題は，『問題発見・解決の考え方や事例を含む複数の文章を読み，そこで語られている考え方・取り組み方の共通パターンを分析して回答する問題』である．いくつかのカテゴリ（例えば，状況，問題点，解決策）について，各カテゴリで与えられている選択肢から選択し，全体として選択した組み合わせが正しいか否かが問われる．正解となる組み合わせは複数存在する．各カテゴリで与えられる選択肢の数により，解答のバリエーションの大きさが異なるものの，この問題も選択式問題の一種である．

ここまで挙げた多肢選択式問題，穴埋め式問題，連動型複数選択問題は選択式問題であり，生徒がマークシートを利用して解答できるため，正否判断も容易である．図 1 で挙げられている残りの短答式，条件付記述式，連動型複数選択+記述問題，解答の自由度の高い記述式，小論文の 5 つは，記述式問題（あるいは記述して解答する部分が含まれる問題）である．

短答式は与えられた問題について数語から数十語で解答するものである．連動型複数選択+記述問題は，先述の連動型複数選択問題に短答式などの記述式解答を加えたものである．文部科学省の定義によれば，条件付記述式は『単に答えを出す力ではなく，思考・判断・表現のプロセスで必要となる具体的な力』を問うものである．その

イメージ例として，2+3=□の□を求めるのではなく，5=△+○の△と○や，一定条件下で 1+□=△の□や△を求める問題であると述べている．解答の自由度の高い記述式や小論文では，さらに記述する量が増え，解答のバリエーションも大きくなる．

これまで述べてきたことを踏まえると，数学証明問題は「解答の自由度の高い記述式」である．ただし，多くの試験では結論が与えられている（例：「○○であることを証明せよ.」という問題であれば，○○が結論にあたる）ため，条件付記述式の一種と捉えることができる．また，解答する部分を限定することにより，短答式や多肢選択式問題とすることも可能である．

３．数学証明問題

本章では，中学校・高等学校の数学教育で扱われる証明問題の種類とその特徴について述べる．その後，現状行われている各種試験における出題形式について述べる．

３．１．学習内容

文部科学省が 2008 年に発表した現行の学習指導要領[5]によれば，数学の証明は中学校第 2 学年から取り扱われる．そのため，学習指導要領に沿った学習を行っているならば，数学証明問題は中学校第 2 学年で初めて与えられることになる．中学校の教科書を出版している啓林館[6]によれば，数学証明問題に関連する内容として，中学校第 2 学年では，次の 5 点が扱われる：

- 2 つの三角形の合同証明（仮定・結論の意味，証明のしくみ・意味・必要性）
- ある証明を利用した証明（「合同である三角形の対応する辺は等しい」など）
- 二等辺三角形になることの証明（定義・定理の意味）
- 2 つの直角三角形の合同証明
- 平行四辺形になることの証明

また，中学校第 3 学年では，次の 3 点が扱われる：

- 2 つの三角形の相似証明
- 円周角の定理や，円の性質を根拠にした証明
- 三平方の定理とその証明

高等学校になると，ほとんどの単元に関する内容を数学証明問題として出題することが可能となる．表 2 は高等学校で学習する内容の例[7]である．

以降，断りの無い限り，本論文で対象とする数学証明問題は本節で挙げた学習内容に関するものを問う問題とする．

３．２．現状の出題方法

本節では，数学証明問題に関して，現状の試験での出題方法について述べる．出題方法は出題する機関，対象となる受験者，試験の規模などにより多種多様でなるため，

表 2　高等学校数学で学習する内容の例[7]

科目	学習内容
数学 I	● 数と式（整式，実数，方程式と不等式，集合と命題） ● 2 次関数（関数とグラフ，2 次関数の最大・最小，2 次関数と方程式・不等式） ● 図形と計量（鋭角の三角比，鈍角の三角比，正弦定理と余弦定理，図形の計量） ● データの分析（データの散らばり，データの相関）
数学 A	● 場合の数と確率（場合の数，順列・組合せ，確率とその基本性質，独立な試行の確率，条件つき確率） ● 整数の性質（約数と倍数，ユークリッドの互助法，整数の性質の活用） ● 平面図形（三角形の性質，円の性質，作図，空間図形）
数学 II	● いろいろな式（整数の乗法・除法と分数式，式と証明，高次方程式） ● 図形と方程式（点と直線，円と直線，軌跡と領域） ● 三角関数（一般角の三角関数，三角関数の加法定理） ● 指数関数と対数関数（指数と指数関数，対数と対数関数） ● 微分と積分（微分係数と導関数，導関数の応用，積分）
数学 B	● 数列（等差数列・等比数列，いろいろな数列，漸化式と数学的帰納法） ● 平面状のベクトル（ベクトルとその演算，ベクトルと図形） ● 空間座標とベクトル（空間のベクトル）
数学 III	● 平面状の曲線（2 次曲線，媒介変数と極座標） ● 複素数平面（複素数平面，平面図形と複素数） ● 数列の極限（無限数列，無限級数） ● 関数の極限（分数関数と無理関数，関数の極限と連続性） ● 微分法（微分と導関数，いろいろな関数の導関数，導関数の応用） ● 積分法（不定積分，定積分，面積，体積，曲線の長さ）

