Shinshu University Journal of Educational Research and Practice，*No.11*，pp. 1-20，2017
信州大学教育学部研究論集　第11号　pp. 1-20　2017年

〈学術論文〉

学校数学図形領域における，証明による命題の全称性の確立に関する研究
－論理的に考える力の育成を目指して－

太田 一成[1]　信州大学大学院教育学研究科

キーワード：証明，命題，命題の全称性，普遍汎化，証明の適用範囲

１．研究の意図・目的・意義

近年，先進諸国において，ジェネリック・スキルとよばれる，21 世紀を生き抜くための汎用的な資質・能力の育成が求められている(清水, 2012)。我が国でも，「人間力」，「就職基礎能力」，「社会人基礎力」，「学士力」，「21 世紀型能力」などが提唱され，各教科において汎用的な資質・能力を育成することが求められている(清水, 2012; 国立教育政策研究所, 2013)。

21 世紀を生き抜くための汎用的な資質・能力の中でも，論理的に考える力の育成は特に重視されている。とりわけ「21 世紀型能力」の中核である思考力には，論理的思考力が位置付けられてその育成が求められ，論理的思考力の例として，演繹，帰納，類推等の推論ができることが挙げられている(国立教育政策研究所, 2013)。

一方で，学校数学では従来から論理的思考力を育むことに重点がおかれてきた(國宗, 1987; 杉山, 2010 等)。学校数学における論理的に考える力とは，演繹，帰納，類推等の推論ができることや(文部科学省, 2008)，反例を示して事柄を論駁することができることなどである(国立教育政策研究所, 2006)。論理的に考える力の中でも，特に，演繹的に推論する力の育成は，学校数学が担うべき役割の一つとしてこれまでも重視されてきた(杉山, 2010, p. 89, pp. 103-105)。演繹的に推論する力とは，仮定から出発し，いつでも成り立つと認められた事柄を根拠[2]として，結論を導くことができることや，命題の全称性を証明によって確立できることなどである(國宗, 1987; 文部科学省, 2008)。

演繹的に推論する力の中でも, 命題の全称性を証明によって確立することができることは, 次の二点において重要である。

第一は，全称性を有する命題だけが，証明の中で根拠となって，別の命題を演繹的に導き出すという特別な役割を担い得るからである。命題の全称性を証明によって確立することで，子どもは，証明された命題が全称性を有することを認識できるようになる。そこで，次に，証明によって全称性を確立したその命題を，別の命題の証明を構成する際に根拠として用い，演繹的な推論によって新たな事柄を導き出すことができるようになる。そして，こうした証明活動を繰り返すことによって，さらに新たな事柄を立証したり，事柄が成り立つ理由を説

[1] 現所属：長野県松本市立信明中学校
[2] 本研究において，「根拠」は，「いつでも成り立つと認められた事柄」を指す。

明したり，立証した知識を体系化して整理したりすることが可能になる。

第二は，命題の全称性を証明によって確立することで，「証明の必要性と意味」(文部科学省, 2008, p. 93)がよりよく理解されるからである。命題の全称性を証明によって確立することで，一つの証明によって仮定を満たすすべての図形について命題が成り立つことが認識されるようになる。そして，実験・実測による方法では仮定を満たすすべての図形について命題が成り立つかどうかを調べることはできないが，証明によって，仮定を満たすすべての図形について命題が成り立つことを導くことができることが理解される。このことから，仮定を満たすすべての図形について命題が成り立つことを導くためには，証明が必要であることが理解される。それとともに，証明は，仮定を満たすすべての図形について命題が成り立つことを明らかにする方法であることが理解される。

しかし一方で，先行研究や近年実施されている全国学力・学習状況調査の結果から，図形領域での証明による命題の全称性の確立に関する子どもの学習状況については，課題があることが明らかになっている(國宗, 1987; 文部科学省・国立教育政策研究所, 2016 等)。

命題の全称性を証明で確立することに関しては，これまでに，図が付され記号を用いて表された命題を考察の対象として証明の適用範囲に着目した研究(茅野, 2006)，一般の形で表現された命題を考察の対象として全称命題を証明する一般的なプロセスに基づいて証明の理解をみる観点を設定し，学習指導上のポイントを提案した研究(山下, 1977; 中西, 1977; 小関他, 1976, 1978)，論証の意義の理解についての発達を促進させるための指導を実証的に検討した研究(國宗, 1987)，数と式領域で記号論理学の立場からみた命題の全称性を証明で確立する仕組みに基づいて，命題及び証明がもつ一般性を保証する仕組みを明らかにした研究(宮川・國宗, 2015)がなされてきた。

茅野(2006)は，図が付され記号を用いて表された命題を考察の対象とし，証明の根拠をもとに結論に対する適切な仮定を定式化する文脈における「発見」に係る生徒の認識を捉える枠組みとして，根拠が場面の辺の長さや角の大きさに依存するか否かについての認識と，対象となっている補集合へ考察の対象を移したときの推論の進め方への影響の有無についての認識を設定している。そして，これらの認識によって，命題をより一般的に述べたり，より限定的に述べたりすることができるようになることを指摘している。また，学校数学においても，教育的な配慮から図が付され記号を用いて表された命題が，図形領域での証明の教材として多く用いられている。しかしながら，図が付され記号を用いて表された命題を証明の対象とした場合には，どんな命題が証明されたかについての子どもの認識は多様になることも指摘されている(茅野, 2003)。

一般の形で表現された命題を考察の対象とした小関ら(山下, 1977; 中西, 1977; 小関他, 1976, 1978)の研究では，全称命題を証明する一般的なプロセスに基づき，証明の理解をみる観点として，「記号化」，「証明」，「図の代表性の理解」，「文章化」，「論証の意義の理解」の五つが設定されている。そして，特に「記号化」，「文章化」について，中学生の理解に困難があることが指摘され，学習指導上の留意点が示されている。

また，國宗(1987)では，図形領域において，実験・実測による方法のもつ不十分さを子ども

が理解できるようにするために有効な活動について，指導内容と指導方法が提案されている。

さらに，宮川・國宗(2015)では，命題や証明のもつ一般性を保証する仕組みを顕在化させるためには，証明の仕組みを記号論理学の立場から考察する必要があることが指摘され，数と式領域における証明の仕組みについて，記号論理学の立場からみた命題の全称性を証明で確立する仕組みに基づいた考察がなされている。そして，命題及び証明がもつ一般性を扱うためには「いつも」「どんな」「すべての」などの限量詞の利用が本質的であることが明らかにされ，指導内容が提案されている。

しかしながら，命題の全称性を証明で確立することに関するいずれの先行研究においても，図形領域で命題の全称性を証明で確立するための，規範的な子どもの活動は特定されていない。

図形領域で命題の全称性を証明で確立するための，規範的な子どもの活動を特定することは，次の四点において重要である。

第一は，図形領域で命題の全称性を証明で確立するための，規範的な子どもの活動を特定することによって，そうした子どもの活動を実現するためのカリキュラム開発や指導法の開発，証明による命題の全称性の確立に関する評価法の開発に新たな道を開くことが可能になるからである。

