

信州大学審査学位論文

Higgs ポテンシャルへの重力の量子補正とその影響

2017 年 9 月

堀越 聖篤

概要

本論文では Higgs ポテンシャルに対しての重力の量子補正を Einstein 重力と R^2 重力の二つの重力理論で考察していく。

現在素粒子分野で最も有力とされている理論が標準模型である。この標準模型が预言する粒子は Higgs 粒子の発見によってすべて実験で確認されており、それぞれの質量の大きさもニュートリノといった非常に軽いものを除けば高い精度でわかってきている。特にトップクォークと Higgs 粒子の質量がわかってきたことにより、標準模型内で唯一のポテンシャルである Higgs ポテンシャルの高エネルギースケールでの振る舞いが良くわかってきた。

Higgs ポテンシャルは標準模型内で唯一のポテンシャルであり、現在我々が観測しているような 10^2 GeV オーダーまでの低エネルギースケールではこのポテンシャルは安定な形を保っており、Higgs 場はこのポテンシャルの安定点に落ち着いている。このポテンシャルに対しての量子補正を考えることにより高いエネルギースケールでのポテンシャルの振る舞いも予測することができる。標準模型内での 1, 2-loop レベルの量子補正を考えると、トップクォークと Higgs 粒子の質量の値によっては Planck 質量を超えた非常に高いエネルギースケールまで安定性が保たれている可能性が示唆されている。

この Planck 質量のエネルギースケールでは重力の量子補正が無視できなくなっていると考えられる。そのため Higgs ポテンシャルの振る舞いを Planck 質量のエネルギースケールまで预言するには重力の量子補正を考える必要がある。しかしながら重力の量子的な振る舞いは現在良くわかっておらず、それを記述する理論もわかっていない。

本論文ではまず古典的な重力理論である Einstein 重力を元に重力場の揺らぎを量子効果として扱い Higgs ポテンシャルに対する影響を考えていく。Einstein 重力による Higgs ポテンシャルに対する量子補正を考えていくと場の 6 乗や 8 乗といった Higgs 場の高次の項が生成されてくる。これらの項の係数は条件式の不足から値を決定することができない。この問題を解決するためカットオフスケールを導入することによってこれらの係数の決定を行っていく。解析では標準模型内での 1, 2-loop と重力の 1-loop の量子補正を考えていく。Higgs 場の 2 乗, 4 乗の項の係数は繰り込みを行いエネルギースケールに対しての依存性を解析していく。高次の項は量子補正によって得られた式に対し、カットオフスケールの設定と Higgs 場の 2 乗, 4 乗の項の係数を繰り込まれたものに置き換えた上で解析を行った。解析を行っていくと Higgs 場の 4 乗の項の係数はプランク質量近傍のスケールで重力の影響を強く受け負の値になってしまうが、Higgs 場の高次の項の影響でポテンシャル自体は安定となったことがわかる。しかしながら導入したカットオフの影響を解析してみると、そのカットオフの値への依存度が非常に強いことがわかる。このことか

らプランク質量近傍では重力の影響が非常に強く無視することができなくなることは予言できるがポテンシャルが安定かどうかの議論は非常に困難となっている．次にこのカットオフの問題を解決を考えていく．本論文では高エネルギー領域での重力場の振る舞いが良いと考えられている $f(R)$ 理論のひとつである R^2 重力に着目し、カットオフへの依存性がどのようなになっているかを考えた．量子補正を計算していくと、 R^2 重力による量子補正は Einstein 重力同様 Higgs 場の 6 乗や 8 乗といった高次の項を生成するが、これらの項は発散せず有限量として現れることがわかった．これによりカットオフへの依存性は非常に小さくなることを確認した．

最後に Einstein 重力によるポテンシャルへの量子補正を基にして宇宙定数問題に関して考えた．素粒子理論と Einstein 重力理論を単純に組み合わせた際に定数項の大きさが理論と観測で大きくかけ離れてしまっている．本論文ではこの問題に対して、重力子の特性と物質場との関係性に関して大胆な仮定を立てることで真空エネルギーの大部分を宇宙定数から切り離し、重力の量子補正を主体とした宇宙定数を考えた．この仮定の下宇宙定数の大きさを観測値とあわせて考えていくことで TeV スケールでの物理が存在する必要性を確認した．

目次

Introduction	1
1 標準模型内での 1-loop	4
1.1 標準模型内での Higgs ポテンシャルと安定性	4
1.2 Landau ポールからの制限	5
1.3 標準模型内での 1-loop	6
1.4 標準模型内での 2-loop	8
2 Einstein 重力による量子効果	11
2.1 Set up	11
2.2 重力場の揺らぎ	11
2.3 重力による量子補正	18
2.4 解析	22
2.5 結論	25
3 R^2 重力による量子効果	26
3.1 Set up	26
3.2 R^2 重力による量子補正	26
3.3 結論	29
4 重力補正由来のダークエネルギー	30
4.1 宇宙定数問題	30
4.2 暗黒エネルギーとその源	30
4.3 暗黒エネルギーの候補	32
4.4 結論	36
5 まとめと展望	38
付録 A 計算過程	40
A.1 場の二次の計算	40
A.2 伝搬関数 の導出	43
A.3 量子補正の計算	45
A.4 ダイアグラム計算	50
謝辞	62

Introduction

2012 年 7 月の LHC の実験による Higgs 粒子の発見がされた [1, 2].

この発見により素粒子分野において有力な理論である標準模型が予言する粒子のすべてが観測により確認が行われたことになる. 標準模型が我々の世界の物理をよく記述できていることの確認はできたことになるが, すべての物理現象をこの標準模型で説明することは難しく, 課題を多く残している. これらの課題を解決するために超対称性理論や高次元理論, 超弦理論といった標準模型を超えた理論が考えられている.

LHC における実験においてこれら標準模型を超えた理論が予言する粒子の発見も期待されていたが, 今現在それらの兆候は観測されていない.

ここで疑問となってくるのが標準模型を超えた物理がどのエネルギースケールで見えてくるのかである.

このことに関しての議論として, Higgs ポテンシャルのエネルギースケールによる変化に注目し, ポテンシャルの安定性が保障されているかを解析するという手法がある [3, 4].

これらの議論ではポテンシャルに対しての標準模型内の量子効果 (NNLO^{*1} 内の 2-loop まで) による補正を繰り込みを用いて求め, 繰り込まれたそのポテンシャルの形から安定点を持つのかあるいは持たないのかを見ている. これらの解析ではトップクォークの質量の大きさによっては Planck 質量 M_{Pl} 近傍でのエネルギースケールまで Higgs ポテンシャルが安定な可能性があるかと解析されている.

一方で Planck スケール近傍を考えると重力の量子効果が現れると考えられており, Higgs ポテンシャルの解析においてもその効果を見捨てることは出来ないと考えられる. しかしながら重力の量子理論は確立しておらず, その量子的な振る舞いがわかっていない.

本論文ではまず Higgs ポテンシャルの Planck スケール周辺での振舞いに注目し, 重力の量子効果として Einstein 重力に対し揺らぎを与えたものを摂動的に有効であるとして用い, その効果を踏まえたうえで Higgs ポテンシャルが安定であるかどうかの解析を行う.

Einstein 重力による Higgs ポテンシャルに対する量子補正を考えていくと場の 6 乗や 8 乗といった Higgs 場の高次の発散項が生成されてくる. これらの項の係数は我々の観測可能なエネルギースケールでは非常に小さい値となっているはずである. そのためこれらの係数の値は現在わかっていない. この問題を解決するためカットオフスケールを導入することによってこれらの係数の決定を行っていく.

次にこのカットオフスケールの問題を解決を考えていく. 本論文では高エネルギースケールでの振る舞いが良いと考えられている $f(R)$ 理論のひとつである R^2 重力に着目し, カットオフスケールへの依存性がどのようにになっているかを考えた.

^{*1} next-to-next leading order の略

最後に素粒子物理学が抱える問題のひとつである宇宙定数問題 [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] に対して、重力の量子補正による影響を考えいく。ここでは重力の量子特性、物質場との関係性に関して大胆な仮定を置いて重力の量子補正を主体とした宇宙定数を考えた。

本論文での章構成として、まず 1 章で今回の研究の背景となる標準模型内での 1-loop, 2-loop までの量子補正を考慮した場合の Higgs ポテンシャルの安定性について、論文 [3, 4, 12, 13] を参考に見ていく。

研究背景を 1 章で見た後、2 章では論文 [14] に基づき、Einstein 重力理論を用いて Higgs ポテンシャルに対しての重力の 1-loop 量子補正を考えていく。このとき Einstein 重力は繰り込み不可能な理論であるのでカットオフスケール Λ を導入して解析を行った。

3 章ではこのカットオフスケールに対しての依存性の問題を解決するために UV 領域での振る舞いが良いと考えられている R^2 重力理論を用いて量子補正を考えた。

4 章では重力の量子特性と物質場との関係に対して大胆な仮定を置いた上で、重力の量子補正を主体として宇宙定数問題を考えた。

付録では 2, 3 章での計算過程を載せる。

単位・表記法

今回の論文において、全体を通して使用する記述法を定義する。

時空の取り方として 4 次元 Minkowski 空間において計量が

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

となるように定義する。

重力の量子効果を考えていくに当たり便利のために以下のように量 κ を

$$\kappa := \sqrt{32\pi G} \quad (0.2)$$

と定義する。このとき G は重力定数を表している。

このとき Planck 質量 $M_{\text{Pl}} \approx 1.22 \times 10^{19} \text{GeV}$ との関係は

$$\kappa = 4\sqrt{\pi} / M_{\text{Pl}} \approx 5.81 \times 10^{-19} \text{ GeV}^{-1} \quad (0.3)$$

となっている。

1 標準模型内での 1-loop

Higgs ポテンシャルの安定性を考えていくと標準模型がどのエネルギースケールまで有効な理論であるかを評価することができる. この章ではまず論文 [12] を参考に, 1-loop まで考えると標準模型がどのエネルギースケールまで有効であるかを Higgs ポテンシャルの安定性と Landau ポール^{*2}から考えていく. その次に論文 [3, 4, 13] を参考に 2-loop までの量子補正を考えた場合の Higgs ポテンシャルの安定性を見ていく.

1.1 標準模型内での Higgs ポテンシャルと安定性

標準模型の作用は

$$S = \int d^4x \left((D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) - m^2 H^\dagger H - \lambda (H^\dagger H)^2 + \dots \right), \quad (1.1)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_3 G_\mu^\alpha \tau_3^\alpha - ig_2 A_\mu^a \tau_2^a - ig_Y B_\mu Y,$$

である. ここで H は Higgs 場の二重項, \dots は標準模型内のほかの項を, ゲージ場周りの各種記号は以下の表のように定義している.

ゲージ群	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$
ゲージ結合定数	g_3	g_2	g_Y
ゲージ場	G_μ^α	A_μ^a	B_μ
生成子	τ_3^α	τ_2^a	Y

Higgs 場の二重項は背景場 ϕ の周りで $H^\dagger = 1/\sqrt{2}(\sigma_1 - i\pi_1, \phi + \sigma_2 - i\pi_2)$ と展開される. このとき Higgs ポテンシャルは

$$V_{\text{tree}} = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad (1.2)$$

となっている. 低エネルギースケールではこのポテンシャルのパラメータはそれぞれ $m^2 < 0, \lambda > 0$ となっており, ポテンシャルは極小値を $\phi = v \neq 0$ の点で有している.

量子補正と繰り込みを考えていくとこのパラメータがエネルギースケール μ によって変化していくことが知られている. 高エネルギースケールでは $m^2(\mu)$ の値が正へと変化

^{*2} 参考とする論文 [12] が議論されていた年代では Higgs 粒子とトップクォークの質量がわかっておらず, ポテンシャルの安定性と Landau ポールの双方を考える必要があった. しかしながら Higgs 粒子とトップクォークの質量が精度よくわかってきている現在では, λ の値は高エネルギースケールで 0 近傍となり, Landau ポールの議論は標準模型内では必要とならないことがわかっている. 本論文では [12] の図を見ていくために Landau ポールの議論も参考として載せておく.

すると考えられており、この $m^2(\mu)$ のパラメータがどのように変化していくかも研究が行われている。[4]

もうひとつのパラメータである $\lambda(\mu)$ も高エネルギースケールで符号が反転し $\lambda(\mu) < 0$ となる可能性が示されている。[3, 4, 12, 15] (1.2) 式の Higgs ポテンシャルでこの $\lambda < 0$ の状況を考えてみるとポテンシャルが極小値を持たない不安定なものとなっていることがわかる。この不安定なポテンシャルを回避するためには $\lambda(\mu)$ が負になるエネルギースケールでは標準模型では説明できない新しい物理 (標準模型を超えた物理) があると考えられる。この標準模型を超えた物理によってポテンシャルが極小値を持つ安定なものとなっていると考えられる。この考えを基にすると $\lambda(\mu)$ が負になり始めるエネルギースケールを Λ 即ち

$$\lambda(\Lambda) = 0, \quad (1.3)$$

としたときこのエネルギースケール Λ を知ることで標準模型の有効理論としての限界のエネルギースケールと標準模型を超えた物理が必要なエネルギースケールを知ることができる。

1.2 Landau ポールからの制限

Higgs ポテンシャルのパラメータ $\lambda(\mu)$ のエネルギースケールによる変化を考えていくとき、このパラメータの値の符号以外にも値が発散してしまう可能性も考えることができる。この $\lambda(\mu)$ が発散してしまうエネルギースケール即ち、 $\lambda(\mu)$ の Landau ポールがあるエネルギースケールから先では理論が破綻してしまう。そこで Higgs 場の 4 点の結合定数 λ の Landau ポールのエネルギースケールを理論の適用限界と仮定して Higgs の質量に対しての制限を考えてみる。

即ち

$$\frac{1}{\lambda(\mu)} > 0 \quad (1.4)$$

と制限を与えることができる。Landau ポール近傍では結合定数 λ がほかの結合定数よりも大きい値を持っていると考えられる。このことから λ の β 関数は

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} \simeq \lambda^2 \quad (1.5)$$

と近似できる。このとき $\lambda(\mu)$ は単純に解くことができる。

$$\int \frac{1}{\lambda^2} d\lambda = \int \frac{3}{2\pi^2} d\ln(\mu) \quad (1.6)$$

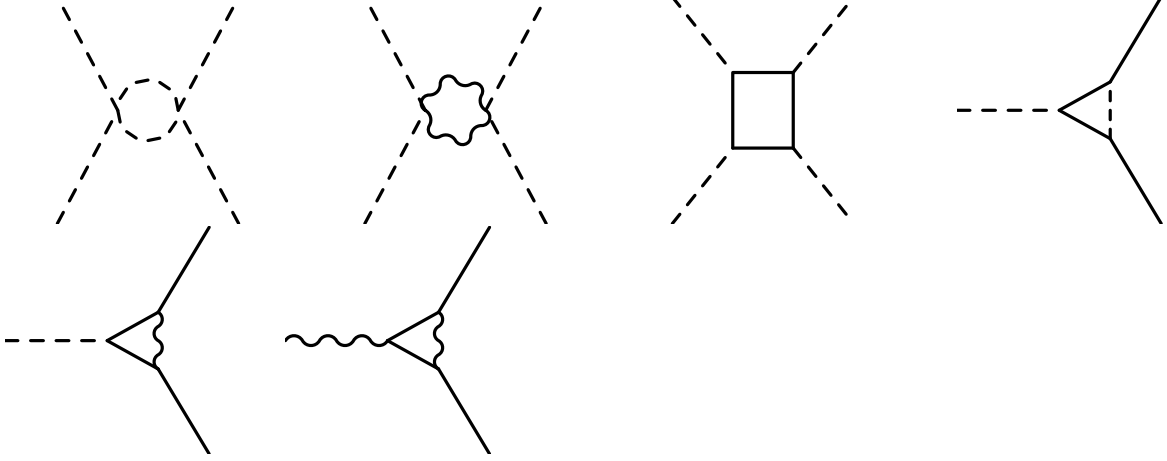
λ の値が低エネルギー領域でも大きく、(1.5) 式の近似が十分満たされているとすると、 $\lambda(v)$ での対応から、

$$\lambda(\mu) = \frac{\lambda(v)}{1 - \frac{3\lambda(v)}{2\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{v}\right)} \quad (1.7)$$

と考えることができる。

1.3 標準模型内での 1-loop

$\lambda(\mu)$ のエネルギースケールによる変化を見るために標準模型内での量子補正を考えてみる。標準模型内で以下のような 1-loop を考えていくと