本節では，図 1 で挙げた出題形式を中心に述べる．高等学校入試や大学入試で出題された問題やその解答については，Web 上（例えば，[8]）や書籍（例えば，いわゆる「赤本」）で広く公開されている．

以下，図 2 に示す問題例とその解答例をもとに説明する．図 2 で示す問題例は結論が合同であることの証明でないものの，合同を証明することにより結論が得られるため，本論文では合同証明問題として取り扱う．

(1) 多肢選択式

数学検定[9]や全国学力・学習状況調査[10]等における中学生を対象とした試験において多く見られる．図 2 であれば，

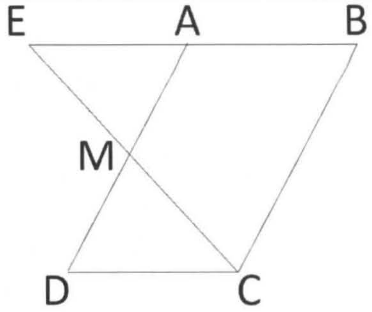
- いくつかの合同条件を与えて，証明するために正しい合同条件を選択する問題
- 等しい辺の組や等しい角の組（AM = DM，AB = CD などの等式）をいくつか与えて，証明するために正しい等式を複数選択する問題

がこの問題形式にあたる．証明の仮定や結論に合うように合同条件や等式を選択する必要があるため，正しく解答するためには，学力 3 要素の「知識・技能」だけでなく，「思考力・判断力・表現力」も必要となる．

(2) 穴埋め式，短答式

多肢選択式同様，中学生を対象とした試験において見られ，その多くは穴埋め式である．穴埋め式では，与えられた問題に対する解答の一部が空欄になっているものの，

＜問題＞　平行四辺形 ABCD において，辺 AD の中点を M とする．また，直線 CM と直線 AB の交点を E とする．このとき，AE = DC であることを証明せよ．



＜解答＞　△AME と△DMC において，
仮定から，AM = DM　…①
対頂角は等しいので，∠AME = ∠DMC　…②
平行線の錯角は等しいので，∠MAE = ∠MDC　…③
①から③より，一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△AME ≡ △DMC
合同な 2 つの三角形の対応する辺は等しいので，AE = DC

図 2　三角形合同証明問題の例とその解答例

2 章で述べたような穴に埋まるものが限定されている場合は少ない．受験者はその空欄にあてはまる辺，角，式を記述することで解答する．空欄の大きさにより，解答するための難易度が異なる．また，例えば，「対頂角は等しいので」のような，等式を満たす根拠となる文を書く場合は短答式となり得る．この問題形式でも，正しく解答するためには，学力 3 要素の「知識・技能」だけでなく，「思考力・判断力・表現力」も必要となる．

(3) 条件付記述式

多くの試験で出題される形式であり，「〇〇であることを証明せよ」という結論が与えられている問題である．受験者は問題文で与えられている仮定と，他の情報（問題文で与えられていない暗黙の条件や定理など）を統合して証明全体を記述する．この問題形式では，次の 4 点に示すような技能が必要であるため，多肢選択式，穴埋め式，短答式よりも思考力・判断力・表現力が必要である．

- 問題文で与えられている仮定を発見する（判断）
- 証明するために必要な他の情報を考える（思考．これをするためには各種定義や定理がわかっていること等，一定の知識が必要）
- 集めた情報（仮定や他の情報）から証明するために必要なものを選別する（判断）
- 結論に導くための証明を正しく記述する（表現．これをするためには証明の書き方等，一定の知識・技能が必要）

(4) 解答の自由度の高い記述式，連動型複数選択式

筆者の探す限り，表記の形式を採用している試験問題は見当たらない．そのため，これらについては図 2 をもとに筆者が独自に作成した．解答の自由度の高い記述式問題を図 3 に，連動型複数選択式問題を図 4 に示す．

図 2 の問題と比較した場合，図 3 の問題では証明すべきものを決めるところから解答が始まる．例えば，「AM = DM を証明する」とすれば，M が辺 AD の中点である仮定を利用するのみで証明できる．一方，「BE : CD = 2 : 1 であることを証明する」とすると，図 2 で示した証明に加え，BE = BA + AE であり，BA = CD および AE = CD で

<問題>　平行四辺形 ABCD において, 辺 AD の中点を M とする. また, 直線 CM と直線 AB の交点を E とする. このとき, どのような平行四辺形 ABCD でも成り立つことがらを 1 つ見つけ, それを証明せよ. ただし, 点は A, B, C, D, E, M のみ利用できるものとし, これ以上増やさないこと.