第二は，全称命題を証明する場面における，学習指導のあるべき姿に示唆を与えるからである。具体的には，二等辺三角形や平行四辺形の性質などの全称命題を証明する学習場面において，これまで学校数学においてあまり重要視されてこなかった子どもの活動が新たに明らかになるからである。このことによって，指導者は，全称命題を証明する学習場面において，新たに明らかになった子どもの活動を実現するための指導法を開発して学習指導に臨むことが可能になる。

第三は，図形領域での証明による命題の全称性の確立に関する子どもの学習状況を改善することに貢献し得るからである。命題の全称性を証明で確立するための活動を特定することで，それを実現するためのカリキュラム開発や指導法の開発が可能となる。そして，それらが進められることによって，命題の全称性を証明で確立するために必要な子どもの活動が実現し，証明の必要性と意味，とりわけ，全称命題が証明されたと認識している子どもや証明の一般性を理解している子どもが多くないという学習状況を改善することが期待される。

第四は，論理的に考える力，とりわけ，演繹的に推論する力の伸長が期待されるからである。命題の全称性を証明で確立するための活動を実現することで，子どもは，証明によって命題が全称性を有することを認識できるようになる。それだけでなく，子どもは，証明によって全称性を確立したその命題を，別の命題の証明を構成する際に根拠として用い，演繹的な推論によって新たな事柄を導き出すことができるようになる。そして，こうした証明活動を繰り返すことによって，さらに新たな事柄を立証したり，事柄が成り立つ理由を説明したり，立証した知識を体系化して整理したりすることが期待される。

それゆえ，限量詞を用いて一般の形で表現された命題を考察の対象とし，全称命題を証明する一般的なプロセス，及び，記号論理学の立場からみた命題の全称性を証明で確立する仕

組みに基づいて，図形領域で命題の全称性を証明で確立するための，規範的な子どもの活動を特定する必要がある。

以上のことから，本研究では，論理的に考える力の育成を目指して，命題の全称性を証明で確立することに着目し，図形領域での命題の全称性を証明で確立するために必要な子どもの活動に焦点を当てることにする。

本研究の目的は，次の研究課題に答えることである。

図形領域で，命題の全称性を証明で確立するために，子どもはどんな活動をする必要があるか。

なお，本研究において，命題の全称性を証明[3]で確立することとは，命題が論及する図形の集合を，生成した証明の適用範囲が含むようにすることである。このことについては，第２章で詳しく述べる。

２．命題の全称性を証明で確立すること

2.1 本研究における命題の捉え

本研究では，命題を，学校数学において広く一般的に扱われている意味に依拠して，仮言命題「P ならば Q」の構造をもつものと捉え，P を命題の仮定，Q を命題の結論と呼ぶことにする。しかし，学校数学で扱われる命題は，「平行四辺形の 2 組の向かい合う辺はそれぞれ等しい」のように，必ずしも「P ならば Q」の形で表現されたものだけとは限らない。そこで，そのような場合には，命題からその仮定と結論を読みとることによって，命題が仮言命題「P ならば Q」の構造をもつと捉えることにする。

2.2 全称命題と命題が全称性を有することとの区別

本研究では, 全称命題を, ある図形の集合のすべての要素に論及する命題と規定する(千葉・東・若山, 1980; 近藤・好並, 2011)。そして，命題が全称性を有することを，ある図形の集合のすべての要素に論及する命題が成り立つことと規定する。全称命題は，単にある図形の集合のすべての要素に論及する命題であるので, 命題が成り立つか否かを含んだ概念ではない。それゆえ, 命題が全称性を有するという場合に, 全称命題が成り立つことを含むことにする。

2.3 命題の全称性を証明で確立する仕組み

記号論理学の立場からみた命題の全称性を証明で確立する仕組みは，次の通りである。まず，命題が論及する集合から一つ選んだある個体 t について証明しようとする命題の仮定が成り立つ（これを P(t)とする）とする。次に，演繹的な推論の方法を用いて個々の単称命題[4]の連鎖によって推論を進め，個体 t についての結論（これを Q(t)とする）を導き，単称命題（P(t)→Q(t)）を証明する。最後に，証明した単称命題（P(t)→Q(t)）に普遍汎化の推論規則を適用

[3] 本研究において，「証明」とは，「いつでも成り立つと認められた事柄を根拠として用いて，命題の仮定から命題の結論を導くこと」である。本研究では，演繹的に推論する力に焦点をあてるので，学校数学で広く用いられている意味に依拠して，上記のように規定し，「証明」に完全帰納は含めない。

[4] 本研究において，「単称命題」は，「ある特定の図形に論及する命題」を指す。例えば，一つの図に示された平行四辺形に論及する命題「平行四辺形 ABCD は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」は，ある特定の平行四辺形 ABCD に論及しているので単称命題である。

して，全称命題$\forall x\,(P(x)\rightarrow Q(x))$を導き，命題の全称性を証明で確立する(高﨑, 2014, p. 136)。

2.4 普遍汎化の推論規則とその適用条件の意味

命題の全称性を証明で確立する際の鍵となるのは，普遍汎化の推論規則である(宮川・國宗, 2015)。普遍汎化の推論規則とは，$A(t/x)$から$\forall xA(x)$を導く推論規則である(高﨑, 2014)。

普遍汎化の推論規則には，「$A(t/x)$の依存する仮定の中には，t が自由変数として現れないこと」(Lemmon, 2000, p. 185)という適用条件がある。この適用条件の意味は，「t についての命題が依存している仮定には，t そのものに関する特殊な仮定が含まれていないこと」(Lemmon, 2000, p. 139)である。論理学の論証では，命題の仮定のみならず，各要素[5]が成り立つ理由として用いられる事柄がすべて仮定と表現される(宮川・國宗, 2015)。また，t そのものに関する特殊な仮定とは，一つ選んだある個体 t のみに成り立つ性質のことである(高﨑, 2014)。これらのことから，普遍汎化の推論規則の適用条件は，図形領域の証明において次のように解釈することができる。

> 選んだ図形のみに成り立つ性質を，証明の中で各要素が成り立つ理由として用いていないこと。

そして，証明がこの適用条件を満たすときに，命題の全称性が証明で確立される。

例えば，命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい」の全称性を証明で確立するために，平行四辺形全体の集合から図 1 のような平行四辺形 ABCD を選び，次のように AB＝CD, BC＝DA を証明したとする。

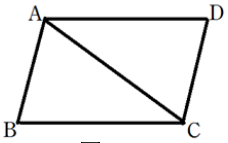


図 1

> 対角線 AC をひく。
> △ABC と△CDA において，
> 2 直線が平行であるならば，錯角は等しいので，
> 仮定 AB//DC より，∠BAC＝∠DCA　…①
> 仮定 AD//BC より，∠ACB＝∠CAD　…②
> 共通な辺は等しいので，AC が共通な辺であることから，
> AC＝CA　…③
> ①②③から，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい三角形は合同なので，
> △ABC≡△CDA
> 合同な図形では，対応する辺の長さはそれぞれ等しいので，
> AB＝CD，BC＝DA