各結合定数への量子補正は

$$\begin{aligned}
 \beta_{g_Y}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{41}{6} g_Y^3, \\
 \beta_{g_2}^{(1)} &= -\frac{1}{16\pi^2} \frac{19}{6} g_2^3, \\
 \beta_{g_3}^{(1)} &= -\frac{7}{16\pi^2} g_3^3, \\
 \beta_{y_t}^{(1)} &= \frac{y_t}{16\pi^2} \left(\frac{9}{2} y_t^2 - \frac{17}{12} g_Y^2 - \frac{9}{4} g_2^2 - 8g_3^2 \right), \\
 \beta_{\lambda}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left(24\lambda^2 - 3g_Y^2\lambda - 9g_2^2\lambda + \frac{3}{8}g_Y^4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{4}g_Y^2g_2^2 + \frac{9}{8}g_2^4 + 12\lambda y_t^2 - 6y_t^4 \right), \\
 \beta_{m^2}^{(1)} &= -\frac{2\mu^2}{16\pi^2} \left(6\lambda + \frac{3}{4}g_Y^2 + \frac{9}{4}g_2^2 - 6y_t^2 \right)
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

となる.[13] ここで $\beta_i^{(1)}$ は任意の結合定数 G_i の β 関数であり, 結合定数 G_i の 1-loop まで考慮した際のエネルギースケールによる変化 (RG flow) は微分方程式

$$\mu \frac{\partial G_i}{\partial \mu} = \beta_i^{(1)} \tag{1.9}$$

を解くことで求めることができる.*3

*3 このとき各結合定数の β 関数は他の結合定数を含んでいるため, 実際に解析するには各結合定数の微分方程式を連立して解く必要がある。

数値として RG flow を見るためには (1.9) 式のほかに閾値として特定のエネルギースケールでの各結合定数 G_i の値を設定する必要がある。

この閾値のエネルギースケールを理論の適用限界のエネルギースケール Λ として任意のエネルギースケールを設定することで, ポテンシャルの安定性と Landau ポールそれぞれの制限から Higgs 粒子とトップクォークの質量 m_H , m_t に対して予言を行うことができる。

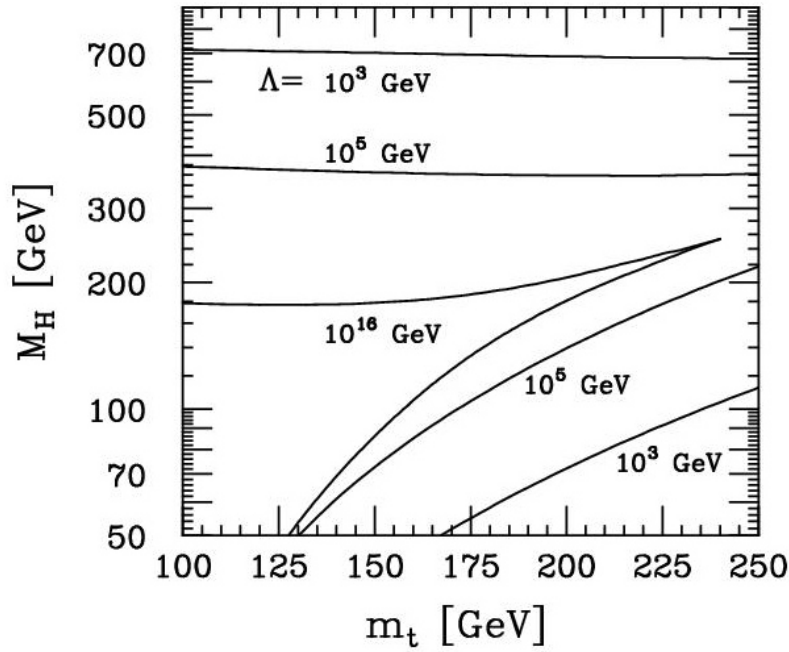


図 1.1 標準模型内の 1-loop までの量子補正を考えた場合の, 各理論の適用限界スケール Λ に応じたトップクォーク, Higgs 粒子の質量への制限. 論文 [12] より引用

図 1.1 はポテンシャルの安定性と Landau ポールそれぞれの制限から Higgs 粒子とトップクォークの質量 m_H , m_t の予言を行ったものであり, Higgs 粒子の質量 m_H^2 に対しての下限値にポテンシャルの安定性が, 上限値に Landau ポールからの制限が対応している. この図 1.1 は Higgs 粒子が未発見のころに行われた論文 [12] から引用している. 現在わかっている Higgs 粒子とトップクォークの質量は

$$\begin{aligned} m_H &= 125.09 \pm 0.24 \text{ GeV}, \\ m_t &= 173.21 \pm 0.51 \text{ GeV}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

となっている.*4この質量から図 1.1 をもとに理論の限界 Λ を考えてみると $\Lambda \simeq 10^{16} \text{ GeV}$ のエネルギースケールでポテンシャルの安定性から来る制限から外れ, 標準模型の適用限界となることがわかる. λ の Landau ポールによる制限に対して (1.10) 式の質量分布は抵触しない. このことは後に述べる 2-loop までの量子補正を考えたときも同様であり λ の値

*4 Particle Data Group [43] から引用, 2016 年 12 月時の値

はエネルギースケールが大きくなるにつれ小さくなり Landau ポールの存在は出てこない [3, 4].

1.4 標準模型内での 2-loop

前節では λ に対しての標準模型内での 1-loop 量子補正を考えた. この節ではより精度を上げた 2-loop の量子補正まで考えた場合の議論を論文 [3, 4, 13] を参考に見てみる.

標準模型内での 2-loop 量子補正のベータ関数は, 論文 [4, 13] を参考に

$$\begin{aligned}
\beta_{g_y}^{(2)} &= \frac{g_Y^3}{(16\pi^2)^2} \left(\frac{199}{18} g_2^2 + \frac{9}{2} g_2^2 + 44 g_3^2 - \frac{17}{6} y_t^2 \right), \\
\beta_{g_2}^{(2)} &= \frac{g_2^3}{(16\pi^2)^2} \left(\frac{3}{2} g_Y^2 + \frac{35}{6} g_2^2 + 12 g_3^2 - \frac{3}{2} y_t^2 \right), \\
\beta_{g_3}^{(2)} &= \frac{g_2^3}{(16\pi^2)^2} \left(\frac{11}{6} g_Y^2 + \frac{9}{2} g_2^2 - 26 g_2^3 - 2 y_t^2 \right), \\
\beta_{y_t}^{(2)} &= \frac{y_t}{(16\pi^2)^2} \left(-12 y_t^2 + 6 \lambda^2 - 12 \lambda y_t^2 + \frac{131}{16} g_Y^2 y_t^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{225}{16} g_2^2 y_t^2 + 36 g_3^2 y_t^2 + \frac{1187}{216} g_Y^4 - \frac{23}{4} g_2^4 \right. \\
&\quad \left. - 108 g_3^4 - \frac{3}{4} g_Y^2 g_2^2 + 9 g_2^2 g_3^2 + \frac{19}{9} g_3^2 g_Y^2 \right), \\
\beta_\lambda^{(2)} &= \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left\{ -312 \lambda^3 + 36 \lambda^2 (g_Y^2 + 3 g_2^2) - \lambda \left(-\frac{629}{24} g_Y^4 - \frac{39}{4} g_Y^2 g_2^2 + \frac{73}{8} g_2^4 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{305}{16} g_2^6 - \frac{289}{48} g_Y^2 g_2^4 - \frac{559}{48} g_Y^4 g_2^2 - \frac{379}{48} g_Y^6 - 32 g_3^2 y_t^4 - \frac{8}{3} g_Y^2 y_t^4 - \frac{9}{4} g_2^4 y_t^2 \right. \\
&\quad \left. + \lambda y_t^2 \left(\frac{85}{6} g_Y^2 + \frac{45}{2} g_2^2 + 80 g_3^2 \right) + g_Y^2 y_t^2 \left(-\frac{19}{4} g_Y^2 + \frac{21}{2} g_2^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - 144 \lambda^2 y_t^2 - 3 \lambda y_t^4 + 30 y_t^6 \right\}, \\
\beta_{m^2}^{(2)} &= \frac{6\mu^2}{(16\pi^2)^2} \ln \left(\frac{4}{3} \right) \left(9 y_t^4 + y_t^2 \left(-\frac{7}{12} g_Y^2 + \frac{9}{4} g_2^2 - 16 g_3^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{87}{16} g_Y^4 - \frac{63}{16} g_2^4 - \frac{15}{8} g_Y^2 g_2^2 + \lambda (-18 y_t^2 + 3 g_Y^2 + 9 g_2^2) - 12 \lambda^2 \right)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

と記述することができる. このとき任意の結合定数 G_i の RG flow は微分方程式

$$\mu \frac{\partial G_i}{\partial \mu} = \beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} \tag{1.12}$$

を解くことによって求めることができる.

標準模型内での 2-loop までの量子補正を考えた場合の Higgs ポテンシャルの安定性を論文 [3] の研究から見てみる.

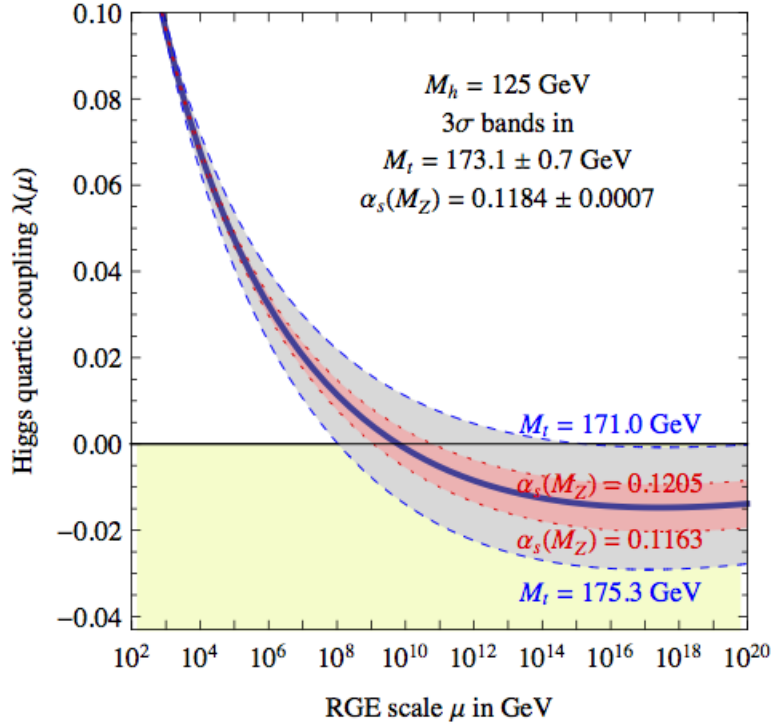


図 1.2 標準模型内の 2-loop までの量子補正を考えた場合の λ の RG flow. 論文 [3] より引用

図 1.2 はトップクォークの質量 M_t を任意に取った場合の $\lambda(\mu)$ の RG flow である. この図を見るとトップクォークの質量によって Higgs ポテンシャルの安定性の保証されるエネルギースケール ($\lambda(\mu) > 0$ となっているエネルギースケール) は大幅に変化することがわかる.

トップクォークが $m_t = 175.3$ GeV と重い場合には $\mu \simeq 10^8$ GeV ほどのエネルギースケールで Higgs ポテンシャルの安定性が失われてしまっている. その一方でトップクォークの質量が軽くなってくると Higgs ポテンシャルの安定性が保障されるエネルギースケールは急激に大きくなっていき, $M_t = 171$ GeV 近傍では Planck 質量 M_{Pl} のエネルギースケールまで安定性が保証される可能性が読み取れる.

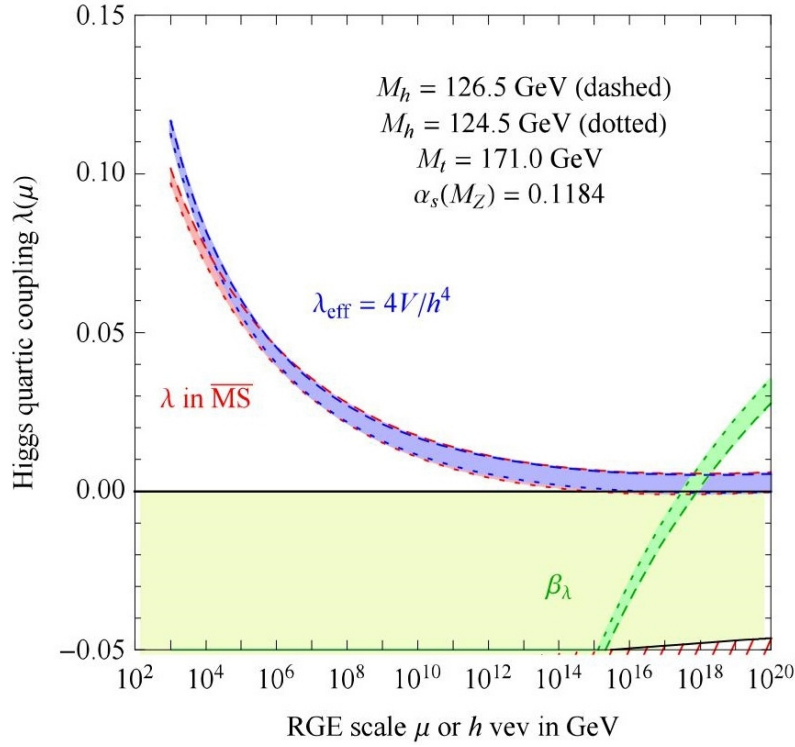


図 1.3 標準模型内の 2-loop までの量子補正を考えた場合の λ の RG flow. 論文 [3] より引用

図 1.3 では $M_t = 171\text{GeV}$ と固定して Higgs 粒子の質量の値を変化させた場合の λ の RG flow とこの λ の β 関数 β_λ の RG flow を見ることができる. この図 1.3 を見ると M_{Pl} のエネルギースケールまで M_t と M_H の取りうる値によっては $\lambda > 0$ となり, Higgs ポテンシャルの安定性が続いている可能性を確認することができる. また λ の β 関数にも着目すると $10^{17} \sim 10^{18}\text{GeV}$ 近傍のエネルギースケールで $\beta_\lambda = 0$ となっている可能性を読み取ることができる. このエネルギースケールでは λ の値も 0 となっている可能性もある. そのため $\lambda = \beta_\lambda = 0$ といったポテンシャルが非常に平坦となっている可能性がある.*⁵ このポテンシャルの平坦性とそのエネルギースケールから標準模型が超弦理論と直接的に結びついている可能性も示唆されている [22]. 次章で述べる重力による影響はこのエネルギースケールでは非常に影響が少ないことがわかる. そのためこの標準模型が超弦理論に直接結びつくという可能性に対して, Higgs ポテンシャルに対しての Einstein 重力による量子補正は無矛盾であるといえる [14].

*⁵ このエネルギースケールでは Higgs 粒子の裸の質量の値も非常に小さい値である可能性が示唆されている [4].

2 Einstein 重力による量子効果

Higgs ポテンシャルの安定性が Planck 質量 M_{Pl} 近傍のエネルギースケールまで保たれている可能性がある一方で, M_{Pl} 近傍のエネルギースケールでは重力の量子補正による影響が無視できなくなってくるだろうと予測できる. この章では論文 [14] を基に Higgs ポテンシャルに対しての重力の量子補正を古典重力の理論である Einstein 重力を基に考えてみる.

2.1 Set up

重力の量子効果を考えるためにまず作用を以下のように定める.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{2}{\kappa^2} R + g^{\mu\nu} (\partial_\mu H)^\dagger (\partial_\nu H) - m^2 H^\dagger H - \lambda (H^\dagger H)^2 + \dots \right]. \quad (2.1)$$

この作用は標準模型の作用に対して Einstein 重力の作用である Einstein-Hilbert 作用を追加したものである. この作用を元に Higgs と重力の量子場の 2 次の項を用いて Higgs ポテンシャルに対する量子補正を考えていく.

重力の量子場 $h_{\mu\nu}$ は Minkowski 時空からの揺らぎとして扱う. このとき重力場 $g_{\mu\nu}$ は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

上記のように展開する.

ゲージ固定を de Donder ゲージ

$$0 = \left(\eta^{\mu e} \eta^{\nu \alpha} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{e\alpha} \right) h_{\mu\nu, e} \quad (2.3)$$

によって行う.

2.2 重力場の揺らぎ

重力場による量子補正を求める下準備として重力場の揺らぎがどのように記述されているかを見ていく. ここでは一般的な背景時空 g_{ab} からの揺らぎを見ていく. このとき重力場の揺らぎは

$$g_{ab} \Rightarrow \tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \kappa h_{ab} \quad (2.4)$$

と取る.