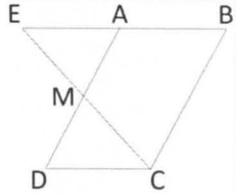
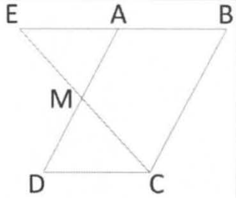


図 3　解答の自由度の高い記述式問題の例

<問題>　平行四辺形 ABCD において, 辺 AD の中点を M とする. また, 直線 CM と直線 AB の交点を E とする. このとき, 次に示す結論から 1 つ証明するものを選択し, それを証明するために必要なものを, 合同・相似条件から 1 つ, 等式からすべて選択せよ.



<結論>　・$\triangle AME \equiv \triangle DMC$
・$\triangle AME \backsim \triangle DMC$

<合同・相似条件>　・3 組の辺がそれぞれ等しい
・3 組の辺の比がすべて等しい
・2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい
・2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい
・2 組の角がそれぞれ等しい
・1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい

<等式>　・$AB = CD$　・$AD = CB$　・$AM = DM$　・$AM : DM = CM : EM$
・$AB : CD = AD : CB$　・$AB : CD = AM : DM$　・$\angle DAB = \angle BCD$
・$\angle AEM = \angle DCM$　・$\angle EAM = \angle CDM$　・$\angle AME = DMC$

図 4　連動型複数選択問題の例

あることから $BA + AE = 2CD$ であること, $BE : CD = 2CD : CD$ なので $2 : 1$ であることという手順で証明する必要があり, $AM = DM$ を証明するよりも難易度が上がる. 図 4 の問題は, 図 2 の問題と同じように結論が与えられているものの, 結論を選択することが必要であり, それに応じて正解が変わる.

図 3 では証明するべきものにより証明の難易度が変わる. また, 3.1 節で述べたように, 三角形の合同は中学校第 2 学年, 三角形の相似は中学校第 3 学年で習うことから, 図 4 の問題では結論の選択により証明の難易度が変わるといえる. このため, 生徒によって, 難易度が異なる課題を解決する可能性がある. したがって, 正否のみを判定する選抜試験では図 3 や図 4 のような問題は出題しにくい.

4. 数学証明問題の解答支援・学習支援

本章では, 数学証明問題について, 生徒が解答や学習することを支援する環境について, 紙媒体による支援, および電子媒体による支援について述べる.

４．１．紙媒体による支援

紙媒体による支援の代表的なものは教科書，参考書，問題集（以下，教科書等と呼ぶ）である．これらでは，証明問題に関して例題が示され，それに対する解答方法（つまり証明方法）が詳細に示されていることが多い．例題以外にも，いくつか問題が示されているものの，解答の正否は，生徒自身や教師などが確認する必要がある．

日本の教科書については，Fujita ら[11]が分析を行っている．Fujita らは日本で使用されている中学校数学教科書を例に挙げて分析を行い，教科書の構成が生徒に与える影響について述べている．その影響について，長所は，特に三角形の合同について，「適切な証明（suitable proofs）を構築できること」としている．短所は，「数学証明の必要性（necessity）や一般性（generality）を完全には理解できていない可能性があること」としている．

そのため，教科書等を利用した教室での指導では，この短所を補完することを含めて，演繹的な証明を生徒自身で行えるように演習している場合が多い．Miyazaki ら[12]は演繹的な証明を生徒が理解することについて，3 つの段階："Pre-structural", "Partial-structural", "Holistic-structural"を挙げ，それぞれに対する特徴を述べている．また，それらの段階を踏まえて，教室での生徒と教師のやり取りを分析している．ここでは，証明の循環（logical circularity．例えば，AB = AC かつ BO = CO かつ∠B = ∠D（仮定等）ならば△ABD≡△ACO であり，∠B = ∠C（対応する辺は等しい）のように，証明が循環すること）に注目しており，このような循環を含む証明が，生徒に「証明とは何か」などを考えさせる良い機会になることを述べている．

教科書等以外では，教師が作成したワークシートを証明支援に用いる場合がある．生徒の理解状況に応じた問題等を提供できるため，教科書より適切に支援できる可能性が高い．これに関し，Dimakos ら[13]は RECOMPP（REasoning COntrol Matrix for the Proving Process）と呼ばれるワークシートを開発した．RECOMPP は次の Section 1 から Section 6 で構成されている：