この証明に用いられている事柄は，次の通りである。

> ①与えられた 2 点を結ぶ線分をただ一つひくことができる
> ②平行線の性質「2 直線が平行であるならば，錯角は等しい」

[5]「要素」は，証明の中である性質をもとに導かれる事柄を指す。論理学の論証では，例えば，「仮定$\forall x\,(P(x)\rightarrow R(x))$」に$\forall$E 規則(普遍例化規則)を適用して得られる「$P(t)\rightarrow R(t)$」のような，「仮定」に推論規則を適用して得られる事柄を指す。また，数学の図形領域の証明では，例えば，「共通な辺は等しいので，AC＝CA」という場合の「AC＝CA」のような，根拠をもとに導かれる事柄を指す。

③仮定 AB//DC，AD//BC
④共通な辺は等しい
⑤三角形の合同条件「1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい三角形は合同である」
⑥合同な図形の性質「合同な図形では，対応する辺の長さはそれぞれ等しい」

③は命題の仮定，①②④⑤⑥はいつでも成り立つと認められた事柄である。また，対角線が，それによって分けられた二つの三角形に共通する辺であることも，すべての平行四辺形について成り立つ事柄である。したがって，この証明には，辺の長さや角の大きさ，辺や角の位置関係などの，選んだ平行四辺形のみに成り立つ性質を各要素が成り立つ理由として用いていない。したがって，生成された証明はすべての平行四辺形に適用できるので，この証明をもとに，すべての平行四辺形について「2 組の向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい」が成り立つと結論付けることができる。つまり，生成された証明が，普遍汎化の推論規則の適用条件を満たすので，命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい」は成り立つといえる。

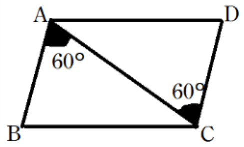


図 2

一方，命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい」の全称性を証明で確立するために，平行四辺形全体の集合から図 2 のような，∠BAC＝60°，∠DCA＝60°である平行四辺形 ABCD を選び，この平行四辺形のみに成り立つ∠BAC＝60°，∠DCA＝60°を∠BAC＝∠DCA が成り立つ理由として用いて，次のように AB＝CD, BC＝DA を証明したとする。

対角線 AC をひく。
△ABC と△CDA において，
　2 直線が平行であるならば，錯角は等しいので，
　　AD//BC より，　∠ACB＝∠CAD　…①
　同じものに等しいものはまた互いに等しいので，
　　∠BAC＝60°，∠DCA＝60°より，　∠BAC＝∠DCA　…②
　共通な辺は等しいので，　AC＝CA　…③
　①②③より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい三角形は合同なので，
　　△ABC≡△CDA
　合同な図形の対応する辺はそれぞれ等しいので，
　　AB＝CD，BC＝DA

この証明には，選んだ平行四辺形のみに成り立つ∠BAC＝60°，∠DCA＝60°を∠BAC＝∠DCA が成り立つ理由として用いているため，生成された証明は，∠BAC＝60°，∠DCA＝60°である平行四辺形にしか適用できないので，この証明をもとに，すべての平行四辺形について命題が成り立つと結論付けることはできない。つまり，生成された証明が，普遍汎化の推論規則の適用条件を満たさないので，この証明をもとに，命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい」が成り立つということはできない。

2.5 命題の全称性を証明で確立することの捉え

本研究では，命題の全称性を証明で確立することを，命題が論及する図形の集合を，生成

した証明の適用範囲[6]が含むようにすることであると規定する。なぜならば，生成された証明が普遍汎化の推論規則の適用条件を満たす場合には，普遍汎化の推論規則を適用することで命題の全称性が確立されるとともに，命題が論及する図形の集合を，生成した証明の適用範囲が含んでいることになるからである。また，命題の全称性を証明で確立することをこれら二つの集合の包含関係で規定することで，生成された証明が普遍汎化の推論規則の適用条件を満たさない場合にも，命題の全称性を証明で確立する道が開かれるからである。

図３

命題の全称性を証明で確立することの概念規定に基づくと，命題の全称性を証明で確立する場合には，次の三通りがある。

第一は，原命題[7]が論及する図形の集合と生成した証明の適用範囲とが一致する場合である。

例えば，原命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」の全称性を証明で確立するために，平行四辺形全体の集合から図 4 のような平行四辺形 ABCD を選び，平行四辺形 ABCD についての単称命題「四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC ならば，AD＝BC，AB＝DC である」を次のように証明したとする。

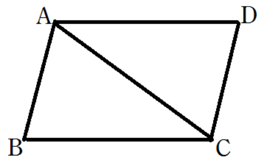


図４

対角線 AC をひく。
△ABC と△CDA において，
2 直線が平行であるならば，錯角は等しいので，
仮定 AB//DC より，　∠BAC＝∠DCA　…①
仮定 AD//BC より，　∠ACB＝∠CAD　…②
共通な辺は等しいので，　AC＝CA　…③
①②③から，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい三角形は合同なので，
△ABC≡△CDA
合同な図形では，対応する辺の長さはそれぞれ等しいので，
AB＝CD，BC＝DA
よって，四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC ならば，AD＝BC，AB＝DC である。

生成された証明は，普遍汎化の推論規則の適用条件を満たす。したがって，すべての平行四辺形について命題が成り立つと結論付けることができるので，上の証明によって，原命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」の，平行四辺形全体の集合における全称性が確立される。このとき，原命題が論及する図形の集合と生成した証明の適用範囲は，ともに平行四辺形全体の集合であり，それらは一致している。

第二は，原命題が論及する図形の集合を，生成した証明の適用範囲が含む場合である。

[6] 「証明の適用範囲」は，「証明によって命題が成り立つことが立証された図形の集合」を指す。
[7] 「原命題」は，「命題の全称性を証明で確立するための活動の起点で考察の対象とされる，一般の形で表現された命題」を指す。

例えば，原命題「頂角が鋭角または直角であるすべての二等辺三角形は，底辺の両端から対辺におろした垂直な線分の長さが等しい」の全称性を証明で確立するために，頂角が鋭角または直角である二等辺三角形全体の集合から図 5 のような二等辺三角形 ABC を選び，△ABC についての単称命題「△ABC において，AB＝AC，かつ，∠A≦90°ならば，BD＝CE である」を次のように証明したとする。

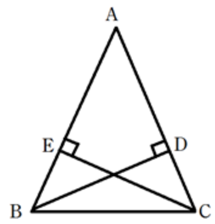


図 5

直線上にない 1 点からその直線に垂線をひくことができるので, 点 B から直線 AC におろした垂線の足を D，点 C から直線 AB におろした垂線の足を E とすると，