(2.4) を基として, ほかのパラメータでの揺らぎを考えると

$$\tilde{g}^{ab} = g^{ab} - \kappa h^{ab} + \kappa^2 h^{ac} h_c^b + \dots, \quad (2.5)$$

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-g} \left(1 + \frac{\kappa}{2} h_a^a - \frac{\kappa^2}{4} h_b^a h_a^b + \frac{\kappa^2}{8} h_a^a h_b^b + \dots \right), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{cab} &= \Gamma_{cab} + \kappa \delta \Gamma_{cab}, \\ \delta \Gamma_{cab} &:= \frac{1}{2} (h_{bc,a} + h_{ac,b} - h_{ab,c}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta_a^e \delta_c^f \delta_b^g + \delta_b^e \delta_c^f \delta_a^g - \delta_a^e \delta_b^f \delta_c^g \right) h_{ef,g} \end{aligned} \quad (2.7)$$

と展開できる. このとき添え字の上げ下げは $h_b^a = g^{ac} h_{cb}$ となるようにとっている.

Riemann テンソルに関して見やすさのために $\tilde{R}_{abcd} := R_{abce}^{(0)} + \kappa R_{abcd}^{(1)} + \kappa^2 R_{abcd}^{(2)} + \dots$ と揺らぎ h_{ab} の乗数ごとに分けておくと

$$\begin{aligned} R_{abcd}^{(1)} &= \frac{1}{2} [h_{b[c,d]a} - h_{a[c,d]b}] - h^{ef} [\Gamma_{ead} \Gamma_{fbc} - \Gamma_{eac} \Gamma_{fbd}] \\ &\quad + g^{ef} [\delta \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc} + \Gamma_{ead} \delta \Gamma_{fbc} - \delta \Gamma_{eac} \Gamma_{fbd} - \Gamma_{eac} \delta \Gamma_{fbd}], \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} R_{abcd}^{(2)} &= h^{eg} h_g^f [\Gamma_{ead} \Gamma_{fbc} - \Gamma_{eac} \Gamma_{fbd}] \\ &\quad - h^{ef} [\delta \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc} + \Gamma_{ead} \delta \Gamma_{fbc} - \delta \Gamma_{eac} \Gamma_{fbd} - \Gamma_{eac} \delta \Gamma_{fbd}] \\ &\quad + g^{ef} [\delta \Gamma_{ead} \delta \Gamma_{fbc} - \delta \Gamma_{eac} \delta \Gamma_{fbd}] \end{aligned} \quad (2.9)$$

と展開できる. このとき添え字に関して $h_{a[c,d]b} := h_{ac,db} - h_{ad,cb}$ と交換関係を示すように定義している.

Ricci テンソルは Minkowski 時空の取り方によって符号の取り方を変えたほうが Einstein-Hilbert 作用 が見やすくなる.*6 このとき取り方は

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_{abe}^e \mid \eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \\ R_{ab} &= R_{aeb}^e \mid \eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる. これ以降は $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ のときの取り方に準拠して記述する.

見やすさのために $\tilde{R}_{ab} := R_{ab}^{(0)} + \kappa R_{ab}^{(1)} + \kappa^2 R_{ab}^{(2)} + \dots$ と揺らぎ h_{ab} の乗数ごとに分けておくと

$$\begin{aligned} R_{ab}^{(1)} &= (\tilde{g}^{cd})^{(0)} R_{cabd}^{(1)} + (\tilde{g}^{cd})^{(1)} R_{cabd}^{(0)} \\ &= \frac{1}{2} g^{cd} [h_{a[b,d]c} - h_{c[b,d]a}] - h^{ef} g^{cd} [\Gamma_{eab} \Gamma_{fcd} - \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc}] \\ &\quad + g^{ef} g^{cd} [\delta \Gamma_{eab} \Gamma_{fcd} + \Gamma_{eab} \delta \Gamma_{fcd} - \delta \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc} - \Gamma_{ead} \delta \Gamma_{fbc}] \\ &\quad - h^{cd} R_{cabd}^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

*6 $S = \int d^4x \frac{1}{16\pi G} R \sqrt{-g}$ の符号反転を考えなくて済むようになる

$$\begin{aligned}
R_{ab}^{(2)} &= (\tilde{g}^{cd})^{(0)} R_{cabd}^{(2)} + (\tilde{g}^{cd})^{(1)} R_{cabd}^{(1)} + (\tilde{g}^{cd})^{(2)} R_{cabd}^{(0)} \\
&= -\frac{1}{2} h^{cd} [h_{a[b,d]c} - h_{c[b,d]a}] \\
&\quad + (h^{cd} h^{ef} - g^{cd} h^{eg} h_g^f) [\Gamma_{eab} \Gamma_{fcd} - \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc}] \\
&\quad - (h^{ef} g^{cd} + g^{ef} h^{cd}) \\
&\quad \times [\delta \Gamma_{eab} \Gamma_{fcd} + \Gamma_{eab} \delta \Gamma_{fcd} - \delta \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc} - \Gamma_{ead} \delta \Gamma_{fbc}] \\
&\quad + g^{cd} g^{ef} [\delta \Gamma_{eab} \delta \Gamma_{fcd} - \delta \Gamma_{ead} \delta \Gamma_{fbc}] \\
&\quad + h^{ce} h_e^d R_{cabd}^{(0)},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

となっている.

Ricci スカラー に関して見やすさのために $\tilde{R} := R^{(0)} + \kappa R^{(1)} + \kappa^2 R^{(2)} + \dots$ と揺らぎ h_{ab} の乗数ごとに分けておくと

$$\begin{aligned}
R^{(0)} &= (\tilde{g}^{ab})^{(0)} R_{ab}^{(0)} \\
&= R,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
R^{(1)} &= (\tilde{g}^{ab})^{(0)} R_{ab}^{(1)} + (\tilde{g}^{ab})^{(1)} R_{ab}^{(0)} \\
&= g^{ab} g^{cd} \{h_{ab,cd} - h_{ad,bc}\} \\
&\quad - g^{ab} g^{cd} h^{ef} \{\Gamma_{eab} \Gamma_{fcd} - \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc}\} \\
&\quad + 2g^{ab} g^{cd} g^{ef} \{\Gamma_{eab} \delta \Gamma_{fcd} - \Gamma_{ead} \delta \Gamma_{fbc}\} \\
&\quad - 2h^{ab} R_{ab},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
R^{(2)} &= (g^{ab})^{(2)} R_{ab}^{(0)} + (g^{ab})^{(1)} R_{ab}^{(1)} + (g^{ab})^{(0)} R_{ab}^{(2)} \\
&= -h^{ab} g^{cd} \{h_{a[b,d]c} - h_{c[b,d]a}\} \\
&\quad + g^{ab} g^{cd} g^{ef} \{\delta \Gamma_{eab} \delta \Gamma_{fcd} - \delta \Gamma_{ead} \delta \Gamma_{fbc}\} \\
&\quad - 2 \{h^{ab} g^{cd} g^{ef} + g^{ab} h^{cd} g^{ef} + g^{ab} g^{cd} h^{ef}\} \{\Gamma_{eab} \delta \Gamma_{fcd} - \Gamma_{ead} \delta \Gamma_{fbc}\} \\
&\quad + \{2h^{ab} g^{cd} h^{ef} + g^{ab} g^{cd} g_{gh} h^{ge} g^{fh}\} \{\Gamma_{eab} \Gamma_{fcd} - \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc}\} \\
&\quad + 2h^{ae} h^{bf} g_{ef} R_{ab}^{(0)} + h^{ab} h^{cd} R_{cabd}^{(0)}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

となる. 同様に Einstein-Hilbert 作用 を $S_{EH} = \int d^4x \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + \dots$ と分解しておく

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(0)} &= \frac{2}{\kappa^2} R^{(0)} (\sqrt{-g})^{(0)} \\
&= \frac{2}{\kappa^2} R \sqrt{-g},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(1)} &= \frac{2}{\kappa} \left(R^{(1)} (\sqrt{-g})^{(0)} + R^{(0)} (\sqrt{-g})^{(1)} \right) \\
&= \frac{2}{\kappa} \left[g^{ab} g^{cd} \{h_{ac,bd} - h_{ab,cd}\} \right. \\
&\quad + 2g^{ab} g^{cd} g^{ef} \{ \Gamma_{eac} \delta \Gamma_{fbd} - \Gamma_{eab} \delta \Gamma_{fcd} \} \\
&\quad + \frac{1}{2} h^{ab} g_{ab} R - 2h^{ab} R_{ab} \\
&\quad \left. - g^{ab} g^{cd} h^{ef} \{ \Gamma_{eac} \Gamma_{fbd} - \Gamma_{eab} \Gamma_{fcd} \} \right] \sqrt{-g},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(2)} &= 2 \left(R^{(2)} (\sqrt{-g})^{(0)} + R^{(1)} (\sqrt{-g})^{(1)} + R^{(0)} (\sqrt{-g})^{(2)} \right) \\
&= 2 \left[\left(\frac{1}{4} h_e^e g^{ab} g^{cd} - h^{ab} g^{cd} \right) \{ h_{c[b,d]a} - h_{a[b,d]c} \} \right. \\
&\quad + g^{ab} g^{cd} g^{ef} \{ \delta \Gamma_{eac} \delta \Gamma_{fbd} - \delta \Gamma_{eab} \delta \Gamma_{fcd} \} \\
&\quad + \{ h_g^g g^{ab} g^{cd} g^{ef} - 4h^{ab} g^{cd} g^{ef} - 2g^{ab} g^{cd} h^{ef} \} \\
&\quad \times \{ \Gamma_{eac} \delta \Gamma_{fbd} - \Gamma_{eab} \delta \Gamma_{fcd} \} \\
&\quad - \frac{1}{8} (2h_b^a h_a^b + h_a^a h_b^b) R \\
&\quad + (2h^{ae} h^{bf} g_{ef} - h_c^c h^{ab}) R_{ab} - h^{ab} h^{cd} R_{acbd} \\
&\quad + \left\{ 2h^{ab} g^{cd} h^{ef} + g^{ab} g^{cd} g_{gh} h^{ge} g^{fh} - \frac{1}{2} g^{ab} g^{cd} h^{ef} h_g^g \right\} \\
&\quad \left. \times \{ \Gamma_{eac} \Gamma_{fbd} - \Gamma_{eab} \Gamma_{fcd} \} \right] \sqrt{-g}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

となる。重力の量子補正を求めるにはこの $\mathcal{L}^{(2)}$ が重要となる。^{*7} 背景時空を Minkowski 時空とる際には Christoffel 記号が $\Gamma_{bc}^a = 0$ となるため Christoffel 記号と結びついている項は無視することができる。

(2.18) 式を見ると、背景時空が Minkowski 時空であるときの揺らぎの 2 次の項 $\mathcal{L}^{(2)}$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(2)} &= 2 \left[\left(\frac{1}{4} h_e^e \eta^{ab} \eta^{cd} - h^{ab} \eta^{cd} \right) \{ h_{c[b,d]a} - h_{a[b,d]c} \} \right. \\
&\quad \left. + \eta^{ab} \eta^{cd} \eta^{ef} \{ \delta \Gamma_{eac} \delta \Gamma_{fbd} - \delta \Gamma_{eab} \delta \Gamma_{fcd} \} \right]
\end{aligned} \tag{2.19}$$

となっている。境界が存在しないものとして全微分項を無視した上でこの式を展開すると

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \eta^{ef} - 2\eta^{\mu e} \eta^{\nu f} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \eta^{ef} + 2\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu e} \eta^{\sigma f} \right) h_{\mu\nu, e} h_{\rho\sigma, f} \tag{2.20}$$

^{*7} 重力による量子補正を計算する際にはこの $\mathcal{L}^{(2)}$ のほかにゲージ固定を行う必要がある。

と記述できる．ゲージ固定を de Donder ゲージ

$$0 = \left(\eta^{\mu e} \eta^{\nu \alpha} - \frac{1}{2} \eta^{\mu \nu} \eta^{e \alpha} \right) h_{\mu \nu, e} \quad (2.21)$$

によって行うとしてゲージ固定項

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\eta_{\alpha \beta} \left(\eta^{\mu e} \eta^{\nu \alpha} - \frac{1}{2} \eta^{\mu \nu} \eta^{e \alpha} \right) \left(\eta^{\rho f} \eta^{\sigma \beta} - \frac{1}{2} \eta^{\rho \sigma} \eta^{f \beta} \right) h_{\mu \nu, e} h_{\rho \sigma, f} \quad (2.22)$$

を導入すると

$$\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{4} \left(\eta^{\mu \nu} \eta^{\rho \sigma} \eta^{ef} - 2 \eta^{\mu \rho} \eta^{\nu \sigma} \eta^{ef} \right) h_{\mu \nu, e} h_{\rho \sigma, f} \quad (2.23)$$

となる．この $\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}_{\text{gf}}$ が重力場の揺らぎ h_{ab} の運動項となる．

Higgs 場と重力場以外の場の背景場が 0 だとすると, h_{ab} の質量項となる項は Higgs ポテンシャルと $\sqrt{-g}$ の結合した項の h_{ab} の 2 次の項が対応することとなる．そのため質量項は

$$\mathcal{L}_m = -\frac{\kappa^2}{8} \left(\eta^{\mu \nu} \eta^{\rho \sigma} - 2 \eta^{\mu \rho} \eta^{\nu \sigma} \right) V(\phi) h_{\mu \nu} h_{\rho \sigma} \quad (2.24)$$

となっている．このときの $V(\phi)$ は古典的なポテンシャルの値となっている．

この (2.23), (2.24) 式を元に計算することによって重力場のみによる Higgs ポテンシャルに対しての量子補正を求めることができる．次節にてその計算を行う．

繰り込みによる RG flow を考えていくためにはゲージ結合や湯川結合などの結合定数に対しての量子補正を考える必要がある．本論文ではそれらの量子補正を考えていくにあたりダイアグラム計算を行う．このダイアグラム計算を行うための準備として重力場の揺らぎの伝播関数やバーテックスを考える．

伝播関数を求めるために $h_{\mu \nu}[\dots]h_{\rho \sigma}$ という形に変換すると

$$\mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}_{\text{gf}} + \mathcal{L}_m = \frac{1}{4} h_{\mu \nu} \left(\eta^{\mu \nu} \eta^{\rho \sigma} - 2 \eta^{\mu \rho} \eta^{\nu \sigma} \right) \left(\partial^2 - \frac{\kappa^2}{2} V(\phi) \right) h_{\rho \sigma} \quad (2.25)$$

となっている．重力場の揺らぎの伝播関数 $D_{\mu \nu \rho \sigma}$ は

$$\frac{1}{2} \left(\eta^{\mu \nu} \eta^{\alpha \beta} - \eta^{\mu \alpha} \eta^{\nu \beta} - \eta^{\mu \beta} \eta^{\nu \alpha} \right) \left(p^2 + \frac{\kappa^2}{2} V(\phi) \right) D_{\alpha \beta \rho \sigma} = \frac{1}{2} \left(\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu \right) \quad (2.26)$$

となっていると予想されることから

$$\begin{array}{c} \{\mu \nu\} \qquad \qquad \qquad \{\rho \sigma\} \\ \bullet \text{-----} \bullet \end{array} D_{\mu \nu \rho \sigma} = \frac{i}{2p^2 + \kappa^2 V(\phi)} \left(\eta_{\mu \rho} \eta_{\nu \sigma} + \eta_{\mu \sigma} \eta_{\nu \rho} - \eta_{\mu \nu} \eta_{\rho \sigma} \right) \quad (2.27)$$

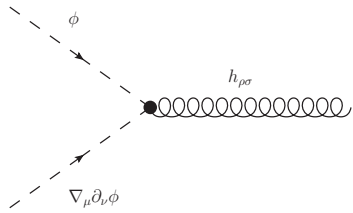
となる．

つぎに Higgs 場や top 場に対して重力場の揺らぎがどのように結合するかを見る．はじめに Higgs 場の運動項に注目してみると重力場の揺らぎの影響は

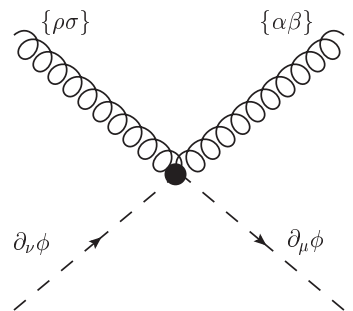
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\phi k} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \left(\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 g^{\alpha\beta} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \right) \\
&\quad \times \left(1 + \frac{\kappa}{2} h_\rho^\rho - \frac{\kappa^2}{4} h_\sigma^\rho h_\rho^\sigma + \frac{\kappa^2}{8} h_\rho^\rho h_\sigma^\sigma \right) \sqrt{-g} \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{\kappa}{2} \nabla_\mu \partial_\nu \phi \cdot \phi h_{\rho\sigma} P^{\mu\nu:\sigma\rho} \\
&\quad + \frac{\kappa^2}{8} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} \cdot \left[\eta^{\mu\nu} P^{\rho\sigma:\alpha\sigma} - \eta^{\mu\rho} P^{\nu\sigma:\alpha\sigma} \right. \\
&\quad \left. - \eta^{\mu\sigma} P^{\nu\rho:\alpha\sigma} - \eta^{\mu\alpha} P^{\rho\sigma:\nu\sigma} - \eta^{\mu\beta} P^{\rho\sigma:\alpha\nu} \right] \\
&\quad + \dots
\end{aligned} \tag{2.28}$$