- Section 1: 与えられた問題文を書く欄
- Section 2: 仮定と結論を書く欄
- Section 3: 図を書く欄（三角形や円，等しいことや平行を示す印など）
- Section 4: （必要に応じて）教師から与えられたヒントを書く欄
- Section 5: 「証明すべき式」と「それを証明するために必要な式など」のペアを書く欄
- Section 6: 仮定から結論までの証明をすべて書く欄

はじめは各 Section に何も書かれていないので，三角形合同証明問題に限らず，どのような証明問題でも利用できる．

４．２．電子媒体による支援

電子媒体による支援の代表的なものは，電子教科書や通信教育を除けば，自学自習

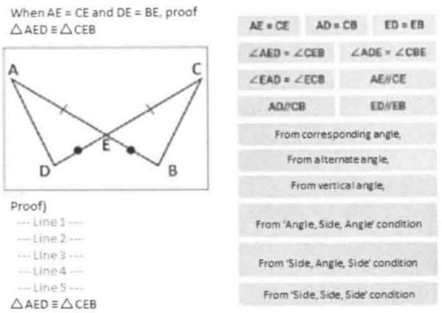
用の e-Learning システムを用いた支援である．これらは自学自習用として開発されているため，教師の助けなく生徒自身で解答およびその正否チェックできる場合が多い．本節では，三角形合同証明に関する主な支援を述べる．

伊藤[14]は，三角形合同証明問題を解くことが苦手な学習者に対する解答支援環境を開発した．ネットトレの学習教室[15]では，Web ブラウザ上に表示された三角形合同証明問題等について，ソフトウェアキーボードを利用して解答することができる．どちらでも，利用者が解答入力後にコンピュータが自動採点するものの，証明するためのリアルタイムな支援はない．

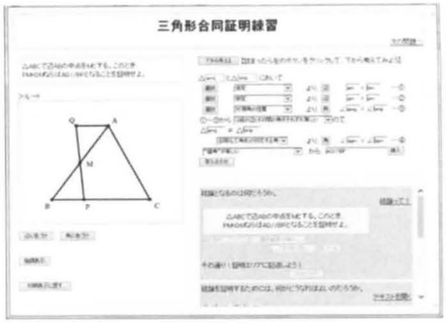
Wong ら[16]は，証明を様々な形（プレーンテキストのみ，木構造を利用した証明，問題に関する図形を動的に移動や変形できるインターフェースの提供など）で表現できるシステム MRGeo を提案した．利用者は，例えば，プレーンテキストで示されている証明の特定部分をクリックすることで表示されている木の対応する部分が強調されるなど，複数表現間の関連を見ることができる．つまり，ある証明問題とその解答に関して，複数の角度から探究できる．穴埋め形式の問題も提供しているため，自学自習できるものの，システムからのフィードバックについては言及されていない．

システムからの具体的なフィードバックがあるシステムについては，Matsuda らのシステム：AGT (Advanced Geometry Tutor) [17]や，Miyazaki らのシステム[18, 19]がある．Matsuda らは，与えられた証明問題の仮定から結論に向かって順に証明を組み立てる前向き推論（Forward Chaining）と，逆に結論から仮定に向かって証明を組み立てる後ろ向き推論（Backward Chaining）に注目している．AGT では利用者への足場かけ（Scaffolding）があり，与えられた問題に対する解答が間違っている場合には，システムからのヒントが増え，逆に解答が正しい場合には，ヒントが減るという手法を実現している．Miyazaki らのシステムでは，フローチャートを用いた証明を行うことができる．前述の前向き推論や後ろ向き推論に加え，与えられた図形の辺や角をドラッグ&ドロップすることで解答でき，より直感的な解答ができるようになっている．ただし，コンピュータに不慣れな利用者にとっては，解答方法を習熟するまでに一定の時間がかかる可能性がある．

筆者らも解答を支援するシステムを開発している．筆者らは，全国学力・学習状況調査の中学校数学（例えば，[20]）における証明問題に関連して，指導方法例として挙げられている手法を採用している．具体的には，(a) 結論を示すためには何が分かればよいか，(b) 仮定からいえることは何か，(c) 上記(a)と(b)を結び付けるには，あと何が言えれば良いか，の 3 点を考えさせるという手法である．上記(a)は前述の後ろ向き推論，上記(b)は前向き推論にあたる．この手法を採用したシステムとして，Sanagi ら[21]はモバイル端末で証明学習ができるシステムを開発した（図 5(a)）．図 5(a)の左側にある解答欄（この問題では 5 行で固定）に，図 5(a)の右側にある式や理由を埋めることで解答する．証明方法が複数ある場合や，証明の順序が異なった場合でも証明できる場合など，与えられた問題に対する解答が複数ある場合も対応している．Onda ら[22]は前向き推論および後ろ向き推論に関する具体的な支援ができるシステムを開