AC⊥BD，AB⊥CE

△EBC と△DCB において，

二等辺三角形の底角は等しいので，仮定 AB＝AC より，

∠EBC＝∠DCB …①

AC⊥BD，AB⊥CE より， ∠BEC＝∠CDB＝90° …②

共通な辺は等しいので， BC＝CB …③

①②③より，直角三角形の斜辺と 1 組の鋭角がそれぞれ等しいので，

△EBC≡△DCB

合同な図形では，対応する辺の長さが等しいので，

BD＝CE

よって，△ABC において，AB＝AC，かつ，∠A≦90°ならば， BD＝CE である。

生成された証明は，普遍汎化の推論規則の適用条件を満たす。したがって，頂角が鋭角または直角であるすべての二等辺三角形について命題が成り立つと結論付けることができるので，上の証明によって，原命題「頂角が鋭角または直角であるすべての二等辺三角形は，底辺の両端から対辺におろした垂直な線分の長さが等しい」の，頂角が鋭角または直角である二等辺三角形の集合における全称性が確立される。このとき，仮定「頂角が鋭角または直角であること」は証明に用いられていないので，生成した証明の適用範囲は二等辺三角形全体の集合となり，原命題が論及する図形の集合を，生成した証明の適用範囲が含んでいる。

なお，これら第一と第二の場合は，概念規定と一致する。

第三は，生成した証明の適用範囲を原命題が論及する図形の集合が含む場合である。この場合には，命題が論及する図形の集合を狭めて生成した証明の適用範囲と最低限一致させることで命題の全称性を証明で確立するか，証明の適用範囲を拡げて原命題が論及する図形の集合と最低限一致させることで原命題の全称性を証明で確立するかの二通りがある。なお，ここで「最低限」としているのは，この第三の場合に命題の全称性を証明で確立するには，必ずしも命題が論及する図形の集合が証明の適用範囲の真部分集合になるようにする必要はなく，二つの集合が一致するところまで命題が論及する図形の集合を狭めたり，証明の適用範囲を拡げたりすればよいからである。前者の場合，より限定的な命題を生成することで命題の全称性を証明で確立する。後者の場合，証明を改善することで原命題の全称性を証明で

確立する。

例えば，原命題「すべての二等辺三角形は，底辺の両端から対辺もしくはその延長線上におろした垂直な線分の長さが等しい」の全称性を証明で確立するために，二等辺三角形全体の集合から図 6 のような二等辺三角形 ABC を選び，△ABC についての単称命題「△ABC において，AB＝AC ならば，BD＝CE である」を，次のように，△ABD≡△ACE を示すことによって証明したとする。

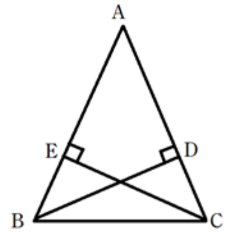


図 6

直線上にない 1 点からその直線に垂線をひくことができるので，点 B から直線 AC におろした垂線の足を D，点 C から直線 AB におろした垂線の足を E とすると，

AC⊥BD，AB⊥CE

△ABD と△ACE において，

仮定より，　AB＝AC　…①

AC⊥BD，AB⊥CE だから，　∠ADB＝∠AEC＝90°　…②

共通な角は等しいので，　∠BAD＝∠CAE　…③

①②③より，直角三角形の斜辺と 1 組の鋭角がそれぞれ等しいので，

△ABD≡△ACE

合同な図形では，対応する辺の長さが等しいので，

BD＝CE

よって，△ABC において，AB＝AC ならば，BD＝CE である。

生成された証明は，∠BAD と∠CAE が二つの△ABD と△ACE に共通する角であるという，頂角が鋭角である二等辺三角形のみに成り立つ性質を∠BAD＝∠CAE が成り立つ理由として用いているので，普遍汎化の推論規則の適用条件を満たさない。生成された証明は，頂角が鋭角である二等辺三角形にしか適用できないので，生成した証明の適用範囲を原命題が論及する図形の集合が含んでいる。このとき，前者の場合には，より限定的な命題「頂角が鋭角であるすべての二等辺三角形は，底辺の両端から対辺におろした垂直な線分の長さが等しい」を生成することで，命題が論及する図形の集合と証明の適用範囲をともに頂角が鋭角である二等辺三角形の集合に一致させて，命題の全称性を前述の証明で確立する。また，後者の場合には，△EBC≡△DCB を示す別の証明を生成することで，原命題が論及する図形の集合と証明の適用範囲を一致させて，原命題の全称性を証明で確立する。

３．命題の全称性を証明で確立するための活動

第 1 章で述べたように，本研究では，限量詞を用いて一般の形で表現された命題を考察の対象とし，全称命題を証明する一般的なプロセス，及び，記号論理学の立場からみた命題の全称性を証明で確立する仕組みに基づいて，図形領域で命題の全称性を証明で確立するための，規範的な子どもの活動を特定する。

数学の図形領域における，全称命題を証明する一般的なプロセスは，次のようになっている(中村, 1971)。

まず始めに，証明の対象となるものが一般の形で命題として述べられる。なぜならば，証明しようとする図形の性質を一般の形で述べた命題として表現することによって，それが成り立つか否かを確定することができるようになるので，それを証明の対象にすることができるからである。次に，証明の対象である一般の形で述べられた命題が記号を付けた形で具体的に述べられる。なぜならば，一般の形で述べた命題のままでは証明を生成することができないからである。次に，記号を用いて証明が行われる。なぜならば，記号を用いることによって，普遍例化や仮言三段論法などの演繹的な推論の方法を用いて命題の仮定から結論を導くことができるからである。最後に，証明すべき命題がもう一度結論として述べられる。なぜならば，記号を用いて証明を生成した時点では，証明されたのは，あくまでもかかれた図について具体的に表現された事柄だからである。それゆえ，普遍汎化の推論を行って，証明の対象であった一般の形で表現された命題が証明されたことを示す必要がある。

本研究では，この，全称命題を証明する一般的なプロセスに，第 2 章で述べた記号論理学の立場からみた命題の全称性を証明で確立する仕組み，及び，命題の全称性を証明で確立することの概念規定を埋め込むことによって，全称命題を証明する一般的なプロセスを，命題の全称性を証明で確立するプロセスとして強化し，命題の全称性を証明で確立するための，規範的な子どもの活動を特定する。

3.1 原命題が論及する集合の確定

(1) 原命題が論及する図形の集合を確定する

命題の全称性を証明で確立することの概念規定に基づくと，命題の全称性を証明で確立することとは，命題が論及する図形の集合を，生成した証明の適用範囲が含むようにすることであるので，命題の全称性を証明で確立するためには，始めに原命題が論及する図形の集合を確定しておく必要がある。それゆえ，子どもは，始めに原命題が論及する図形の集合を確定する活動をする必要がある。

例えば，原命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」の全称性を証明で確立したいとする。このとき，いくつかの代表的な平行四辺形や，極端に縦長や横長の平行四辺形などを表す図をかいて向かい合う辺の長さが等しそうかどうかを調べても，原命題が成り立ちそうであることが確認される。また，2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行な四角形として，特殊な図形である長方形などを表す図をかいて向かい合う辺の長さが等しそうかどうかを調べても，やはり，原命題が成り立ちそうであることが確認される。しかし，「2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行な四角形」を満たさない，台形を表す図をかいて向かい合う辺の長さが等しそうかどうかを調べると，明らかに向かい合う辺の長さは等しくないことが確認される。したがって，平行四辺形全体の集合において原命題が全称性を有するであろうという確信が強まり，原命題が論及する図形の集合を平行四辺形全体の集合に確定することができる。このことによって，平行四辺形全体の集合において命題が全称性を有することを証明で確立することが可能になる。