となっている．ここで $P^{ab:cd} := \frac{1}{2} [\eta^{ab}\eta^{cd} - \eta^{ac}\eta^{bd} - \eta^{ad}\eta^{bc}]$ と定義している．また 1-loop までの量子補正まででは 2 次以上の場の揺らぎの影響は取り扱わないため 3 次以上の重力場の揺らぎは無視している．

(2.28) 式からはバーテックスとして、



$$i \frac{\kappa}{4} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\mu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}), \tag{2.29}$$



$$\begin{aligned}
&\frac{i\kappa^2}{2} \left[\eta^{\mu\nu} P^{\rho\sigma:\alpha\sigma} - \eta^{\mu\rho} P^{\nu\sigma:\alpha\sigma} \right. \\
&\quad \left. - \eta^{\mu\sigma} P^{\nu\rho:\alpha\sigma} - \eta^{\mu\alpha} P^{\rho\sigma:\nu\sigma} - \eta^{\mu\beta} P^{\rho\sigma:\alpha\nu} \right]
\end{aligned} \tag{2.30}$$

を読み取ることができる*8．

次にトップクォークの運動項に対しての重力の影響を見る．曲がった空間でのフェルミオンの運動項は、四脚場 e_a^μ *9 とスピン接続 ω_μ^{ab} の存在から

$$\mathcal{L}_{tk} = \bar{\psi} (i\gamma^a e_a^\mu D_\mu - m) \psi \tag{2.31}$$

*8 これらのバーテックスの詳細な計算や、これらに基づいたダイアグラムの計算は付録 A.4 に載せる．

*9 Minkowski 時空 x^a と曲がった空間 x^μ を $e_a^\mu x^a = x^\mu$ と結びつける射影演算子の役割を持っている．

と記述できる．ここで γ^a はガンマ行列, 共変微分 D_μ は

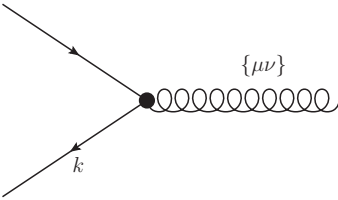
$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - \frac{i}{4} w_\mu^{ab} \sigma_{ab}, \\ \sigma_{ab} &:= \frac{i}{2} [\gamma_a, \gamma_b] \end{aligned} \quad (2.32)$$

と定義している．

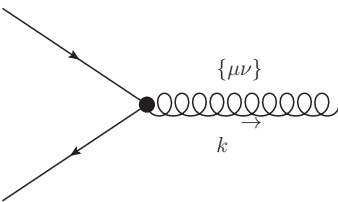
(2.31) 式に対して Minkowski 時空からの揺らぎを考えると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{tk} &= \bar{\psi} i \gamma^a \partial_\rho \psi \cdot h_{\mu\nu} \cdot \frac{\kappa}{2} [\delta_a^\rho \eta^{\mu\nu} - \delta_a^\nu \eta^{\mu\rho}] \\ &\quad + \frac{i\kappa}{8} \gamma^\mu (\gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\nu) \bar{\psi} \psi \partial_\rho h_{\mu\nu} \\ &\quad + \bar{\psi} i \gamma^a \partial_\eta \psi \cdot h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} \cdot \frac{\kappa^2}{8} [\delta_a^\sigma \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\eta} + 2\delta_a^\eta P^{\mu\nu:\rho\sigma}] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

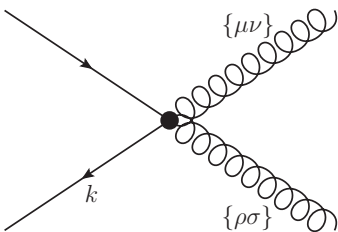
と展開することができる^{*10}．このとき γ^μ は Minkowski 時空上のガンマ行列^{*11}と定義している．また四脚場は Minkowski 時空 η_{ab} と Minkowski 時空から揺らいでいる時空 $\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ への射影演算子として振舞っている．この展開式から重力場が 1 次, 2 次で結合しているバーテックス



$$-\frac{i\kappa}{2} [\gamma^\rho k_\rho \eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu k_\rho \eta^{\mu\rho}], \quad (2.34)$$



$$-\frac{i\kappa}{8} \gamma^\mu (\gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\nu) k_\rho \quad (2.35)$$



$$-\frac{i\kappa^2}{8} [2\gamma^\eta k_\eta P^{\mu\nu:\rho\sigma} + \gamma^\sigma k_\eta \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\eta}] \quad (2.36)$$

^{*10} 導出過程は四脚場やスピンの接続に対しての重力場の揺らぎの影響も含めて付録 A.4 に記述する．

^{*11} $\gamma^\mu := \gamma^a \delta_a^\mu$

を読み取ることができる.

これらの場の 2 次の作用, 重力場の揺らぎのプロパゲーターおよびバーテックスを基に量子補正を求めていくことができる.

2.3 重力による量子補正

Higgs ポテンシャルに対しての 1-loop 量子補正を考えていく. 1-loop の量子補正を計算するにあたりまず作用中の量子場の 2 次の項を見てみる. Higgs 量子場と重力の量子場に注目して 2 次の項を見てみると,

$$S^{quad} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} h_{ab} D^{ab:cd} h_{cd} - h_{ab} [\eta^{ab} m_B^2] \sigma_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sigma_2 [\partial^2 + m_C^2] \sigma_2 - \sum \frac{1}{2} \Phi_I [\partial^2 + m_D^2] \Phi_I, \right] \quad (2.37)$$

となる.*¹² このとき $\Phi_I = \sigma_1, \pi_1, \pi_2$, $m_B^2 = -\frac{\kappa}{2} \partial_{\sigma_2} \mathcal{L}_{SM}|_{\sigma_2=0}$, $m_C^2 = -\partial_{\sigma_2}^2 \mathcal{L}_{SM}|_{\sigma_2=0}$, $m_D^2 = -\partial_{\sigma_1}^2 \mathcal{L}_{SM}|_{\sigma_1=0}$ また

$$D^{ab:cd} = P^{ab:cd} (-\partial^2 + m_A^2) \\ m_A^2 = -\frac{\kappa^2}{2} \mathcal{L}_{SM}^{(0)}, \quad (2.38)$$

と置いている.

導出した作用中での揺らぎの 2 次を元に 1-loop 量子補正を考えていく. 考えていく場の揺らぎの積分は

$$Z = \int \prod_i \mathcal{D}\Psi_i e^{i(S^{(0)} + S^{quad})}, \quad (2.39)$$

となっている. ここで $\Psi_i = (h_{ab}, \sigma_2, \Psi_I)$ ととっている. このとき $S^{quad} = \int d^4x -\frac{1}{2} \Psi_i A_{ij} \Psi_j$ と記述する事ができる. この A_{ij} の固有値とその重複度は

$$\begin{array}{ll} \frac{2m_C^2 + 2m_A^2}{4} - \sqrt{4m_B^4 + \left(\partial^2 + \frac{m_C^2 - m_A^2}{2}\right)^2} & : 1 \\ \frac{2m_C^2 + 2m_A^2}{4} + \sqrt{4m_B^4 + \left(\partial^2 + \frac{m_C^2 - m_A^2}{2}\right)^2} & : 1 \\ \frac{(\partial^2 - m_A^2)}{2} & : 3 \\ \frac{2(\partial^2 - m_A^2)}{2} & : 3 \\ \frac{-2(\partial^2 - m_A^2)}{\partial^2 + m_D^2} & : 3 \end{array} \quad (2.40)$$

*¹² 導出過程は 2.2, あるいは A.1.12 を参照. このとき $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ として Einstein 重力に対応させている.

となる．このとき

$$\begin{aligned} m_A^2 &= \frac{\kappa^2}{8} (2m^2\phi^2 + \lambda\phi^4), \quad m_B^2 = \frac{\kappa}{2} (m^2\phi + \lambda\phi^3), \\ m_C^2 &= m^2 + 3\lambda\phi^2, \quad m_D^2 = m^2 + 2\lambda\phi^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

となっている．このことより (2.39) 式の Gauss 積分は

$$\begin{aligned} Z &= 64 (\det(C'_-))^{-1/2} (\det(C'_+))^{-1/2} (\det(-\partial^2 + m_A^2))^{-9/2} \\ &\quad \times (\det(\partial^2 + m_D^2))^{-3/2} \times e^{iS^{(0)}} \\ &= e^{i(S^{(0)} + S^{(qc)})} \end{aligned} \quad (2.42)$$

となる．このとき $C'_\pm = \frac{m_C^2 + m_A^2}{2} \pm \sqrt{4m_B^4 + \left(\partial^2 + \frac{m_C^2 - m_A^2}{2}\right)^2}$ と置いている．このとき量子補正 $S^{(qc)}$ は

$$\begin{aligned} S^{(qc)} &= \frac{i}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\ln(-k^2 + C_-(k)) + \ln(-k^2 + C_+(k)) \right. \\ &\quad \left. + 9 \ln(-k^2 - m_A^2) + 3 \ln(-k^2 + m_D^2) \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

となっている．このとき $C_\pm = \frac{1}{2} \left[m_C^2 - m_A^2 \pm \sqrt{(m_C^2 + m_A^2)^2 - 16m_B^4} \right]$ と置いている．(A.3.11) 式を基に計算を行うと

$$\begin{aligned} S^{(qc)} &= \frac{1}{64\pi^2} \int d^4x \left[7\Lambda^4 - 14\Lambda^4 \ln \Lambda^2 \right. \\ &\quad - 2(m_C^2 - 10m_A^2 + 3m_D^2) \Lambda^2 \\ &\quad - \sum_i C_i^2 \left\{ \ln \left(\frac{C_i}{\Lambda^2} \right) - \frac{1}{2} \right\} - 9m_A^4 \left\{ \ln \left(\frac{-m_A^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{1}{2} \right\} \\ &\quad \left. - 3m_D^4 \left\{ \ln \left(\frac{m_D^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{1}{2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

と量子補正 $S^{(qc)}$ を求めることができる．

(2.44) 式の作用に対しての量子補正 $S^{(qc)}$ からポテンシャルに対しての量子補正 δV_{loop} を抜き出すと

$$\begin{aligned} \delta V_{\text{loop}} &= \frac{5\kappa^2\Lambda^2}{32\pi^2} \left(\frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right) \\ &\quad + \frac{9\kappa^4}{256\pi^2} \left(\frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \right)^2 \left\{ \ln \frac{\kappa^2(2m^2 + \lambda\phi^2)\phi^2}{8\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=\pm} \frac{C_i^2}{64\pi^2} \left(\ln \frac{C_i}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right) + \cdots, \end{aligned} \quad (2.45)$$

となる.*¹³ (2.45) 式では第一, 第二行目が重力による 1-loop, 第三項目が重力と Higgs 場による 1-loop の量子補正となっている. 重力による量子補正には κ^2, κ^4 の係数がそれぞれかかっておりエネルギースケール $\phi \ll M_{\text{Pl}}$ と Higgs 場の値が小さい時には十分に無視することができる.

この重力の 1-loop の量子補正の特徴として ϕ^6, ϕ^8 の発散項の存在がある. このような高次の場の補正は標準模型で量子補正を考えていくと存在しない. これらの発散項は通常考える Higgs 場のエネルギースケールでは係数の κ によって抑制される, しかしながら M_{Pl} のスケールに近づくにつれそれらの項の影響が大きくなっていくことが予想できる. これらの発散項は標準模型内の結合定数に繰り込むことはできない. 本論文ではこの繰り込み不可な高次の発散項に対してカットオフスケール Λ を適宜値を与えることによって解析を行う.

(2.45) 式の量子補正の繰り込みを考えていくにあたり, 各結合定数に単純に繰り込みが可能な項 δV_1 と不可能な項 δV_2 に分割してみる. (2.45) 式を Higgs 場の乗数毎に分割してみると $\phi^2, \phi^4, \phi^6, \phi^8$ そして $\phi^n \ln(\phi)$ の項が存在する. このうち ϕ^2, ϕ^4 の項は繰り込みを考えることができ, その他の項は係数に繰り込むことができない. このことから δV_1 は ϕ^2, ϕ^4 の発散項が該当し, δV_2 には ϕ^6, ϕ^8 そして $\phi^n \ln(\phi)$ の項が該当する.

δV_1 のみ取り出してポテンシャル $V(\phi)$ に対して繰り込みを考えてみる. その繰り込みの後 δV_2 を足しあげたものを有効ポテンシャル V_{eff} と置くと,

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}}(\phi) = & \frac{m^2(\mu)}{2}\phi^2 + \frac{\lambda(\mu)}{4}\phi^4 \\
 & + \frac{3}{64\pi^2} (m^2(\mu) + \lambda(\mu)\phi^2)^2 \left(\ln \frac{m^2(\mu) + \lambda(\mu)\phi^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \\
 & + \frac{9\kappa^4}{256\pi^2} \left(\frac{m^2(\mu)}{2}\phi^2 + \frac{\lambda(\mu)}{4}\phi^4 \right)^2 \left\{ \ln \frac{\kappa^2 (2m^2(\mu) + \lambda(\mu)\phi^2) \phi^2}{8\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right\} \\
 & + \sum_{i=\pm} \frac{C_i^2(\mu)}{64\pi^2} \left(\ln \frac{C_i(\mu)}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right) \\
 & - \frac{\kappa^2}{32\pi^2} (m^4(\mu)\phi^2 + 2\lambda(\mu)m^2(\mu)\phi^4) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \\
 & + \frac{5\kappa^4}{512\pi^2} m^4(\mu)\phi^4 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right), \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

と求めることができる. ここで $m^2(\mu), \lambda(\mu)$ また $C_i(\mu)$ は繰り込まれたパラメータである. これらの繰り込まれたパラメータを重力の 1-loop と標準模型による 1-, 2-loop 補正を含めた繰り込み群方程式を解くことで, 各パラメータの値を解析することができる. 解

*¹³ このとき量子補正内の係数の一部が計算方法によって差が出てくる. この差は $\ln \Lambda$ の発散を $\ln e\Lambda$ と取り直す事で対応させることができる. カットオフスケール Λ の任意性からこの係数の差は今回の議論において大きな影響を与えない. 本章では [20] の表記と同じ係数を用いている.

析したパラメータの値を用いることによって, (2.46) 式の V_{eff} を標準模型の 1-, 2-loop 補正と重力の 1-loop 補正を含んだ有効ポテンシャルとして解析していく.

この解析手法はいくつかの点で厳密な計算とはいえない. 第一に (2.46) 式のポテンシャルには fermion や gauge boson の loop 補正によって生じる $\phi^n \ln \phi$ の項は含まれていない. しかしながら重力による 1-loop 補正の影響が強くなっていると考えられる M_{Pl} 近傍のスケールではそれらの項の有無による影響は小さいと考えられる. 第二に各パラメータの RG flow を解析するに当たり, 標準模型内での議論を行っている論文 [3] を参考として閾値を導入するが, 厳密には重力による量子補正によってこれらの閾値も修正される.

各パラメータの解析を行っていくにあたり (2.45) 式での 1-loop 以外に以下のような重力による loop 補正も考えていく.

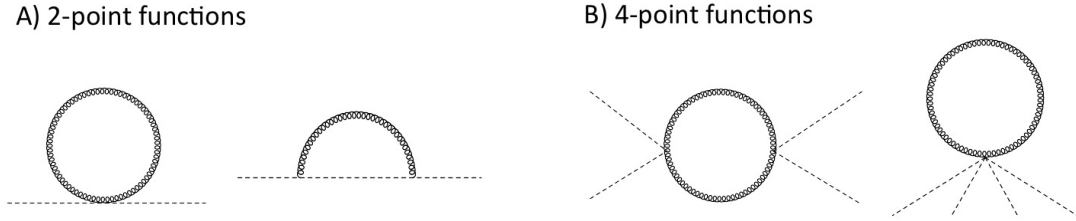


図 2.1 Higgs 場の 2 点, 4 点の結合定数に対する重力の 1-loop 補正.