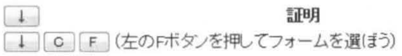


(a)

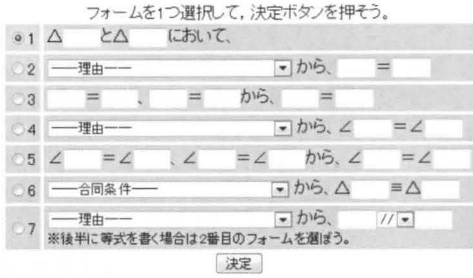


(b)

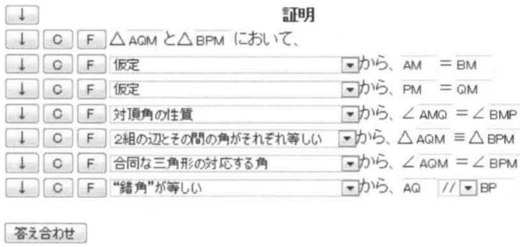
図 5　筆者らが開発した環境（(a)は[21]より，(b)は[22]より引用）



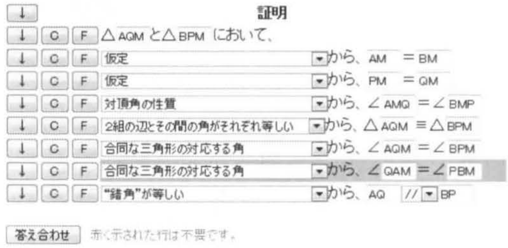
(a) 初期状態



(b) フォームの選択



(c) 証明の完成形



(d) 採点例

図 6　筆者らが開発した解答フォーム[23]

発した（図 5(b)）．与えられた図形に色づけができること，利用者による様々な解答に対応できること，などの工夫がなされている．

図 6 は筆者らが開発した解答フォームである[23]．図 5 で示した 2 つの環境では与えられた問題に対する解答の行数が固定されていたため，図 6 ではそれに対応した．図 6(a)が解答欄の初期状態であり，「↓」ボタンを押すことで行の追加，「C」ボタンを押すことで行の削除，「F」ボタンを押すことでその行に埋めるフォームを選択できる．フォームは図 6(b)に示されているものから 1 つ選択する．行の追加やフォームの選択を繰り返して，証明を完成させた状態が図 6(c)である．図 6(c)の下部にある「答え合わせ」ボタンを押すことで採点が行われ，図 6(d)に示すような採点が行われる．採点では証明の順序関係や行の過不足などがチェックされる．

図 5 や図 6 で示した環境を利用することにより，全国学力・学習状況調査で示されている手法を体験できるものの，コンピュータによる自動採点のために，解答方法や複雑になっているため，コンピュータに不慣れな利用者にとっては利用しにくいという問題がある．

5．大規模共通試験において数学の証明問題を出題するために

本章では，1 章で挙げた検討事項である「大規模共通試験において数学の証明問題を出題するためには現状何が問題なのか」，および「その問題を解決するにはどのような研究・実践が必要か」について，(1) 出題形式，(2) 採点方式の 2 点に分けて検討する．その後，今度の展望について述べる．

5．1．出題形式

現状の一般入試前期日程あるいは後期日程で出題されているように，数学証明問題を条件付記述式で大規模共通試験でも出題できることが望ましい．しかし，1 章で述べたように，時間・人・費用などのコストとの関係を考慮する必要がある．これらのコストとの関係を考慮した結果，本論文の前提のように，できるだけコストを減らす工夫が必要であれば，条件付記述式ではなく，多肢選択式，穴埋め式，連動型複数選択式，短答式のように，解答するべき内容を少なくするか，あるいは多肢選択式として出題できるよう出題形式を変更していくことが必要である．

出題形式を多肢選択式に変更する場合の問題の 1 つは，「選択式問題でも記述式問題と同様の評価（受験した生徒の学力評価）ができるのか（以下，問題点 1 と呼ぶ）」ということである．この問題は評価方法によるものの，仮に試験得点で学力を評価するとした場合，絶対的な評価は難しい．これは，一般的に選択式問題のほうが記述式問題より得点しやすく，いわゆる勘による正解もしやすくなるためである．選抜試験の場合は，合格者等を相対的に決定することが多いため，試験得点で学力を評価する場合でも，相対的に評価することによって，問題点 1 は解決できる．ただしこの場合でも，例えば，条件付記述式で出題した場合の得点順位と多肢選択式で出題した場合の得点順位が一致することを確かめるなどの調査が必要となる．