一方で，原命題「すべての平行四辺形は，対角線が垂直に交わる」の全称性を証明で確立したいとする。このとき，極端に縦長や横長の平行四辺形を表す図をかいて対角線が垂直に

交わるかどうかを調べると，明らかに対角線が垂直に交わらないことが確認される。また，2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行な四角形として，特殊な図形である長方形などを表す図をかいて対角線が垂直に交わるかどうかを調べても，明らかに対角線が垂直に交わらないことが確認される。命題が論及する図形の集合の中のある図形について原命題が成り立たないことが発見されたので，原命題が論及する図形の集合を平行四辺形全体の集合に確定することはできない。そのため，この場合には，平行四辺形全体の集合における原命題の全称性を証明で確立することはできない。

これらのことから，命題の全称性を証明で確立するためには，子どもは，始めに原命題が論及する図形の集合を確定する活動をする必要がある。

3.2 単称命題の生成

数学の図形領域における，全称命題を証明する一般的なプロセスに基づくと，図形領域の直接証明では，一般の形で表現された命題を証明するために，その証明すべき命題を，記号を付けた形で具体的に表現する。また，記号論理学の立場からみた命題の全称性を証明で確立する仕組みに基づくと，直接証明では，命題が論及する集合から一つ選んだある個体 t について，証明しようとする命題の仮定が成り立つとして，個体 t についての単称命題を証明する。それゆえ，命題の全称性を証明で確立するためには，原命題を，記号を付けた形で具体的に述べたある図形についての単称命題として表現しておく必要がある。

(1) 命題が論及する図形の集合から任意に一つ図形を選び，記号を用いて図に表す

原命題を，記号を付けた形で具体的に述べたある図形についての単称命題として表現するためには，子どもはまず，命題が論及する図形の集合から任意に一つ図形を選び，記号を用いて図に表す必要がある。

例えば，原命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」の全称性を証明で確立するためには，原命題を，記号を付けた形で具体的に述べたある平行四辺形についての単称命題として表現する必要がある。そのためには，まず，「原命題が論及する集合の確定」の際に調べた複数の平行四辺形の図をもとに，命題が論及する図形の集合である平行四辺形全体の集合から無作為に平行四辺形を一つ選び，それを平行四辺形 ABCD として図に表す必要がある。

(2) 選んだ図形についての単称命題を構成する

次に，子どもは，命題の全称性を証明で確立するために，命題が論及する図形の集合から一つ選んだ図形についての単称命題を構成する必要がある。そのために，子どもは，原命題を仮言命題「P ならば Q」の形に表現し直すことによって，原命題の仮定と結論を明確にし，仮定と結論を，それぞれ記号を用いて表す必要がある。

例えば，原命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」の全称性を証明で確立するために，原命題を，平行四辺形全体の集合から一つ選んだ平行四辺形 ABCD についての単称命題として表現する必要がある。そのために，子どもは，原命題を仮言命題の形で「四角形が平行四辺形ならば，それらすべての四角形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」と表現し直すことによって，原命題の仮定が「四角形は平行四辺形であ

る」こと，原命題の結論が「それらすべての四角形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」ことを明確にし，仮定と結論を，それぞれ記号を用いて，「四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC」，「四角形 ABCD において，AD＝BC，AB＝DC」と表す必要がある。こうすることによって，平行四辺形全体の集合から一つ選んだ平行四辺形 ABCD についての単称命題「四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC ならば，AD＝BC，AB＝DC である」を構成することができる。そして，仮定「AD//BC，AB//DC」から，演繹的な推論の方法を用いて推論を進め，結論「AD＝BC，AB＝DC」を導き，単称命題「四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC ならば，AD＝BC，AB＝DC である」を証明して，原命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」の全称性を証明で確立することが可能になる。

3.3 証明の生成

記号論理学の立場からみた命題の全称性を証明で確立する仕組みに基づくと，直接証明では，命題が論及する集合から一つ選んだある個体 t についての単称命題を証明するので，図形領域においても，命題の全称性を証明で確立するためには，子どもは，単称命題についての証明を生成する必要がある。

(1) 証明の構想を立てる

一般に，証明の生成とは，証明の構想を立て，その構想に基づいて証明を構成することである。なぜならば，数学において証明する活動は本来課題探究的であり，少なくとも命題の生成，証明の生成(構想・構成)，振り返り(解釈・評価・改善)という側面を有しているからである(Miyazaki and Fujita, 2015)。数学において証明を構成しようとする際には，何らかの証明の構想を立てたうえで証明を構成する。証明の構想を明示することなく証明を構成する場合もあるが，何ら証明の構想を立てることなく，やみくもに証明を構成することは考えられない。一方で，近年，学校数学において，課題解決のための構想を立てて実践し，評価・改善するという探究的な学びの過程が重視され(文部科学省, 2017, p. 62)，証明学習においても，子どもが証明の構想を立てることができるようにすることが求められている(文部科学省・国立教育政策研究所, 2013, p. 114)。それゆえ，命題の全称性を証明で確立することを目指して単称命題についての証明を生成する場合にも，子どもは，始めに証明の構想を立てる必要がある。

例えば，原命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」の全称性を証明で確立するためには，平行四辺形全体の集合から一つ選んだ図 7 の平行四辺形 ABCD についての単称命題「四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC ならば，AD＝BC，AB＝DC である」の証明を生成する必要がある。そのために，子どもは始めに，次のような証明の構想を立てる必要がある。

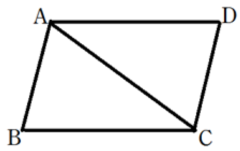


図 7

❶ AD と BC，AB と DC をそれぞれ 1 辺にもつ二つの三角形が合同であることを示せれば，合同な図形の性質を使って AD＝BC，AB＝DC を導くことできる。だから，AD＝BC，AB＝DC を証明するには，対角線 AC をひき，△ABC≡△CDA を示せばよい。

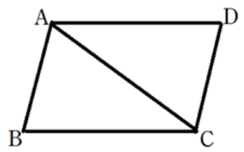
❷　△ABC と△CDA について等しい辺や角をみつける。平行線の性質から，∠BAC＝∠DCA と∠ACB＝∠CAD がいえる。

❸　❶と❷を結び付けられそうかどうかを検討する。❷から，三角形の合同条件「1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい三角形は合同である」を使って，△ABC≡△CDA を示せそうである。

⑵ 構想に基づいて証明を構成する

次に，子どもは，原命題の全称性を証明で確立するために，立てた構想に基づいて証明を構成する必要がある。

例えば，子どもは，3.3⑴の構想に基づいて，単称命題「四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC ならば，AD＝BC，AB＝DC である」の証明を，次のように構成する必要がある。