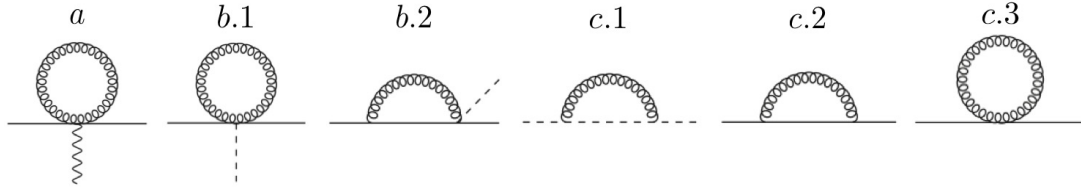


図 2.2 重力による各種結合定数と場に対する 1-loop 補正. (a) gauge 結合定数, (b.1 ~ b.2) 湯川結合定数, (c.1) Higgs 場 (c.2 ~ c.3) Dirac 場.

これらの補正を考えることによって各種結合定数に対しての重力の β 関数 $\beta^{(g)}$ と各場に対しての異常次元 $\gamma^{(g)}$ は

$$\begin{aligned} \beta_{m^2}^{(g)} &= \frac{5\kappa^2 m^2}{16\pi^2} \mu^2 - \frac{\kappa^2 m^4}{8\pi^2}, \quad \beta_{\lambda}^{(g)} = \frac{5\kappa^2 \lambda}{16\pi^2} \mu^2 - \frac{\kappa^2 \lambda m^2}{2\pi^2} - \frac{5\kappa^4 m^4}{64\pi^2}, \\ \beta_{g_i}^{(g)} &= \frac{5\kappa^2}{16\pi^2} g_i \mu^2, \quad \beta_{y_t}^{(g)} = \frac{\kappa^2}{2\pi^2} y_t \mu^2, \quad \gamma_{\phi}^{(g)} = -\frac{\kappa^2 m^2}{32\pi^2}, \quad \gamma_t^{(g)} = \frac{27\kappa^2}{512\pi^2} \mu^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

となる.

2.4 解析

結合定数 $\lambda(\mu)$ の走りは繰り込み群方程式

$$\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = \beta_\lambda^{(1)} + \beta_\lambda^{(2)} + \beta_\lambda^{(g)} - 4\lambda\gamma_\phi^{(g)} \quad (2.48)$$

を用いて解析を行う．ほかの各種結合定数に関しても同様に標準模型の 1-, 2-loop による β 関数 $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}$ と重力の 1-loop による $\beta^{(g)}$ と異常次元 $\gamma^{(g)}$ を用いて繰り込み群方程式を作り解析を行う．

解析時の各種結合定数の閾値は論文 [3] を参考にして

$$\begin{aligned} g_Y(M_t) &= 0.45187, \quad g_2(M_t) = 0.65354, \\ g_3(M_t) &= 1.1645 - 0.00046 \left(\frac{M_t - 173.15}{\text{GeV}} \right), \\ y_t(M_t) &= 0.93587 + 0.00557 \left(\frac{M_t - 173.15}{\text{GeV}} \right) - 0.00003 \left(\frac{M_H - 125}{\text{GeV}} \right), \\ \lambda(M_t) &= 0.12577 + 0.00205 \left(\frac{M_H - 125}{\text{GeV}} \right) - 0.00004 \left(\frac{M_t - 173.15}{\text{GeV}} \right), \end{aligned} \quad (2.49)$$

上記のように取った． $m^2(M_t)$ に関しては有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\phi)$ がエネルギースケールが 100GeV オーダーのとき真空期待値 $v = 246\text{GeV}$ を持つように閾値を調整した．

上記の繰り込み群方程式と閾値を用いて、以下のような解析を行っていく．

- i) $\lambda(\mu)$ の RG flow,
- ii) 有効ポテンシャル V_{eff} の $\phi \simeq M_{\text{Pl}}$ 周辺での振舞い,
- iii) 有効ポテンシャル V_{eff} のカットオフスケール Λ への依存性.

重力がない場合の $\lambda(\mu)$ の RG flow はすでに知られている [3, 4]． $\lambda(\mu)$, V_{eff} に対しての重力の量子効果は係数 κ の存在によって強く抑制される．そのためエネルギースケール μ が Planck 質量 M_{Pl} よりも十分に小さい領域では $\lambda(\mu)$ と V_{eff} の RG flow は標準模型内でのものと同じような振る舞いをすると予想できる．

解析を行っていくうえのパラメータとしてトップクォークの質量 M_t , Higgs 粒子の質量 M_H , カットオフスケール Λ が存在する．このうち Higgs 粒子の質量 M_t による変化は微小なものであったため, Particle Data Group での値 ^{*14}を参考に $M_H = 125.09$ と固定して解析を行った．

今回行った解析において, i) の解析からは $\mu \simeq M_{\text{Pl}}$ のエネルギースケールで重力の量子補正が大きく影響を与えはじめることがわかった．次に ii) の解析では $\phi \simeq M_{\text{Pl}}$ 近傍か

^{*14} 解析を行った 2015 年 11 月時の値

ら重力の影響が出始め $\phi > M_{\text{Pl}}$ のスケールでは重力の量子補正がポテンシャルの振る舞いに対し支配的であることを読み取った. iii) の解析ではカットオフスケール Λ に対して (2.46) 式の有効ポテンシャルが大きく依存していることが確認できた.

i) $\lambda(\mu)$ の RG flow

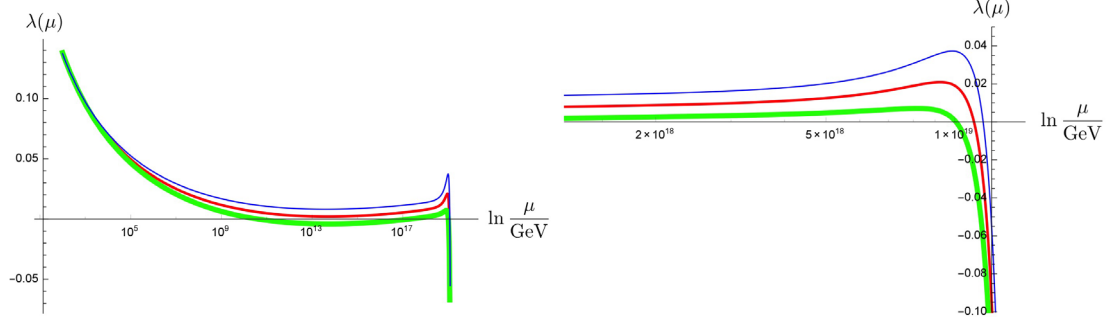


図 2.3 左図 : トップクォークの質量をそれぞれ $M_t = 174\text{GeV}$ (Green), 173GeV (Red), 172GeV (Blue) と取ったときの $\lambda(\mu)$ エネルギースケール μ に対する依存性. 右図 : エネルギースケールが Planck 質量近傍での振る舞い.

図 (2.3) のように, $\lambda(\mu)$ の振る舞いは Planck 質量近傍まで標準模型内での議論のものとほとんど変化がない, 一方で Planck 質量近傍のエネルギースケールから重力の影響が強く出ているのがわかる. $\lambda(\mu)$ の値は $\mu \simeq M_{\text{Pl}}$ で急激に落ち込み負の値になっている. これは重力の量子補正による ϕ^6 , ϕ^8 項といった高次の項の存在がない場合, Planck 質量近傍のエネルギースケールでポテンシャルが不安定となってしまうことを示している.

M_t に対しての依存性として, $\mu \simeq M_{\text{Pl}}$ 近傍で急激に値を下げていく直前まではトップクォークの質量が軽いほど λ の値が大きくなるが, $\mu \simeq M_{\text{Pl}}$ での急激な変化で λ が負の値になるという点では共通している.

ii) 有効ポテンシャル V_{eff} の $\phi \simeq M_{\text{Pl}}$ 周辺での振る舞い

図 2.4 では $\phi \simeq M_{\text{Pl}}$ 周辺での各エネルギースケール毎の有効ポテンシャル V_{eff} の振る舞いをしている. ここで各パラメータは $M_t = 173.21\text{GeV}$, $\Lambda = M_{\text{Pl}}$ と取った.

重力の量子補正による影響は $\phi = \mathcal{O}(10^{18}\text{GeV})$ 周辺から大きくなり始めた. このスケールでは ϕ^6, ϕ^8 といった高次の項による影響が大きくなってくる.

ポテンシャルの振る舞いとして $\phi \simeq M_{\text{Pl}}$ 周辺でどのエネルギースケールのポテンシャルでも極小値を取る. この振る舞いは $\lambda(\mu)$ の値の正負に依らずに生じていることが図 2.3 との比較でわかる. この振る舞いは重力の量子補正によって生じた ϕ^6 , ϕ^8 項の影響によるものである. 特に $\phi^8 \ln \phi$ の項は λ^2 に比例しているため, λ の値の符号に関わりなく正の値としてポテンシャルに大きな影響を与えている.

図 2.5 では $\phi \simeq M_{\text{Pl}}$ 近傍でのトップクォーク M_t に対しての依存性を示している. こ

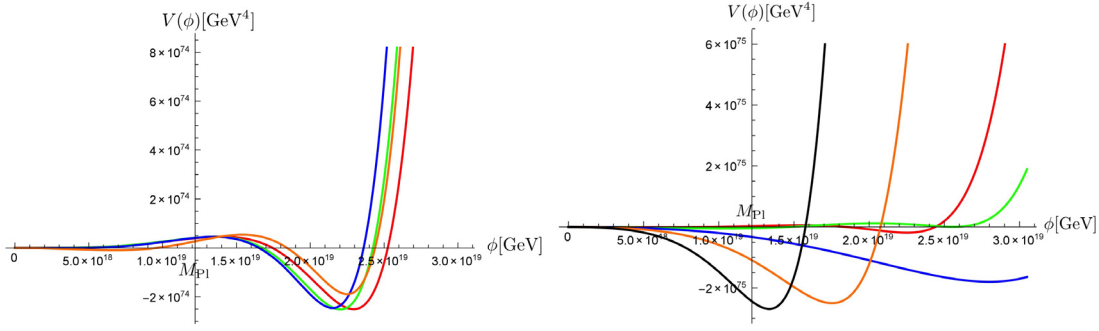


図 2.4 任意のエネルギースケール毎の $\phi \sim M_{\text{Pl}}$ 周辺の有効ポテンシャル $V(\phi, \mu)$. 左図: $\mu = 0.5M_{\text{Pl}}$ (Red), $\mu = 0.6M_{\text{Pl}}$ (Green), $\mu = 0.7M_{\text{Pl}}$ (Blue) and $\mu = 0.8M_{\text{Pl}}$ (Orange). 右図: $\mu = 0.8M_{\text{Pl}}$ (Red), $\mu = 0.85M_{\text{Pl}}$ (Green), $\mu = 0.9M_{\text{Pl}}$ (Blue), $\mu = 0.95M_{\text{Pl}}$ (Orange) and $\mu = M_{\text{Pl}}$ (Black).

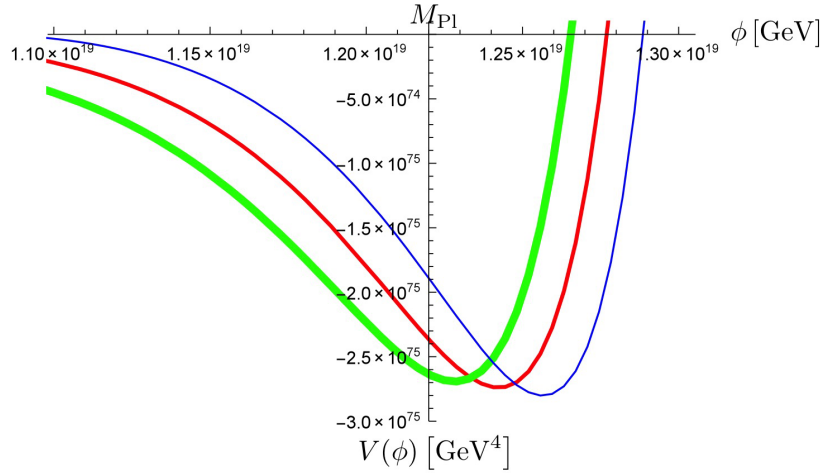


図 2.5 $\phi \sim M_{\text{Pl}}$ 周辺での任意のトップクォークの質量ごとの有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\phi)$ の振る舞い. $M_t = 174\text{GeV}$ (Green), 173GeV (Red), 172GeV (Blue).

のとき解析を行ううえでの条件として $\mu = \phi$ という条件を入れている. このときカットオフスケールの値は $\Lambda = M_{\text{Pl}}$ と取っている.

iii) 有効ポテンシャル V_{eff} のカットオフスケール Λ への依存性

図 2.6 では $\phi \simeq M_{\text{Pl}}$ 近傍でのカットオフスケール Λ に対しての依存性を示している. このとき解析を行ううえでの条件として $\mu = \phi$ という条件を入れている. トップクォークの質量は $M_t = 173.21\text{GeV}$ としている.

今回 ϕ^6 , ϕ^8 の量子補正を扱う上でカットオフスケール Λ を導入している. このカットオフスケールは任意のパラメータであるためこのパラメータに対しての依存性が強いと理論としての予言能力を著しく失ってしまう.

図 2.6 の結果を見ると, ϕ^6 , ϕ^8 の項が影響力を強く持っている $\phi \gtrsim M_{\text{Pl}}$ の領域で 有効ポテンシャルはカットオフスケール Λ に対して強く依存していることがわかる.

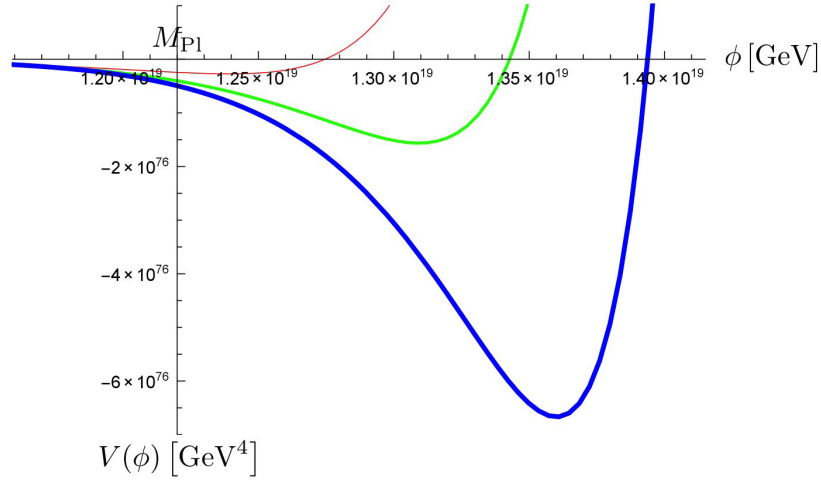


図 2.6 任意のカットオフスケールでの有効ポテンシャル V_{eff} , $\Lambda = 3M_{\text{Pl}}$ (Blue), $2M_{\text{Pl}}$ (Green), $1M_{\text{Pl}}$ (Red).

一方でポテンシャルはカットオフスケールの変化に依らず極小値を持つ。極小値でのポテンシャルの値 $V_{\text{eff}}(\phi_{\text{min}})$ はカットオフスケールの値に対して強く依存しているが、極小値を持つときの Higgs 場の値 ϕ_{min} の値はカットオフスケールの値にさほど影響されていない。このポテンシャルの極小値の存在はもうひとつのパラメータであるトップクォークの質量の変化に対しても依らなかった。したがって重力の 1-loop 量子補正のレベルでは有効ポテンシャル V_{eff} は M_{Pl} 近傍に極小値を持つと考えられる。

2.5 結論

この章では Higgs ポテンシャルに対しての重力の 1-loop 量子補正をカットオフスケール Λ を導入して考えた。この量子補正は $\mu \ll M_{\text{Pl}}$, $\phi \ll M_{\text{Pl}}$ のスケールではほとんど影響してこないが、 M_{Pl} 近傍で大きく影響してくることがわかった。特に重力の量子補正によって生成される ϕ^6 , ϕ^8 項はこの領域でポテンシャルに大きな影響を与えている。このことから Higgs ポテンシャルの安定性を M_{Pl} スケール近傍で考えるには重力の量子補正を考えることが不可欠であるといえる。

Einstein 重力は繰り込み不可能な理論であるため、本議論ではカットオフスケール Λ を導入している。このカットオフスケールに対しての依存性は非常に強くなり問題となってしまうことが確認できた。次の章では高エネルギースケールでの振る舞いが良いとされている R^2 重力理論を用いて、この問題の解決を図る。

3 R^2 重力による量子効果

宇宙論で重力理論としてよく考えられている $f(R)$ 重力のひとつに R^2 重力がある. この R^2 重力理論は高エネルギー領域での振る舞いがよいことがわかっている [31, 32].^{*15} このことから Higgs ポテンシャルに対してこの重力理論から与えられる量子補正は Einstein 重力で問題となった高次の項に対してのカットオフスケールの問題を解決することができる可能性がある.