多肢選択式に変更する場合の問題には，他に「証明問題を選択式問題として出題できるのか（以下，問題点 2 と呼ぶ）」ということがある．3.2 節で述べたように，三角形合同証明問題を出題する場合は，選択肢の候補がある程度に限られているために出題しやすい．しかし，高等学校になると，数学的帰納法，背理法，対偶証明法，はさみうちの原理の利用など，証明するための技術も多岐に渡るため，選択肢としてどのような式・記号・文を与えるのかを考えることが難しくなる．これを解決するためには，例えば，証明方針を多肢選択式として答えさせ，その方針に従って証明を記述するなどをすることで，連動型複数選択＋記述式とすることができ，条件付記述式よりは採点が容易になる可能性がある．

5．2．採点方式

前節で述べた問題点 1 や問題点 2 に対する調査の結果，多肢選択式問題として出題できることが分かれば，現状の大規模共通試験のようなマークシート方式で解答および採点することができる．本節では，多肢選択式問題として出題できそうもない，つまり一部でも記述式を取り入れる必要がある場合の採点方式について考える．

1 章で述べた時間・人・費用を考慮する必要がない場合は，記述式問題を取り入れる場合でも人間が採点すれば良い．本論文の前提のように，できるだけコストを抑えることを考慮するのであれば，人間の代わりにコンピュータがすべての解答を採点する自動採点方式，あるいはそれらの一部を採点する採点支援方式[24]を採用することも検討できる．採点基準を明確に決定することができれば，コンピュータが大量の解答を不公平なく短時間で採点することができるため，時間・人のコストを抑えることができる．ただし，この場合でも次の 2 点の問題がある．

- 解答および採点に用いる媒体（問題点 3）
- 解答のバリエーションへの対応（問題点 4）

問題点 3 は具体的には，「従来通り紙上に解答するか」あるいは「コンピュータの画面上に解答するか」である．コンピュータが採点するためには，コンピュータが生徒の解答を正しく認識できる必要がある．コンピュータの画面上に解答する場合は本論文冒頭で述べた CBT となるものの，CBT を実施する場合はまだ多くの問題がある（詳細は 5.3 節で述べる）．そのため，現状では紙上に解答することが現実的であり，この場合は費用のコスト（例えば，解答するためのタブレット端末等の購入・保守費用）を抑えることができる．これを受け，森重ら[25]や小西ら[26]のように，手書きで書かれた解答をコンピュータが認識し，それを採点するための研究が行われている．

問題点 4 について，具体的には少なくとも次の 3 点について対応する必要がある．

- 緩い採点と厳しい採点：国語の漢字テストのような場合で，はね・はらい・とめなども採点対象となる場合は，記入された漢字を記入されたまま正しく認識する必要がある．しかし，語句や短文で答えさせる問題では，そこまで要求されることは少ない．一方で，高度な文字認識技術を用いた場合，間違った漢字や記号を記入した場合でも，コンピュータが記入した文字を推測した上で採点してしまう．このように，記入された文字や記号に対して，どの程度厳しく採点するかについて考慮する必要がある．
- 同値，同義，含意：文献[24]で述べられているとおり，数学では，特段の指定がない場合で $2(x-2)(x-3)$ が正解であれば，$(2x-4)(x-3)$，$(x-2)(2x-6)$，$2x^2-10x+12$ などもすべて正解とできる．すべての解答について，このような判定を現実的な時間で行うことは難しい．そのため，何が正解で，何が許される範囲の正解か，減点すべき解答は何かなどをあらかじめ考慮する必要がある．
- 証明の順序：これは証明問題特有の問題である．図 5 および図 6 を用いて説明したように，問題で指定された結論に至るまでの道筋が正しければ，証明の順序が異なっても良い．これをコンピュータが正しく認識・採点するためには，

あらかじめ証明の順序関係をコンピュータに登録しておく必要がある.

５．３．今後の展望

本節では，本章で挙げた問題点 1 から問題点 4 などを解決した場合における今後の展望を 2 点述べる.

(1) 公平性・信頼性の確保

高大接続システム改革会議の最終報告[27]では，高等学校基礎学力テスト（仮称）の導入に関連して,「公平性，信頼性を確保するためには適切な評価規準を設ける」ことや,「複数回受検する場合に回ごとの試験問題の難易度の差による不公平を排除する」ために，例えば，項目反応理論(IRT)の導入可能性を検討している．評価規準の決定や IRT 導入のためには，文献[27]で示されているとおり，問題の難易度等について予備調査することや多量に問題をストックすることが必要である．この必要性は数学の証明問題についてもあてはまる.