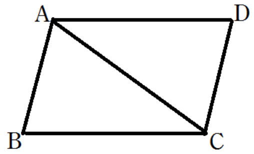


対角線 AC をひく。
△ABC と△CDA において，
　2 直線が平行であるならば，錯角は等しいので，
　　仮定 AB//DC より，∠BAC＝∠DCA　…①
　　仮定 AD//BC より，∠ACB＝∠CAD　…②
　共通な辺は等しいので，　AC＝CA　　…③
　①②③から，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい三角形は合同なので，
　　　　　　　　△ABC≡△CDA
　合同な図形では，対応する辺の長さはそれぞれ等しいので，
　　　　　　　　AB＝CD，BC＝DA
よって，四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC ならば，AD＝BC，AB＝DC である。

⑶ 構成された証明に論理的な誤りがないかどうかを判断し誤りを解消する

構成された単称命題の証明に論理的な誤りがない場合にのみ，普遍汎化の推論規則を適用して，命題の全称性を証明で確立することができる。それゆえ，次に子どもは構成された証明に論理的な誤りがないかどうかを判断し，誤りがある場合にはそれを解消する必要がある。

例えば，原命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」の全称性を証明で確立するために，命題が論及する図形の集合から一つ選んだ平行四辺形 ABCD についての単称命題「四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC ならば，AD＝BC，AB＝DC である」を次のように証明したとする。



対角線 AC をひく。
△ABC と△CDA において，
　仮定より，　　　　　　BC＝DA　…①
　2 直線が平行であるならば，錯角は等しいので，
　　仮定 AD//BC より，　∠ACB＝∠CAD　…②
　共通な辺は等しいので，　AC＝CA　…③
　①②③から，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい三角形は合同なので，

△ABC≡△CDA
だから，　AB＝CD，BC＝DA
よって，四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC ならば，AD＝BC，AB＝DC である。

構成された証明は，①の部分で結論を仮定として用いているため，循環論法に陥っている。また，△ABC≡△CDA から AB＝CD，BC＝DA を導く際の根拠が示されておらず，これらが普遍例化の推論によって演繹的に結び付いているとは言い難い。つまり，構成された証明には論理的な誤りがあるので，そもそも単称命題が成り立つことを保証できない。したがって，この場合には普遍汎化の推論規則を適用して命題の全称性を証明で確立することはできない。

一方で，①の部分を「2 直線が平行であるならば，錯角は等しいので，仮定 AB//DC より，∠BAC＝∠DCA」とし，それに伴って用いる三角形の合同条件を修正し，根拠「合同な図形では，対応する辺の長さはそれぞれ等しい」を示して△ABC≡△CDA から AB＝CD，BC＝DA を導いた場合には，構成された証明は循環しておらず，普遍例化と仮言三段論法によって，仮定 AD//BC，AB//DC から，結論 AD＝BC，AB＝DC まで演繹的に結び付いている。したがって，構成された証明には論理的な誤りがないので，普遍汎化の推論規則を適用して，命題の全称性を証明で確立することができる。

このように，命題の全称性を証明で確立するために，子どもは，構成された証明に論理的な誤りがないかどうかを判断し，誤りがある場合にはそれを解消する必要がある。

3.4 命題が論及する図形の集合と証明の適用範囲との関係の吟味，及び，命題の限定化または証明の改善

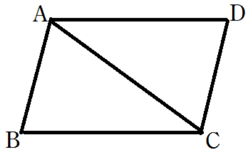
命題の全称性を証明で確立することの概念規定に基づくと，命題の全称性を証明で確立するためには，命題が論及する図形の集合を，生成した証明の適用範囲が含むようにする必要がある。そのために，子どもは，原命題が論及する図形の集合と証明の適用範囲との包含関係を明らかにし，必要に応じてより限定的な命題を生成したり，証明を改善したりする必要がある。

(1) 原命題が論及する図形の集合と生成した証明の適用範囲との関係を明らかにする

命題の全称性を証明で確立することの概念規定に基づくと，命題の全称性を証明で確立することとは，命題が論及する図形の集合を，生成した証明の適用範囲が含むようにすることである。それゆえ，子どもは，命題の全称性を証明で確立するために，原命題が論及する図形の集合と生成した証明の適用範囲との包含関係を明らかにする必要がある。そのために，子どもは，生成された証明が，普遍汎化の推論規則の適用条件を満たすかどうかを判断する必要がある。

例えば，原命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」の全称性を証明で確立するために，命題が論及する図形の集合から一つ選んだ平行四辺形 ABCD についての単称命題「四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC ならば，AD＝BC，AB＝DC である」を次のように証明したとする。

対角線 AC をひく。



△ABC と△CDA において，

2 直線が平行であるならば，錯角は等しいので，

仮定 AB//DC より，　∠BAC＝∠DCA　…①

仮定 AD//BC より，　∠ACB＝∠CAD　…②

共通な辺は等しいので，　AC＝CA　…③

①②③から，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい三角形は合同なので，

△ABC≡△CDA

合同な図形では，対応する辺の長さはそれぞれ等しいので，

AB＝CD，BC＝DA

よって，四角形 ABCD において，AD//BC，AB//DC ならば，AD＝BC，AB＝DC である。

この証明は，あくまでも命題が論及する図形の集合から一つ選んだ平行四辺形 ABCD についての単称命題の証明である。したがって，原命題の全称性を証明で確立するためには，次のように，原命題が論及する図形の集合と生成した証明の適用範囲との関係を明らかにする必要がある。

そこで，証明に用いられている事柄を抽出すると，それは，次の通りである。

①与えられた 2 点に対し，その 2 点を結ぶ線分をただ一つひくことができる
②平行線の性質「2 直線が平行であるならば，錯角は等しい」
③仮定 AB//DC，AD//BC
④共通な辺は等しい
⑤三角形の合同条件「1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい三角形は合同である」
⑥合同な図形の性質「合同な図形では，対応する辺の長さはそれぞれ等しい」

③は命題の仮定，①②④⑤⑥はいつでも成り立つと認められた事柄である。また，対角線が，それによって分けられた二つの三角形に共通する辺であることも，すべての平行四辺形について成り立つ事柄である。したがって，生成された証明は，辺の長さや角の大きさ，辺や角の位置関係などの，選んだ平行四辺形のみに成り立つ性質を，証明の中で各要素が成り立つ理由として用いていないので，普遍汎化の推論規則の適用条件を満たす。また，命題の仮定の中で証明に用いられていないものはないので，原命題が論及する図形の集合と生成した証明の適用範囲は，ともに平行四辺形全体の集合であり，それらは一致する。このことによって，子どもは，原命題「すべての平行四辺形は，2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい」の全称性を前述の証明で確立することができる。

(2) 原命題が論及する図形の集合と証明の適用範囲のどちらの集合に最低限一致させるかを選択する

生成した証明の適用範囲を原命題が論及する図形の集合が含む場合には，命題が論及する図形の集合を狭めて生成した証明の適用範囲と最低限一致させることで命題の全称性を証明で確立するか，証明の適用範囲を拡げて原命題が論及する図形の集合と最低限一致させることで原命題の全称性を証明で確立するかの二通りがある。それゆえ，命題の全称性を証明で確立するために，子どもは，命題が論及する図形の集合を狭めて生成した証明の適用範囲と