3.1 Set up

Higgs ポテンシャルに対する R^2 重力の量子補正を求めるにあたり, 作用を 標準模型 + R^2 重力と取る. 即ち

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{2}{\kappa^2} R + \alpha_1 R^2 + \alpha_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\partial_\mu H)^\dagger (\partial_\nu H) + m^2 H^\dagger H - \lambda (H^\dagger H)^2 + \dots \right]. \quad (3.1)$$

となる. このとき \dots は標準模型内の表示されていない作用を表す. R^2 重力と Einstein 重力との差は第 2, 3 項の R^2 , $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ といった曲率の 2 次の項の存在である.^{*16} これらの項は 4 階の微分を含んでおり, その存在によって高エネルギー領域で重力場の伝搬が非常に起こりにくくなる.

3.2 R^2 重力による量子補正

Higgs ポテンシャルに対しての R^2 重力による 1-loop 量子補正を考えていく. 1-loop の量子補正を計算するにあたりまず作用中の量子場の 2 次の項を見てみる. Higgs 量子場と重力の量子場に注目して 2 次の項を見てみると,

$$S^{\text{quad}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} h_{ab} D^{ab:cd} h_{cd} - h_{ab} [\eta^{ab} m_B^2] \sigma_2 - \frac{1}{2} \sigma_2 [\partial^2 + m_C^2] \sigma_2 - \sum \frac{1}{2} \Phi_I [\partial^2 + m_D^2] \Phi_I \right], \quad (3.2)$$

^{*15} R^2 重力はユニタリティーが破れていることがわかっている [31]. そのため厳密には重力場の量子論として破綻している. 本論文では摂動的に R^2 重力理論が成り立っているものとして仮定して考えていく.

^{*16} R^2 , $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ の項のほかに Riemann 曲率テンソルの 2 次の項 $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ も考えられるがこの項は R^2 , $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ の項に展開できるため組み入れる必要はない.

となる.*¹⁷このとき $\Phi_I = \sigma_1, \pi_1, \pi_2$, $m_B^2 = \frac{\kappa}{2} (m^2 \phi + \lambda \phi^3)$, $m_C^2 = m^2 + 3\lambda \phi^2$, $m_D^2 = m^2 + \lambda \phi^2$ また

$$\begin{aligned} P^{ab:cd} &= \frac{1}{2} [\eta^{ab} \eta^{cd} - \eta^{ac} \eta^{bd} - \eta^{ad} \eta^{bc}], \\ D^{ab:cd} &= P^{ab:cd} (-\partial^2 + m_A^2) - \frac{\kappa^2}{4} [2\alpha_1 \eta^{ab} \eta^{cd} + \alpha_2 (\eta^{ac} \eta^{bd} + \eta^{ad} \eta^{bc})] \partial^4, \\ m_A^2 &= \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

と置いている.

(3.2) 式の重力場の 2 次の項に注目すると R^2 重力の伝搬関数を求めることができる. この R^2 重力の伝搬関数 $\tilde{D}_{ab:cd}$ は,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ab:cd} &= \frac{1}{k^2 + m_A^2 + \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} k^4} P_{ab:cd} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{k^2 + m_A^2 + \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} k^4} \left(1 - \frac{k^2 + m_A^2 - \kappa^2 \alpha_1 k^4}{k^2 + m_A^2 - \frac{\kappa^2}{2} (4\alpha_1 + \alpha_2) k^4} \right) \eta_{ab} \eta_{cd}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

と求めることができる. このとき k^2 は重力子の運動量に対応している.

(3.4) 式を見ると, 重力子の運動量 k が小さい領域では $k^2 + m_A^2 + \alpha k^4 \simeq k^2 + m_A^2$ と近似できるため, 第二項が無視できるようになり Einstein 重力の伝搬関数と対応していることがわかる. その一方で重力子の運動量 k が十分に大きい領域では R^2 重力の伝搬関数は, 運動量の 4 乗に逆比例するようになっていくことがわかる. このように伝搬関数が運動量の 4 乗に逆比例していると, 量子補正での発散が抑制される可能性が出てくる.

(3.2) 式を基に Higgs ポテンシャルに対しての量子補正 δV を計算すると

$$\begin{aligned} \delta V &= \frac{1}{64\pi^2} m_C^2 \Lambda^2 + \frac{3}{64\pi^2} m_D^4 \left(\ln \frac{m_D^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - \frac{9}{32\pi^2} \frac{m_A^2}{\kappa^2 \alpha_2} \left[\ln \left(\frac{m_{A+}^2}{\Lambda^2 - m_{A+}^2} \right) + \ln \left(\frac{m_{A-}^2}{\Lambda^2 - m_{A-}^2} \right) - 1 \right] \\ &\quad + \frac{a^2 - b}{192\pi^2} \ln \left(\frac{c}{\Lambda^6 + a\Lambda^4 + b\Lambda^2 + c} \right) \\ &\quad + \frac{9}{32\pi^2} \frac{\sqrt{1 - 2\kappa^2 \alpha_2 m_A^2}}{\kappa^4 \alpha_2^2} \left[\ln \left(\frac{m_{A+}^2}{m_{A-}^2} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2 - m_{A-}^2}{\Lambda^2 - m_{A+}^2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{D_+}{128\pi^2} \left[\ln \left(\frac{m_2^4}{m_1^2 m_3^2} \right) - \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_2^2}{\Lambda^2 + m_1^2} \right) - \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_2^2}{\Lambda^2 + m_3^2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{i\sqrt{3}D_-}{128\pi^2} \left[\ln \left(\frac{m_1^2}{m_3^2} \right) - \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_1^2}{\Lambda^2 + m_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

*¹⁷ 導出過程は A.1.12 参照

となる.*¹⁸ ここで各種定義として

$$m_{A+}^2 := \frac{1}{\kappa^2 \alpha_2} \left(1 + \sqrt{1 - 2\kappa^2 \alpha_2 m_A^2} \right), \quad (3.6)$$

$$m_{A-}^2 := \frac{1}{\kappa^2 \alpha_2} \left(1 - \sqrt{1 - 2\kappa^2 \alpha_2 m_A^2} \right), \quad (3.7)$$

$$a := -m_C^2 - \frac{2}{\kappa^2 (\alpha_2 + 4\alpha_1)}, \quad (3.8)$$

$$b := \frac{2}{\kappa^2 (\alpha_2 + 4\alpha_1)} (m_C^2 - m_A^2), \quad (3.9)$$

$$c := \frac{2}{\kappa^2 (\alpha_2 + 4\alpha_1)} (m_C^2 m_A^2 - 4m_B^4), \quad (3.10)$$

$$m_i^2 := e^{i\theta_i} (-u + v)^{1/3} + e^{-i\theta_i} (-u - v)^{1/3} - \frac{a}{3}, \quad (3.11)$$

$$\theta_i = \left(-\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{2}{3}\pi \right), \quad (3.12)$$

$$u := \frac{27c + 2a^3 - 9ab}{54}, \quad (3.13)$$

$$v := \left(u^2 + \left(\frac{3b - a^2}{9} \right)^3 \right)^{1/2}, \quad (3.14)$$

$$D_+ := \left[(-u + v)^{2/3} + (-u - v)^{2/3} - \frac{2}{3}a(-u + v)^{1/3} - \frac{2}{3}a(-u - v)^{1/3} \right], \quad (3.15)$$

$$D_- := \left[(-u + v)^{2/3} - (-u - v)^{2/3} + \frac{2}{3}a(-u + v)^{1/3} - \frac{2}{3}a(-u - v)^{1/3} \right] \quad (3.16)$$

と置いている. このとき m_i^2 は三次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解である.

(3.5) 式の量子補正では 1 段落目から 3 段落目の項は ϕ^2, ϕ^4 項となっている. これらの項はカットオフスケール Λ を無限に取ることで発散する項を含んでいる. このうち 2, 3 段落目の項は R^2 重力による量子補正を含んでおり R^2 重力においても ϕ^2, ϕ^4 の項に対しては R^2 重力の量子補正は発散項を有していることがわかる. (3.5) 式の 4 段落目以降の項は ϕ^6, ϕ^8 といった高次の Higgs 場の項を有している. しかしながらこれらの項はカットオフスケール Λ が大きい領域では Λ が相殺するような形をしている. このことから 1-loop レベルでは R^2 重力による量子補正では繰り込み可能な ϕ^2, ϕ^4 の項において発散する項が存在するが, 繰り込み不可となる ϕ^6, ϕ^8 といった Higgs 場の高次の項に対しては発散していないことがわかる.

*¹⁸ 導出過程は A.3 を参照.

3.3 結論

この章では Higgs ポテンシャルに対して Einstein 重力の 1-loop 量子補正を考えた際、カットオフスケール Λ に強く依存する問題を解決するために、高エネルギースケールで重力場の伝播が抑制される R^2 重力による 1-loop 量子補正を考えた。

この Higgs ポテンシャルに対する R^2 重力による 1-loop レベルでの量子補正では、繰り込み可能な発散項は確認できる一方で、Einstein 重力の量子補正に見られるような繰り込み不可となる Higgs 場 ϕ の ϕ^6 , ϕ^8 といった高次の項での発散は見られなかった。このことより Einstein 重力の議論のときと同じような繰り込みを考えていったとき、カットオフスケールへの依存性は R^2 重力理論を用いることで解決できるといえる。今回のこの結果は 1-loop までの結果と限定的なものであるため、Higgs ポテンシャルに対しての R^2 重力による量子補正が繰り込み可能であるかどうか厳密な議論はできない。^{*19} 厳密に繰り込み可能かどうかを議論するためにはより高次の量子補正に繰り込み不可能な発散が現れないかを考えていく必要がある。

^{*19} ユニタリティーが破れていないことが繰り込み可能であることと同義であるという示唆がある [34]。そのためこの示唆が成り立っていると仮定すると、より高次の量子補正を考えていった際に繰り込み不可能となっていると考えられる。

4 重力補正由来のダークエネルギー

素粒子物理学と宇宙論との齟齬として宇宙定数の大きさの問題がある。Einstein 重力による量子補正を大胆な仮説とともに考えてみると、この宇宙定数の問題に対する解答とすることができる可能性がある。この章では重力の量子補正による宇宙論への影響を考えてみる [35].

4.1 宇宙定数問題

素粒子物理学の抱える大きな問題点のひとつとして宇宙定数の問題がある [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. この問題はいくつかの要素によって構成されている。まず第一に真空エネルギー密度 ρ_V が宇宙定数 Λ になりえ、また真空エネルギーは Higgs 機構における電弱対称性の破れ、クォーク凝縮によるカイラル対称性の破れといった相転移に伴う各粒子の零点エネルギーやポテンシャルエネルギーの存在が源となる点である。

第二にこの真空エネルギーがカットオフスケールを含んだ大きな量子補正の影響を受ける点である。

最後に第三点目として宇宙定数 Λ_c の観測値 $\Lambda_{c(\text{exp})}$ の値が $\Lambda_{c(\text{exp})} \simeq 8\pi G \cdot 2.4 \times 10^{-47} \text{GeV}^4$ と非常に小さいという点がある^{*20}。このときエネルギー密度 ρ_{DE} は $\rho_{\text{DE}} \equiv \Lambda_{c(\text{exp})}/(8\pi G)$ と定義され暗黒エネルギー密度と呼ばれる。この暗黒エネルギーの存在は大きな謎となっている。

これらの問題点は Einstein 重力と標準模型の枠組み内で齟齬を引き起こしている。

4.2 暗黒エネルギーとその源

暗黒エネルギーの源となるものとして真空エネルギーと零点エネルギーの存在がある。

完全流体のエネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

と与えられる。このとき ρ, p, u^μ はそれぞれエネルギー密度、圧力、流体の 4 元ベクトルと定義している。真空でのエネルギー運動量テンソルは

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = -\frac{\Lambda_v}{8\pi G} g^{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

となる。ここで Λ_c は定数である。(4.1) 式と (4.2) 式から

$$\rho_v = -p_v, \quad \langle T^{\mu\nu} \rangle = -\rho_v g^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

^{*20} この宇宙定数の値は現在の宇宙が加速膨張していることを観測することによって得られる [36].

といった関係性を得ることができる．ここで $\rho_v (= \Lambda_v/8\pi G)$, p_v はそれぞれ真空でのエネルギー密度, 圧力となっている．ここから $\rho_v > 0$ のとき真空では負の圧力が働いていることがわかる．

Einstein 方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda_c^{(0)}g^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu} \quad (4.4)$$

と与えられる．

ここで $\Lambda_c^{(0)}$ は裸の宇宙定数である．真空でのエネルギー運動量テンソル (4.2) 式とこの (4.4) 式から宇宙定数は $\Lambda_c = \Lambda_c^{(0)} + \Lambda_v$ となる．

真空でのエネルギー密度 ρ_v の源となりうるものをみしてみる．

まず第一に各粒子の零点エネルギーを見てみる．質量 m の相対論的なボソンの零点廻りの揺らぎによるエネルギー密度 ρ_z 及び圧力 p_z は

$$\rho_z = \frac{1}{2} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad p_z = \frac{1}{6} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} \quad (4.5)$$

となる．ここで \mathbf{k} はボソンの運動量である．

第二に電弱対称性が破れた後の Higgs ポテンシャルに起因するエネルギー密度である．このときのエネルギー密度の絶対値は

$$|\rho_{\text{Higgs}}| = O(v^4) \simeq 10^{19} \text{GeV}^4 \quad (4.6)$$

と見積もることができる．このとき $v (= 246 \text{GeV})$ は Higgs 二重項場の真空期待値である．

最後に第三としてクォーク凝縮によるカイラル対称性の破れに伴うエネルギー密度の存在がある．この際のエネルギー密度の絶対値は

$$|\rho_{\text{QCD}}| = O(\Lambda_{\text{QCD}}^4) \simeq 10^{-2} \sim 10^{-3} \text{GeV}^4 \quad (4.7)$$

と見積もることができる．ここで Λ_{QCD} は QCD スケールである．

暗黒エネルギーの源となるもう一方の零点エネルギーについてみる．真空エネルギー密度はカットオフを含んだ非常に大きな量子補正の影響を受ける．この量子補正が零点エネルギーとなってくる．零点エネルギー密度は 1-loop レベルの有効ポテンシャルを用いることで求めることができる．このとき有効ポテンシャルは紫外発散に対するカットオフ Λ の 4 乗, 2 乗そして対数の項を内包している．

ρ_z 及び p_z に対しての (4.3) 式の真空での相対論的な普遍性を加味すると, (4.5) 式で表される ρ_z は

$$\rho_z = \frac{m^4}{64\pi^2} \ln \frac{m^2}{\Lambda^2}, \quad (4.8)$$

という形式になる [37, 38]．このとき Λ^4 や $m^2\Lambda^2$ に比例する項は $\rho_v = -p_v$ の関係を満たすことができない．これらの項が存在しないことは正則化によるものと考えることがで

きる．対数発散を除去すると ρ_z は

$$\rho_z = \frac{m^4}{64\pi^2} \ln \frac{m^2}{\mu^2}, \quad (4.9)$$

と与えられる．このとき μ は繰り込み点である．

(4.9) 式をもとに Higgs ボソンの零点エネルギーを見積もってみると

$$\rho_{z(\text{Higgs})} \simeq 10^7 \text{GeV}^4, \quad (4.10)$$

となる．見積もりに当たっては Higgs ボソンの質量 $m_H \simeq 126 \text{GeV}$ を使用し，また現在の宇宙の温度 $T_0 = 2.73 \text{K}$ をもとに $\mu \simeq 2.4 \times 10^{-13} \text{GeV}$ と対応させて用いた．

宇宙の加速膨張の観測から得られる宇宙定数の値は $8\pi G \cdot 2.4 \times 10^{-47} \text{GeV}^4$ と見積もられている．

一方で理論に基づいて見積もると，宇宙のエネルギー密度は

$$\rho_v = \sum_i \rho_{z(i)} + \rho_{\text{Higgs}} + \rho_{\text{QCD}} + \cdots, \quad (4.11)$$

となる．ここで $\rho_{z(i)}$ は i とラベルされた粒子の零点エネルギー密度である．また点線は新しい物理などによる未知のものによる寄与として置いている．

(4.6) 式や (4.7), (4.10) 式のエネルギー密度を観測値と比較してみると

$$|\rho_{\text{Higgs}}| > \rho_{z(\text{Higgs})} \gg |\rho_{\text{QCD}}| \gg \rho_{\text{DE}} = 2.4 \times 10^{-47} \text{GeV}^4, \quad (4.12)$$

と理論と観測での値が非常にかけ離れてしまっていることがわかる．このとき $\rho_{\text{DE}} (\equiv \Lambda_{\text{c(exp)}})$ は暗黒エネルギーである．新物理として超対称性のような高エネルギーでの物理を考えてみると ρ_v の大きさは TeV^4 の大きさになる可能性がある．超対称性は ρ_{DE} のスケールにまで ρ_v の大きさを減衰させるようには働かないため，通常不自然な値の調整が必要となってしまう．

(4.11) 式と (4.12) 式からくる不一致さが問題となっている．「なぜ真空でのエネルギー密度の観測値が理論のものと比較して非常に小さくなっているのか」そして「暗黒エネルギー密度の正体とは何なのか」が課題となる．

4.3 暗黒エネルギーの候補

CCP の手がかりと ρ_{DE} の正体を探るために，(4.11) 式の ρ_v が現実の物理として存在するのか，古典重力場が ρ_v を直接的に感じることができるのかといった疑問点から考えてみる．

重力の存在を除いたとき，物質からくる真空エネルギー $\langle V \rangle$ それ自体を直接的に観測することはできない．これは重力を含めないときエネルギーの大きさの増減に対して自由度が存在するためである．ここで物質とは重力場を除く光子等による量子補正を含むさまざ

まな場を指している。カシミール効果で議論されるように、唯一エネルギーの差のみが物理的な意味を持つてくる [39].