(2) CBT における出題

前述のとおり CBT は，コンピュータの画面に表示された問題に対し，キーボード，マウス，タッチペン等を利用して解答を入力する試験である．特に Web 上で行われる試験は WBT (Web-Based Testing)と呼ばれることもある.

CBT/WBT は，紙上に与えられた問題に対して解答する PBT (Paper-Based Testing)や PPT (Paper and Pencil Test)と対比され，“the findings were inconsistent. (知見に一貫性がない．)” [28]とあるように，様々な対象に対し，様々な比較が行われ，様々な知見が報告されている．一貫性がないといわれているものの，多くの研究では CBT/WBT の利点として，採点結果を受験者の解答直後に返すことができる[29]，印刷コスト・輸送コスト・管理コストが低減される[30]ことを挙げている.

そのため，CBT の実施が現実的になれば，本論文の前提としていた時間・人のコストは大きく低減できる．ただし，費用のコストを解決することは難しく，コンピュータを用いて解答する生徒が，コンピュータの利用方法を熟知する必要がある．これらが解決しない場合は，採点が公平であっても，解答する環境が不公平になるため，全体として公平な試験にならない.

このためなのか，筆者が探す限り，入学者選抜に利用する CBT で数学証明問題が出題された事例は見当たらない．また，数学証明問題に限らず，現状の CBT では多肢選択式，穴埋め式問題を採用している場合が多い[2]．しかし，4.2 節で述べたように，コンピュータ上での解答方法に関する研究が活発になっているため，費用のコストが解決できれば，よい現実味を帯びてくるものと考える.

６．おわりに

本論文では，大規模共通試験において数学の証明問題を出題するためには現状何が問題なのか，その問題を解決するためにはどのような研究・実践が必要なのか，の 2

点について実例に触れながら検討してきた．5.1 節および 5.2 節で述べたように，大規模共通試験で数学の証明問題を出題するためには，まだ多くの課題がある．

平成 28 年 12 月 8 日付で提言された大学入学者選抜試験における記述式問題出題の考え方[31]をはじめとし，新しい大規模共通試験の全容がより具体的になってきた．本論文で挙げた問題を解決できれば，数学証明問題を出題することも不可能ではない．平成 32 年度からはじまる大学入学希望者学力評価テスト（仮称）に向け，平成 29 年度以降に順次試行試験が行われる予定となっている[1]．試験実施方法等については，まだ確定していないため，今後も注視していく必要がある．

注

[1] 学力の 3 要素は「知識・技能」，「思考力・判断力・表現力等」，「主体性を持って多様な人々と協働して学ぶ態度」である．

[2] 選択式問題以外では，例えば Microsoft Office Specialist (http://mos.odyssey-com.co.jp/index.html) 認定試験やプログラミングコンテストのように，与えられた問題・課題・コンピュータ上の機能を利用して，受験者が自由に解答する CBT がある．

参考文献

1. 文部科学省: 高大接続改革の進捗状況について, http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/28/08/1376777.htm (2016 年 10 月 28 日閲覧).
2. 文部科学省: 教育課程部会　高等学校の数学・理科にわたる探求的科目の在り方に関する特別チーム（第 2 回）, http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/070/siryo/1366505.htm (2016 年 10 月 28 日閲覧).
3. 伊藤祐郎: 日本語教師のためのテスト作成マニュアル，アルク (2008).
4. 文部科学省: 「知識・技能」「思考力・判断力・表現力」とそれらを評価する方法のイメージ図（たたき台），高大接続システム改革会議（第 9 回），別紙 2-1, http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/shougai/033/shiryo/1365554.htm (2016 年 10 月 28 日閲覧).
5. 文部科学省: 現行学習指導要領　中学校学習指導要領, http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/chu/ (2016 年 11 月 7 日閲覧).
6. 啓林館: 平成 28 年度版中学校教科書（数学）カリキュラム作成資料, http://www.shinko-keirin.co.jp/keirinkan/text/chu/h28textbook/math/curriculum/ (2016 年 11 月 7 日閲覧).
7. 啓林館: 平成 24 年度版高等学校教科書（数学）年間指導計画案. http://www.shinko-keirin.co.jp/keirinkan/kokyoka/math/index2.html (2016 年 11 月 7 日閲覧).
8. 谷口美喜夫: 大学入試数学の問題, http://www.geocities.jp/mikiotaniguchi/math/ (2016 年 11 月 7 日閲覧).
9. 公益財団法人日本数学検定協会: 数学検定. https://www.su-gaku.net/suken/ (2016 年 11 月 11 日閲覧).
10. 国立教育政策研究所: 教職課程研究センター「全国学力・学習状況調査」 http://www.nier.go.jp/kaihatsu/zenkokugakuryoku.html (2016 年 11 月 11 日閲覧).
11. T. Fujita and K. Jones: Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Japan, *International Journal of Educational Research*, Vol. 64, pp. 81-91 (2014).
12. M. Miyazaki, T. Fujita, and K. Jones: Students' understanding of the structure of deductive proof, *Educational Studies in Mathematics* (2016). DOI: 10.1007/s10649-016-9720-9
13. G. Dimakos, E. Nikoloudakis, S. Ferentinos, and E. Choustoulakis: Developing a proof-writing