最低限一致させるか，証明の適用範囲を拡げて原命題が論及する図形の集合と最低限一致させるかを選択する必要がある。

例えば，原命題「すべての二等辺三角形は，底辺の両端から対辺もしくはその延長線上におろした垂直な線分の長さが等しい」の全称性を証明で確立するために，命題が論及する図形の集合である二等辺三角形全体の集合から一つ選んだ二等辺三角形 ABC についての単称命題「∆ABC において，AB＝AC ならば，BD＝CE である」を次のように証明したとする。

直線上にない 1 点からその直線に垂線をひくことができるので，点 B から直線 AC におろした垂線の足を D，点 C から直線 AB におろした垂線の足を E

とすると，　AC⊥BD，AB⊥CE

∆ABD と∆ACE において，

仮定より，　AB＝AC　…①

AC⊥BD，AB⊥CE だから，　∠ADB＝∠AEC＝90°　…②

共通な角は等しいので，　∠BAD＝∠CAE　…③

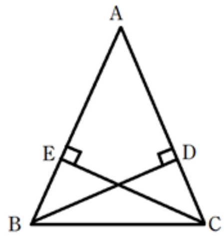
①②③より，直角三角形の斜辺と 1 組の鋭角がそれぞれ等しいので，

∆ABD≡∆ACE

合同な図形では，対応する辺の長さが等しいので，

BD＝CE

よって，∆ABC において，AB＝AC ならば，　BD＝CE である。



生成された証明には，∠BAD と∠CAE が二つの∆ABD と∆ACE に共通する角であることを用いている。しかし，頂角が鈍角である二等辺三角形の場合には，これらの角は対頂角になるので，この証明は成り立たない。つまり，生成された証明には，∠BAD と∠CAE が二つの∆ABD と∆ACE に共通する角であるという，頂角が鋭角である二等辺三角形のみに成り立つ性質を∠BAD＝∠CAE が成り立つ理由として用いている。したがって，生成された証明は，普遍汎化の推論規則の適用条件を満たさない。このとき，生成した証明の適用範囲は頂角が鋭角である二等辺三角形の集合であるので，生成した証明の適用範囲を原命題が論及する図形の集合が含んでいる。

この場合には，命題の全称性を証明で確立するために，命題が論及する図形の集合を狭めて証明の適用範囲である頂角が鋭角の二等辺三角形の集合に最低限一致させるか，証明の適用範囲を拡げて原命題が論及する集合である二等辺三角形全体の集合に最低限一致させるかを選択する必要がある。

(3) 原証明の中の論駁された補題が成り立つ条件を特定する

命題が論及する図形の集合を狭めて生成した証明の適用範囲と最低限一致させることを選択した場合には，より限定的な命題を生成する必要がある。そのためには，命題に付加すべき条件を特定することが求められる。それゆえ，子どもは，原証明の中の論駁された補題が成り立つ条件を特定する必要がある。

例えば，3.4(2)の二等辺三角形の例において，命題が論及する図形の集合を狭めて生成した証明の適用範囲と最低限一致させることを選択したとする。その場合，命題の全称性を証

明で確立するためには，命題に付加すべき条件を特定することが求められる。そこで，子どもは，原証明の中で論駁された補題が「二等辺三角形 ABC では，∠BAD と∠CAE が△ABD と△ACE に共通する角である」ことを見い出し，この補題が成り立つ条件が「三角形が，頂角が鋭角である二等辺三角形である」ことを特定する必要がある。このことにより，命題が論及する集合を頂角が鋭角である二等辺三角形の集合に限定して，命題の全称性を 3.4(2)の証明で確立することができるようになる。

(4) より限定的な命題を生成する

命題が論及する図形の集合を狭めて生成した証明の適用範囲と最低限一致させることを選択し，原証明の中の論駁された補題が成り立つ条件を特定した場合，命題の全称性を証明で確立するためには，その特定された条件を命題の条件に付加して，より限定的な命題を生成することが求められる。それゆえ，子どもは，その特定された条件を命題の条件に付加して，より限定的な命題を生成する必要がある。

例えば，3.4(2)の二等辺三角形の例において，原証明の中で論駁された補題が「二等辺三角形 ABC では，∠BAD と∠CAE が△ABD と△ACE に共通する角である」ことを見い出し，この補題が成り立つ条件が「三角形が，頂角が鋭角である二等辺三角形である」ことを特定したとする。この場合には，命題の全称性を証明で確立するために，その特定された「三角形が，頂角が鋭角である二等辺三角形であること」を命題の条件に付加して，より限定的な命題「頂角が鋭角であるすべての二等辺三角形は，底辺の両端から対辺におろした垂直な線分の長さが等しい」を生成する必要がある。このことによって，命題が論及する集合が，証明の適用範囲である頂角が鋭角の二等辺三角形の集合に一致するので，より限定的な命題「頂角が鋭角であるすべての二等辺三角形は，底辺の両端から対辺におろした垂直な線分の長さが等しい」の全称性を 3.4(2)の証明で確立することができる。

(5) 証明を改善する

一方で，証明の適用範囲を拡げて原命題が論及する図形の集合と最低限一致させることを選択した場合には，原命題が論及する図形の集合を含む適用範囲をもつ証明を生成する必要がある。それゆえ，子どもは，証明を改善する必要がある。

例えば，3.4(2)の二等辺三角形の例において，証明の適用範囲を拡げて原命題が論及する図形の集合と最低限一致させることを選択したとする。その場合には，命題の全称性の証明で確立するために，証明の適用範囲が，原命題の論及する図形の集合である二等辺三角形全体の集合に最低限一致するように証明を改善する必要がある。それゆえ，子どもは，頂角の大きさで三通りに場合分けをしたり，別の二つの△EBC と△DCB が合同であることを示すことで抜本的に別のよりよい証明を考案したりして，証明を改善する必要がある。

４．研究の結論と今後の課題

4.1 研究の結論

本研究の結論は，次の通りである。

図形領域で，命題の全称性を証明で確立するために，子どもは次の活動をする必要がある。

Ⅰ　原命題が論及する集合の確定
　Ⅰa　原命題が論及する図形の集合を確定する
Ⅱ　単称命題の生成
　Ⅱa　命題が論及する図形の集合から任意に一つ図形を選び，記号を用いて図に表す
　Ⅱb　選んだ図形についての単称命題を構成する
Ⅲ　証明の生成
　Ⅲa　証明の構想を立てる
　Ⅲb　構想に基づいて証明を構成する
　Ⅲc　構成された証明に論理的な誤りがないかどうかを判断し誤りを解消する
Ⅳ　命題が論及する図形の集合と証明の適用範囲との関係の吟味，及び，命題の限定化または証明の改善
　Ⅳa　原命題が論及する図形の集合と生成した証明の適用範囲との関係を明らかにする
　Ⅳb　原命題が論及する図形の集合と証明の適用範囲のどちらの集合に最低限一致させるかを選択する
　Ⅳc　原証明の中の論駁された補題が成り立つ条件を特定する
　Ⅳd　より限定的な命題を生成する
　Ⅳe　証明を改善する