重力の存在下で, ρ_v が重力と直接結びついているとすると我々の太陽系内の惑星の運動に ρ_v の影響が現れているはずである [6, 40]. しかしながらそのような運動は火星の運動からは観測されていない. そのため ρ_v の大きさは

$$|\rho_v| \leq 3 \times 10^{-32} \text{GeV}^4 \quad (4.13)$$

という制限が与えられる.

(4.6) 式や (4.7) 式, (4.10) 式から分かるように, ρ_{Higgs} や $\rho_{z(i)}$ (質量が 10eV 以上のものの), ρ_{QCD} の存在は直接的に重力と結びつくとも太陽系の安定性を脅かす. そのため古典的な重力場が $\langle V \rangle$ の大部分を感じないと仮定するのが自然である.

対照的に慣性質量に対する重力質量の比は重い核のために変化しない. そのため等価原理は原子レベルでは精度を保ち, 重力場は物質の放出, 吸収を伴う量子補正を含むすべてのプロセスに結合すると結論づけるのが合理的である [41].

Einstein 重力が古典的に有効理論であるという立場に基づいて, 宇宙定数問題を議論する物理的作用を考えると

$$\begin{aligned} S_{\text{cl}} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{2}{\kappa^2} R + \mathcal{L}_{\text{Cl}} - \rho_{\text{DE}} \right], \\ \rho_{\text{DE}} &\equiv \frac{4\Lambda_{\text{c(exp)}}}{\kappa^2} = 2.4 \times 10^{-47} \text{GeV}^4, \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる. ここで $g^{\mu\nu}$ は古典重力場であり, $g \equiv \det g^{\mu\nu}$ と定義している. また \mathcal{L}_{Cl} は定数項を持たない古典的な物質のラグランジアン密度である. 有効理論は一般的に実証的な理論であるので, V の大部分が重力と直接的に結びつかない理由と暗黒エネルギーの正体について答えることができなくてもそれほど奇妙なことではないといえる. これらの問題点は基礎理論に対しての課題として残る形になる.

次になぜ (4.14) 式を通常量子場の理論で導くことが難しいのかを考える. 量子場の作用は

$$S = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[\frac{2}{\kappa^2} \hat{R} + \mathcal{L}_{\text{SM}} + \mathcal{L}_\alpha \right]. \quad (4.15)$$

とする. ここで \hat{R} は重力の量子場 $\hat{g}^{\mu\nu}$ により形成される Ricci スカラーである. また $\hat{g} = \det \hat{g}^{\mu\nu}$ そして \mathcal{L}_{SM} はそれぞれ標準模型粒子と標準模型外の粒子のラグランジアン密度である.

重力と真空エネルギーの結合を表す振幅は Green 関数

$$G^n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\hat{g}_{\mu_1 \nu_1}(x_1) \cdots \hat{g}_{\mu_n \nu_n}(x_n)) | 0 \rangle, \quad (4.16)$$

を計算することで得られる．例として Minkowski 時空を背景場とする二点関数は

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{i}{4} \int d^4x \langle 0 | T(\hat{h}_{\mu_1 \nu_1}(x_1) \hat{h}_{\alpha}^{\beta}(x)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{h}_{\mu_2 \nu_2}(x_2) \hat{h}_{\beta}^{\alpha}(x)) | 0 \rangle \quad (4.17)$$

$$\times \langle 0 | T(\mathcal{H}'_{\text{int}}(x)) | 0 \rangle + \dots$$

と記述できる．ここで $\hat{h}^{\mu\nu}(x)$ は相互作用描像における重力場の量子揺らぎ, $\mathcal{H}'_{\text{int}}(x)$ はハミルトニアン密度である．遷移振幅は外線上のプロパゲーターを除くことで得ることができる．真空期待値 $\langle 0 | T(\mathcal{H}'_{\text{int}}(x)) | 0 \rangle$ は真空でのエネルギー密度となる．このとき 外線上の重力場を古典重力場と同一視した後に宇宙定数の大部分が導出される．ここで外線上の重力場とは実状態として波動関数で表される重力場である．

つづいて (4.14) 式と (4.17) 式との対応を考えてみる．このとき大胆で大きな仮説を置く必要がある．即ち「古典重力場は重力と物質との結合が微視的なものであるにもかかわらず, 真空エネルギーの大部分と結合しない．」という仮説をおく．この仮定の根拠は外線上の重力場の未知の特徴に由来となることを期待するしかない．例えば一種の排他原理のようなものが大胆な仮説として働く場合, 外線上の重量場は同一の状態をもつことができず外線上の重力場は真空エネルギーを感じることがないと考えられる．しかしながらその仮説が強力な形で成立すれば 4 元運動量の総量が 0 となる外線上の物質場の等価原理が破れてしまったり, あるいは重力場による散乱振幅が消えてしまったり, また暗黒エネルギーが消えてしまうなどの望ましくない結果となってしまうと考えられる．これらを改善するために「外線上の重力場の排他性は外線上の物質場, あるいは重力場による派生物, 内線上の重力場によって破れる」という新たな仮定が必要となる．ここで内線上の重力場とはプロパゲーターによって表される仮想状態の重力場である．留意点として, この排他原理は最初の仮定を正当化するための単なる一例である．ポイントとして「外線上の重力場が内線上の重力場を含む真空エネルギーの重力補正に結合できる」ということがある．

以上の仮定の下で, Minkowski 時空を背景場 ($g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$) とした場合の暗黒エネルギーの候補について考える．重力子のプロパゲーターは $\frac{i}{p^2 - \frac{\kappa^2}{2}V}$ となっていることを用いるとポテンシャル V に対しての重力のみによる量子補正は 1-loop レベルで

$$\delta_{\text{gr}} V = \frac{5}{32\pi^2} \left(\frac{\kappa^2 V}{2} \right)^2 \ln \frac{\kappa^2 V}{2\Lambda^2} \quad (4.18)$$

となる．ポテンシャル V を真空でのエネルギー $\langle V \rangle$ へと置き換え, 対数発散を差し引くことで重力場による零点エネルギー密度は

$$\rho_{\text{z(gr)}} = \frac{5}{32\pi^2} \left(\frac{\kappa^2 \langle V \rangle}{2} \right)^2 \ln \frac{\kappa^2 \langle V \rangle}{2\mu^2} \quad (4.19)$$

となる．もしこの $\rho_{z(\text{gr})}$ が ρ_{DE} の大部分を占めるとなると、 $\frac{\kappa^2 \langle V \rangle}{2}$ 、 $\langle V \rangle$ の大きさは

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2 \langle V \rangle}{2} &\simeq (4.4 \times 10^{-3} \text{eV})^2, \\ \langle V \rangle &\simeq (2.7 \text{TeV})^2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

と求めることができる．このとき μ には宇宙背景放射の黒体放射温度をもとに $\mu \simeq 2.4 \times 10^{-13} \text{GeV}$ ととっている．この $\langle V \rangle$ からテラスケールの物理が暗黒エネルギーに関係していると推測することができる．仮にあるスカラー場の零点エネルギーが $\langle V \rangle$ の大部分を占めているとすると、そのようなスカラー場は $O(1) \text{TeV}$ の質量を持ち、WIMP（弱い相互作用をする質量を持った暗黒物質の候補となる物質）の候補になると推測できる．この場合、真空が重力と直接結びつかない暗黒物質あるいはその超対称粒子に対して $O(1) \text{TeV}^4$ の零点エネルギーを要求し、また重力子の零点エネルギーが暗黒エネルギーの源となるという興味深いシナリオを得ることができる．

$\rho_{\text{DE}} = \rho_{z(\text{gr})}$ 、 $\langle V \rangle \simeq (2.7 \text{TeV})^4$ という状態での ρ_{DE} の変化を見てみる．いま μ を宇宙の温度と見立てると、 ρ_{DE} の値は定数ではなくなり

$$\rho_{z(\text{gr})} = \frac{5}{32\pi^2} \left(\frac{\kappa^2 \langle V \rangle}{2} \right)^2 \ln \left[\frac{\kappa^2 \langle V \rangle}{2T_0^2} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 \right], \quad (4.21)$$

と対数の形で変化するようになる．ここで T_0 は現在の宇宙の温度で $T_0 = 2.73 \text{K}$ 、 a 、 a_0 は順に任意の、現在のスケール因子である． ρ_{DE} が (4.14) 式のような変化をするとなる

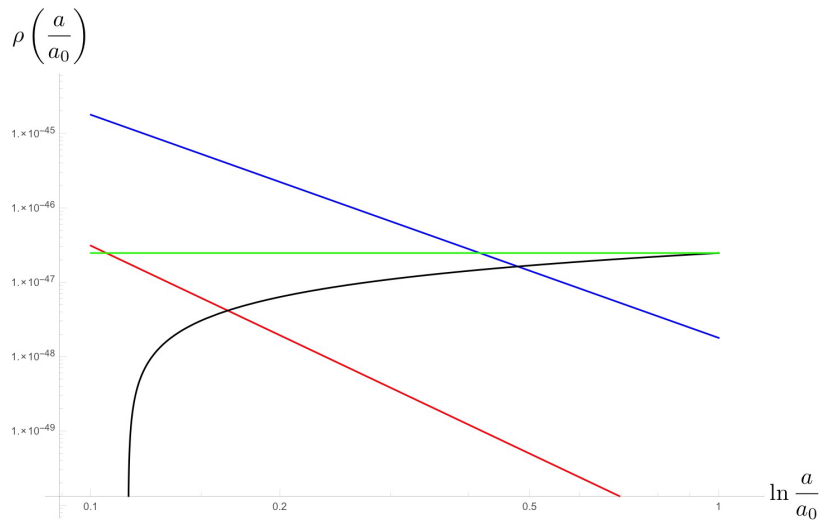


図 4.1 各エネルギー密度の変化．（赤： ρ_R 、青： ρ_M 、黒： ρ_{DE} ）ここで ρ_R は放射エネルギー密度、 ρ_M は非相対論的な物質のエネルギー密度である．

と、テラスケールの物理学において幾つか可能性が出てくる．まず第一にテラスケールを越える物理が真空エネルギーにたいして与える影響は小さいということが言える．そのた

め大統一の対称性の破れや巨大な零点エネルギーを生成するような超重粒子も存在しないことになる。第二に高いエネルギーでの物理が存在しているが、超対称性のような強力な対称性によって上手く相殺されている可能性もある。このとき大統一理論あるいは超重力理論のもとで真空エネルギーは減少する。これにより宇宙初期のインフレーション終了時の真空エネルギーは相殺されている可能性もある。第三に強力な機構が存在しない場合、高エネルギー領域の物理由来の大きな値を持つ真空エネルギーが生き残ってしまう。テラスケールを越えるようなこのような真空エネルギーには仮想状態の重力場が結合せず、(4.21) 式が保たれている可能性がある。

最後に $O(10^{13})\text{GeV}$ の質量を持つインフラトンの零点エネルギーの存在の可能性を考えてみる。作用として

$$\tilde{S} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{16\pi\tilde{G}} \tilde{R} + \mathcal{L}_{\text{inf}} + \dots \right], \quad (4.22)$$

とおいて考えてみる。ここで \tilde{G} は結合定数、 \tilde{R} は新しい重力場 $\tilde{g}^{\mu\nu}$ によって形成される Ricci スカラー曲率、 $\tilde{g} = \det \tilde{g}_{\mu\nu}$ 、 \mathcal{L}_{inf} はインフラトンのラグランジアン密度と置いている。またここで通常の重力子はインフラトンに直接結合しないと仮定している。通常の重力子のときと同様に考えると、 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ の零点エネルギーは

$$\rho_{z(\tilde{\text{gr}})} = \frac{5}{32\pi^2} \left(\frac{\tilde{\kappa}^2 \langle V_{\text{inf}} \rangle}{2} \right)^2 \ln \frac{\tilde{\kappa}^2 \langle V_{\text{inf}} \rangle}{2\mu^2}, \quad (4.23)$$

となる。ここで $\tilde{\kappa} = \sqrt{32\pi\tilde{G}}$ と置いている。 $\rho_{z(\tilde{\text{gr}})}$ が ρ_{DE} の大部分を占め、 $\langle V_{\text{inf}} \rangle = O(10^{4 \times 13})\text{GeV}^4$ と置くと $\tilde{\kappa}$ の大きさは $\kappa \simeq 10^{38}\text{GeV}$ となっている。

4.4 結論

この章では宇宙定数問題に関して有効理論という立場から考察し、以下にあげるような大胆な仮定の下で暗黒エネルギーの大部分が、 $O(1)\text{TeV}^4$ の真空エネルギーを含む重力の量子補正によって形作られる可能性を示した。このとき

- 重力子 $\hat{g}_{\mu\nu}$ は物質場のポテンシャルと係数 κ^2 を通じて結合し、また仮想状態としては真空エネルギーと同様の係数を介した上で結合する。
- 古典的な重力場は真空エネルギーの大部分と結合しない。
- 外線上の重力子は内線上の重力子を含む真空エネルギーの重力補正に結合することができる。

といった仮定を置いた。このとき 2 番目の仮定は通常の量子場の理論での理解は難しい。しかしながら宇宙定数問題が正しい理論なしに解決できない重要な問題であるならば、この仮定は現在の量子重力理論の形から宇宙定数問題が解決できていないことほど奇妙では

ないといえるだろう。これらの仮説が基本的なレベルでの重力の未知の特徴として実現されれば宇宙定数問題の大きな障壁を緩和することができる。今回推論の一例として、外線上の重力場に対して4次元運動量の総量が0となっている場合同一の場所にいられないという一種の排他原理を提示した。これは宇宙定数問題の背後にある物理を明らかにするヒントとなるかもしれない。

完全流体の場合 $p + \rho \leq 0$ のような条件は満たすことができないため、今回のような暗黒エネルギーが支配する宇宙は不安定になってしまうかもしれない。現象論としてモデルが成立するには物質が安定し、不安定性の時間的なスケールは宇宙の年齢よりも長くなければならないという条件を満たしていなければならない。

もし今章での推測が正しいとすれば、宇宙定数問題は上記の仮定を満たす微視的な領域での重力理論の構築という議題に置き換えることができる。重力理論の構築には今回の仮定以外にも新しい成分や斬新な形式を必要とするかもしれない。これらを検証するためにも重力のより多くの特徴と古典的な重力場と量子的な重力場との関係を追及していくことが重要だといえる。

5 まとめと展望

本論文では標準模型内での量子補正を考えていくと、Higgs ポテンシャルの安定性が Planck 質量近傍のエネルギースケールまで保たれている可能性があるという議論を背景に、Higgs ポテンシャルに対しての Planck 質量近傍での重力の量子補正の影響を Einstein 重力理論にカットオフスケール Λ を導入して解析を行った。

また Einstein 重力による量子補正を考えていった際問題となった有効ポテンシャルの強いカットオフスケールに対しての依存性の解決を狙って、繰り込み可能性が期待されている R^2 重力理論を用いて量子補正の算出と考察を行った。