tool for novice lyceum geometry students, *The Teaching of Mathematics*, Vol. 10, No. 2, pp. 87-106 (2007).
14. 伊藤哲也: *三角形の合同の証明問題の支援システム*, 東京農工大学工学部卒業論文 (2002).
15. ネットレの学習教室,
http://netlessonlab.com/ (2016 年 11 月 28 日閲覧).
16. W.-K. Wong, S.-K. Yin, H.-H. Yang, and Y.-H. Cheng: Using Computer-Assisted Multiple Representations in Learning Geometry Proofs, *Educational Technology & Society*, Vol. 14, No. 3, pp. 43-54 (2011).
17. N. Matsuda and K. VanLehn: Advanced Geometry Tutor: An intelligent tutor that teaches proof-writing with construction, *Artificial Intelligence in Education*, pp. 443-450 (2005).
18. M. Miyazaki, T. Fujita, Y. Murakami, N. Baba, and K. Jones: *Proceedings of the 10th International Conference for Technology in Mathematics Teaching* (2011).
19. 信州大学教育学部 schoolmath.jp ウェブサイト,
http://www.schoolmath.jp/flowchart/home.htm (2016 年 11 月 28 日閲覧).
20. 国立教育政策研究所: 平成 28 年度全国学力・学習状況調査報告書 中学校数学,
http://www.nier.go.jp/16chousakekkahoukoku/report/16middle/16math/ (2016 年 11 月 29 日閲覧).
21. T. Sanagi, K. Otake, Y. Hirai, and K. Kaneko: Proposal of Self-Learning System for Solving Problems of Two-Triangle Congruence Proof, *Proceedings of the 5th ICT International Student Project Conference*, pp. 41-44 (2016).
22. R. Onda, Y. Hirai, and K. Kaneko: Development of a learning system for proving the congruence of two triangles by supporting 'Backward Chaining', *Proceedings of the 3rd ICT International Student Project Conference*, pp. 1-4 (2014).
23. 平井佑樹, 金子敬一: 中学生を対象とした三角形合同・相似証明支援システムにおける証明記述フォームの検討, *電子情報通信学会技術報告*, Vol. 114, No. 513, pp. 113-118 (2015).
24. 中川正樹, 平井佑樹: ぺた語義：記述式解答の採点支援・自動採点に向けて-手書き認識からの挑戦-, *情報処理学会誌「情報処理」*, Vol. 57, No. 9, pp. 920-924 (2016).
25. 森重湧太, 中川正樹: 手書き数式認識を用いた計算過程の正誤フィードバック, *情報処理学会研究報告*, Vol. 2014-CE-126, No. 3, pp. 1-6 (2014).
26. 小西渉, 佐々木進亮, 松永朋永, レ・ドゥック・アイン, 中川正樹: 手書き数式認識を用いた算数・数学自動採点システム, *情報処理学会研究報告*, Vol. 2016-CE-133, No. 7, pp. 1-7 (2016).
27. 文部科学省: 高大接続システム改革会議「最終報告」の公表について,
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/shougai/033/toushin/1369233.htm (2017 年 1 月 26 日閲覧).
28. Y.P. Chua: Effects of computer-based testing on test performance and testing motivation, *Computers in Human Behavior*, Vol. 28, pp. 1580-1586 (2012).
29. L.H. Kristen and G.S. Stephen: Validity issues in computer-based testing, *Educational Measurement, Issues and Practice*, Vol. 20, No. 3, pp. 16-25 (2001).
30. J. Poggio, D.R. Glasnapp, X. Yang, and A.J. Poggio: A comparative evaluation of score results from computerized and paper and pencil mathematics testing in a large scale state assessment program, *Journal of Technology, Learning, and Assessment*, Vol. 3, No. 6, pp. 4-30 (2005).
31. 国立大学協会: 大学入学者選抜における記述式問題出題に関する国立大学協会としての考え方,
http://www.janu.jp/news/files/20161208-wnew-exam-comment.pdf (2016 年 12 月 29 日閲覧).

（信州大学 総合人間科学系 アドミッションセンター 講師）

2017 年 1 月 4 日受理 2017 年 2 月 1 日採録決定