4.2 研究の意義

本研究の結論のもつ，研究上の意義は，次の通りである。

図形領域での命題の全称性を証明で確立することに関する従来の研究の限界は，図が付され記号を用いて表された命題を証明の対象とした場合には，証明された命題についての子どもの認識は多様になること，「記号化」や「文章化」に対応する，規範的な子どもの活動についての考察は行われていないこと，証明を生成する文脈における，図形領域での命題の全称性を証明で確立するために必要な子どもの活動は考察の対象とされていないこと，図形領域において，記号論理学の立場からみた命題の全称性を証明で確立する仕組みに基づいて，命題の全称性を証明で確立するために必要な子どもの活動を特定する研究は行われていないことであった。

これらに対して，本研究の新規性は，一般の形で表現された命題を考察の対象とし，全称命題を証明する一般的なプロセス，及び，記号論理学の立場からみた命題の全称性を証明で確立する仕組みに基づいて，図形領域で証明を生成する文脈における，命題の全称性を証明で確立するための，規範的な子どもの活動を特定したことである。具体的には，限量詞を用いて一般の形で表現された命題を考察の対象とし，記号論理学の立場からみた命題の全称性を証明で確立する仕組みに基づいて，命題が論及する図形の集合を確定して単称命題を生成する活動と，証明の生成後に命題の全称性を証明で確立する活動の双方を含めた，図形領域で命題の全称性を証明で確立するための，規範的な子どもの活動を特定したことである。

また，実践上の意義は，主に次の二点である。

第一は，全称命題を証明する場面における，学習指導のあるべき姿に示唆を与えることで

ある。具体的には，二等辺三角形や平行四辺形の性質などの全称命題を証明する学習場面において，指導者は，原命題が論及する図形の集合を確定して単称命題を生成する活動と，証明の生成後に命題の全称性を証明で確立する活動に焦点を当てた学習指導を行うことが重要であることが明らかになったことである。

第二は，命題の全称性を証明で確立するための活動として，柔軟な子どもの活動を実現し得ることが示されたことである。具体的には，子どもは，原命題が論及する図形の集合と証明の適用範囲の包含関係の三通りのどの場合でも命題の全称性を証明で確立する経験ができること，特に，証明の適用範囲を原命題が論及する図形の集合が含む場合にも，より限定的な命題を生成したり証明を改善したりすることで，命題の全称性を証明で確立する経験をできることが示されたことである。

4.3 今後の課題

本研究に残された今後の課題は，次の四点である。

第一は，本研究で特定した，図形領域で，命題の全称性を証明で確立するために子どもが行う必要のある 11 の活動の順序性の明確化，第二は，「命題の全称性を証明で確立するための子どもの活動」を実現するためのカリキュラム開発，第三は，「命題の全称性を証明で確立するための子どもの活動」を実現するための指導法の開発と実施，その有効性の検証，第四は，証明による命題の全称性の確立に関する評価法の開発と実施，及び，その成果に基づいてのカリキュラムや指導法の評価・改善である。

謝　辞

本論文をまとめるにあたり，信州大学大学院教育学研究科数学教育専修の先生方をはじめ，多くの方々からご指導とご支援を賜りました。ここに厚く御礼を申し上げます。

引用・参考文献

千葉茂美・東千尋・若山玄芳 (1980). *論理学入門*. 学陽書房.

茅野公穂 (2006). 学校数学における証明の機能に関する研究: 「発見」にかかる生徒の認識を捉える枠組み. *第 39 回数学教育論文発表会論文集*, 565-570.

茅野公穂 (2003). 学校数学における証明の機能: 生徒の記述内容についての分析. *第 36 回数学教育論文発表会論文集*. 307-312.

国立教育政策研究所 (2013). *社会の変化に対応する資質や能力を育成する教育課程編成の基本原理*. https://www.nier.go.jp/kaihatsu/pdf/Houkokusho-5.pdf.

国立教育政策研究所 (2006). 特定の課題に関する調査（算数・数学）調査結果（小学校・中学校）. https://www.nier.go.jp/kaihatsu/tokutei/04002030200004000.pdf.

近藤洋逸・好並英司 (2011). *論理学入門*. 東京: 岩波書店.

小関熙純, 家田晴行, 春日龍郎, 國宗進, 小寺隆幸, 中西知真紀, 山下国広 (1978). 図形における論証指導について（その 1）, *日本数学教育学会誌*, *60*(1), 12-19.

小関熙純, 國宗進, 小寺隆幸, 家田晴行, 中西知真紀, 山下国広 (1976). 図形における論証指

導について: 基礎調査（その 1, その 2）. *日本数学教育学会誌, 臨時増刊, 総会特集号, 58*, 240-241.

國宗進 (1987). 「論証の意義」の理解に関する発達の研究. *数学教育学論究, Vol.47/48*, 3-23.

Lemmon, E. J. (2000). *論理学初歩（竹尾治一郎・浅野楢英訳）*. 京都: 世界思想社.

宮川健・國宗進 (2015). 中等教育を一貫する論証指導の視点からみた一般性の扱いについて: 文字式を用いた代数的な証明の場合. *日本数学教育学会第 3 回春期研究大会論文集*, 75-82.

Miyazaki, M. and Fujita, T. (2015). Proving as an explorative activity in mathematics education: new trends in Japanese research into proof. In Sriraman, B. (Eds.), *First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India (International Sourcebooks in Mathematics and Science Education)*. pp. 1375–1407.

文部科学省 (2017). *中学校学習指導要領.* http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2017/05/12/1384661_5_2.pdf.

文部科学省 (2008). *中学校学習指導要領解説数学編.* 東京: 教育出版.

文部科学省・国立教育政策研究所 (2016). *平成 28 年度全国学力学習状況調査報告書.* http://www.nier.go.jp/16chousakekkahoukoku/report/data/16mmath.pdf.

文部科学省・国立教育政策研究所 (2013). *平成 25 年度全国学力学習状況調査報告書.* http://www.nier.go.jp/13chousakekkahoukoku/report/data/13mmath.pdf.

中村幸四郎 (1971). *ユークリッド原論.* 東京: 共立出版.

中西知真紀 (1977). 図形における論証指導について: 「記号化」に関する実態調査とその指導の試み. *日本数学教育学会誌, 臨時増刊, 総会特集号, 59*, 263.

清水禎文 (2012). ジェネリック・スキル論の展開とその政策的背景. *東北大学大学院教育学研究科研究年報, 61*(1), 275-287.

杉山吉茂 (2010). *復刻 公理的方法に基づく算数・数学の学習指導.* 東京: 東洋館出版社.

高崎金久 (2014). *学んでみよう！記号論理.* 東京: 日本評論社.

山下国広 (1977). 図形のおける論証指導について: 「一般化」に関する実態調査とその指導の試み. *日本数学教育学会誌, 臨時増刊, 総会特集号, 59*, 264.

（2017年 4月27日　受付）
（2017年 7月19日　受理）