最後に宇宙背景問題に対して重力の量子補正を元に考察を行っていった。この考察では重力に対して大胆な仮定を置くことで暗黒エネルギーの大部分を重力の量子補正が占めるとした。そのうえで物質場が形成する真空エネルギーがどのような大きさになるか、また仮定の与える影響などを考えた。

Einstein 重力による量子補正の議論では、 ϕ^6 , ϕ^8 といった繰り込みが不可能な Higgs 場の高次の項が重力による量子補正として生じるため、カットオフスケール Λ を繰り込み不可能な項に導入して解析を行った。^{*21} 解析結果を読み取ると、重力の量子補正の影響は $\mu \ll M_{\text{Pl}}$ 及び $\phi \ll M_{\text{Pl}}$ のスケールではほとんど影響を与えず低いスケールの議論では重力の量子補正の影響が十分に無視できることが確認できた。一方で $\mu \simeq M_{\text{Pl}}$ 及び $\phi \simeq M_{\text{Pl}}$ 近傍のスケールでは重力の量子補正の影響力は極めて強く現れていた。そのため M_{Pl} 近傍の議論を行う場合重力の影響を無視することはできないと考えられる。

ポテンシャルの解析結果を見ると $\phi \simeq M_{\text{Pl}}$ 近傍に極小値を持っていることが確認できた。しかしながら今回の議論では 1-loop の量子補正のみという限定的な解析を行っているため、2-loop 以上の量子補正がこの極小値に対してどのような効果を与えるかわからない。そのためこの極小値の存在に関してはより高次の量子補正を含んだ上での議論が必要と考えられる。

Einstein 重力が繰り込み不可能なことに起因するカットオフスケールへの依存度は、解析結果から重力の量子効果が支配的な Planck 質量近傍のスケールで非常に影響を与えるパラメータであることが確認できた。

そのため重力の量子効果を考えていく上でカットオフスケールの問題は重力の量子効果が効き始めるスケールですでに無視できない問題となっていると考えられる。

このカットオフスケールの問題を解決するために行った Higgs ポテンシャルに対しての R^2 重力の量子補正の議論では、繰り込み可能な ϕ^2 , ϕ^4 項に対しては対数発散が見られ

^{*21} この Einstein 重力の繰り込み不可能な量子補正へのアプローチはカットオフスケールの導入以外の方法でも議論が行われている。[20]

たが、その一方で Einstein 重力の量子補正で問題となっていた ϕ^6 , ϕ^8 といった繰り込み不可能な発散項に対してはカットオフスケールを相殺するような形になっており、有限な項として存在はするものの発散は現れなかった。そのため 1-loop レベルでは Higgs ポテンシャルに対する R^2 重力理論は繰り込みが可能と考えられる。

より厳密に R^2 重力理論が Higgs ポテンシャルに対して繰り込み可能であることを議論するためにはより高次の loop 補正などを考える必要があり、今後の課題となる。

最後に行った宇宙定数問題に対しての考察では、素粒子理論と重力子との関係性、また重力子の外線、内線での特性について大胆な仮定を置いた。この仮定により真空エネルギーの大部分を宇宙定数から切り離し、重力による量子補正が宇宙定数の大部分を占める状況を考えた。この状況で宇宙定数の理論と観測値との対応を考えていくと、テラスケールの真空エネルギーの存在が示された。

付録 A 計算過程

A.1 場の二次の計算

量子補正を計算する上で必要となる場の二次の項の導出を行う。

A.1.1 Minkowski 時空上での R^2 重力の揺らぎの場の二乗項

背景時空が Minkowski 時空であるとき各曲率テンソルの背景成分は $R_{abcd}^{(0)} = 0, R_{ab}^{(0)} = 0, R^{(0)} = 0$ となっていることを考えると作用中の重力場の揺らぎの 2 次の項 $S^{(2)} (S = S^{(0)} + \kappa S^{(1)} + \kappa^2 S^{(2)} + \dots)$ は

$$\begin{aligned} S^{(2)} = \int d^4x (\sqrt{-g})^{(0)} & \left[\frac{2}{\kappa^2} R^{(2)} + \alpha_1 (R^{(1)})^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 (\eta^{ac} \eta^{bd} + \eta^{ad} \eta^{bc}) R_{ab}^{(1)} R_{cd}^{(1)} + \mathcal{L}_{SM}^{(2)} \right] \\ & + (\sqrt{-g})^{(1)} \left[\frac{2}{\kappa^2} R^{(1)} + \mathcal{L}_{SM}^{(1)} \right] \\ & + (\sqrt{-g})^{(2)} \mathcal{L}_{SM}^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

となる。各曲率テンソルに対しての揺らぎの影響は

$$\begin{aligned} R_{ab}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\eta^{cd} \delta_a^e \delta_b^f + \eta^{ef} \delta_a^c \delta_b^d - \eta^{ce} \delta_a^d \delta_b^f - \eta^{ce} \delta_a^f \delta_b^d \right) h_{cd,ef}, \\ R^{(1)} &= \left(\eta^{ab} \eta^{cd} - \frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} - \frac{1}{2} \eta^{ad} \eta^{bc} \right) h_{ab,cd}, \\ R^{(2)} &= - \left(\eta^{cd} \eta^{ea} \eta^{fb} + \eta^{ef} \eta^{ca} \eta^{db} - \eta^{ce} \eta^{da} \eta^{fb} - \eta^{ce} \eta^{fa} \eta^{db} \right) h_{ab} h_{cd,ef} \\ &+ \frac{1}{4} \left[\eta^{ab} \eta^{cd} \eta^{ef} - 2 \eta^{ab} \eta^{cf} \eta^{de} - 2 \eta^{ae} \eta^{bf} \eta^{cd} + 4 \eta^{ac} \eta^{be} \eta^{df} \right. \\ &\quad \left. - 3 \eta^{ac} \eta^{bd} \eta^{ef} + \eta^{ac} \eta^{bf} \eta^{de} + \eta^{ad} \eta^{bf} \eta^{ce} \right] h_{ab,e} h_{cd,f}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

ちなみに de Donder ゲージを意識した表記法 $\bar{h}_{ab} := h_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} h$ (de Donder ゲージ: $0 = \partial_a \bar{h}_b^a$) で記述すると

$$\begin{aligned} R_{ab}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[\partial^2 \bar{h}_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^2 \bar{h} - \partial_a \partial_e \bar{h}_b^e - \partial_b \partial_e \bar{h}_a^e \right], \\ R^{(1)} &= -\partial_a \partial_b \bar{h}^{ab} - \frac{1}{2} \partial^2 \bar{h}, \\ R^{(2)} &= h^{ab} \left[\partial_a \partial_c \bar{h}_b^c + \partial_b \partial_c \bar{h}_a^c - \partial^2 \bar{h}_{ab} + \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^2 \bar{h} \right] \\ &\quad + \partial^e \bar{h}_e^a \cdot \partial^f \bar{h}_{af} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[-3 \partial^e h^{ab} \cdot \partial_e h_{ab} + \partial^e h^{ab} \cdot \partial_a h_{be} + \partial^e h^{ab} \cdot \partial_b h_{ae} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

$R^{(2)}$ に関しては二段落目の項を微分についての置換を意識すると

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} [\partial_e (-3h^{ab}\partial^e h_{ab} + h^{ab}\partial_a h_b^e + h^{ab}\partial_b h_a^e) - h^{ab} (-3\partial^2 h_{ab} + \partial_a \partial_e h_b^e + \partial_b \partial_e h_a^e)] \\
&= \frac{1}{4} \left[\partial_e (-3h^{ab}\partial^e h_{ab} + h^{ab}\partial_a h_b^e + h^{ab}\partial_b h_a^e) \right. \\
&\quad \left. - h^{ab} \left(-3\partial^2 \bar{h}_{ab} + \partial_a \partial_e \bar{h}_b^e + \partial_b \partial_e \bar{h}_a^e + \frac{3}{2}\eta_{ab}\partial^2 \bar{h} - \partial_a \partial_b \bar{h} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\partial_e (-3h^{ab}\partial^e h_{ab} + h^{ab}\partial_a h_b^e + h^{ab}\partial_b h_a^e + \bar{h}^{ea}\partial_a \bar{h} - \bar{h}\partial_a \bar{h}^{ae}) \right. \\
&\quad \left. - h^{ab} (-3\partial^2 \bar{h}_{ab} + \partial_a \partial_e \bar{h}_b^e + \partial_b \partial_e \bar{h}_a^e + \eta_{ab}\partial^2 \bar{h} + \eta_{ab}\partial_e \partial_f \bar{h}^{ef}) \right] \tag{A.1.4}
\end{aligned}$$

となる. このとき

$$\begin{aligned}
h^{ab}\partial_a \partial_b \bar{h} &= \bar{h}^{ab}\partial_a \partial_b \bar{h} + \frac{1}{2}h\partial^2 \bar{h} \\
&= \partial_a (\bar{h}^{ab}\partial_b \bar{h}) - \partial_a \bar{h}^{ab} \cdot \partial_b \bar{h} - h^{ab} \left(-\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^2 \bar{h} \right) \\
&= \partial_a (\bar{h}^{ab}\partial_b \bar{h}) - \partial_b (\partial_a \cdot \bar{h}^{ab}\bar{h}) + \partial_b \partial_a \bar{h}^{ab} \cdot \bar{h} - h^{ab} \left(-\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^2 \bar{h} \right) \tag{A.1.5} \\
&= \partial_e (\bar{h}^{ae}\partial_a \bar{h} - \bar{h}\partial_a \bar{h}^{ae}) + \bar{h}\partial_e \partial_f \bar{h}^{ef} - h^{ab} \left(-\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^2 \bar{h} \right) \\
&= \partial_e (\bar{h}^{ae}\partial_a \bar{h} - \bar{h}\partial_a \bar{h}^{ae}) - h^{ab} \left(\eta_{ab}\partial_e \partial_f \bar{h}^{ef} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^2 \bar{h} \right)
\end{aligned}$$

となることを用いている. (A.1.4) 式より

$$\begin{aligned}
R^{(2)} &= -\frac{1}{4}h^{ab} [\partial^2 \bar{h}_{ab} - \eta_{ab}\partial^2 \bar{h} - 3\partial_a \partial_c \bar{h}_b^c - 3\partial_b \partial_c \bar{h}_a^c + \eta_{ab}\partial_c \partial_d \bar{h}^{cd}] \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[\partial_e (-3h^{ab}\partial^e h_{ab} + h^{ab}\partial_a h_b^e + h^{ab}\partial_b h_a^e + \bar{h}^{ea}\partial_a \bar{h} - \bar{h}\partial_a \bar{h}^{ae}) \right] \tag{A.1.6} \\
&\quad + \partial_a \bar{h}_e^a \cdot \partial_b \bar{h}^{be}
\end{aligned}$$

de Donder ゲージ $0 = \partial_a \bar{h}_b^a$ を取ることを考えながら作用中の重力場の展開 ((A.1.1) 式) を考えると

$$\begin{aligned}
S^{(2)} &= \int d^4x \frac{2}{\kappa^2} \left[-\frac{1}{4} h^{ab} (\partial^2 \bar{h}_{ab}) \right] + \alpha_1 \left[-\frac{1}{2} \partial^2 \bar{h} \right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \alpha_2 (\eta^{ac} \eta^{bd} + \eta^{ad} \eta^{bc}) \left[\frac{1}{2} \partial^2 \left(\bar{h}_{ab} - \eta_{ab} \frac{1}{2} \bar{h} \right) \right] \left[\frac{1}{2} \partial^2 \left(\bar{h}_{cd} - \eta_{cd} \frac{1}{2} \bar{h} \right) \right] \\
&\quad + \mathcal{L}_{SM}^{(0)} \left[\frac{1}{4} h_{ab} P^{ab:cd} h_{cd} \right] + \partial \mathcal{O} \\
&= \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \frac{1}{2} h_{ab} \left[P^{ab:cd} \partial^2 \right] h_{cd} + \frac{\alpha_1 \kappa^2}{4} h_{ab} \left[\eta^{ab} \eta^{cd} \partial^4 \right] h_{cd} \\
&\quad + \frac{\alpha_2 \kappa^2}{8} h_{ab} \left[(\eta^{ac} \eta^{bd} + \eta^{ad} \eta^{bc}) \partial^4 \right] h_{cd} \\
&\quad - \frac{1}{2} h_{ab} \left[P^{ab:cd} \left(-\frac{\kappa^2}{2} \mathcal{L}_{SM} \right) \right] h_{cd} + \partial \mathcal{O}' \\
&= \int d^4x -\frac{1}{2} h_{ab} D^{ab:cd} h_{cd} + \partial \mathcal{O}'
\end{aligned} \tag{A.1.7}$$

このとき定義したもののとして $\partial \mathcal{O}$ は全微分項, $P^{ab:cd}$ 及び $D^{ab:cd}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
P^{ab:cd} &= \frac{1}{2} [\eta^{ab} \eta^{cd} - \eta^{ac} \eta^{bd} - \eta^{ad} \eta^{bc}], \\
D^{ab:cd} &= P^{ab:cd} (-\partial^2 + m_A^2) - \frac{\kappa^2}{4} [2\alpha_1 \eta^{ab} \eta^{cd} + \alpha_2 (\eta^{ac} \eta^{bd} + \eta^{ad} \eta^{bc})] \partial^4, \\
m_A^2 &= -\frac{\kappa^2}{2} \mathcal{L}_{SM}^{(0)},
\end{aligned} \tag{A.1.8}$$

と置いている. また注意点として (A.1.7) 式においては簡単のため $\mathcal{L}_{SM}^{(1)} \Rightarrow 0$ と置いている.

このとき伝搬関数 $D_{ab:cd}$ は

$$\tilde{D}^{ab:cd} D_{cd:ef} = \frac{1}{2} (\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b) \tag{A.1.9}$$

となっていると予想される. このとき $\tilde{D}^{ab:cd}$ は $D^{ab:cd}$ を座標表示から運動量表示に置き換えたもの. 式 (A.1.9) を解くと,

$$\begin{aligned}
D_{ab:cd} &= \frac{1}{k^2 + m_A^2 + \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} k^4} P_{ab:cd} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{k^2 + m_A^2 + \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} k^4} \left(1 - \frac{k^2 + m_A^2 - \kappa^2 \alpha_1 k^4}{k^2 + m_A^2 - \frac{\kappa^2}{2} (4\alpha_1 + \alpha_2) k^4} \right) \eta_{ab} \eta_{cd},
\end{aligned} \tag{A.1.10}$$

となる. このとき k^2 は重力子の運動量に対応している. 式 (A.1.10) の特徴として以下のことがある.

伝搬関数の性質

- $\alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_2$ となっているとき式 (A.1.10) で記述される二段落目の項が 0 となり非常に簡潔な伝搬関数になる.
- $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ で重力子の運動量が十分大きい時伝搬関数が運動量の 4 乗に逆比例するようになる.

$$D_{ab:cd} \approx \frac{1}{\kappa^2 \alpha_2} \frac{1}{k^4} \left[P_{ab:cd} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\alpha_1}{4\alpha_1 + \alpha_2} \right) \eta_{ab} \eta_{cd} \right] \quad (\text{A.1.11})$$

$$\left| m_A^2, \frac{2}{\kappa^2 \alpha_1}, \frac{2}{\kappa^2 \alpha_2} \right| \ll k^2$$

Higgs 場の揺らぎを含めた上での作用中の揺らぎの 2 次の項は

$$S^{\text{quad}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} h_{ab} D^{ab:cd} h_{cd} - h_{ab} [\eta^{ab} m_B^2] \sigma_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sigma_2 [\partial^2 + m_c^2] \sigma_2 - \sum \frac{1}{2} \Phi_I [\partial^2 + m_D^2] \Phi_I \right] \quad (\text{A.1.12})$$

このとき $\Phi_I = \sigma_1, \pi_1, \pi_2$, $m_B^2 = -\frac{\kappa}{2} \partial_{\sigma_2} \mathcal{L}_{SM}|_{\sigma_2=0}$, $m_C^2 = -\partial_{\sigma_2}^2 \mathcal{L}_{SM}|_{\sigma_2=0}$, $m_D^2 = -\partial_{\sigma_1}^2 \mathcal{L}_{SM}|_{\sigma_1=0}$ と定義している.

A.2 伝搬関数の導出

R^2 重力子の伝搬関数 $D_{ab:cd}$ は関係式

$$\tilde{D}^{ab:cd} D_{cd:ef} = \frac{1}{2} (\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b) \quad (\text{A.2.1})$$

を解くことで得ることができる.

(A.2.1) 式を計算すると,

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{D}^{ab:cd} D_{cd:ef} - \frac{1}{2} (\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b) \\
&= \left[P^{ab:cd} (k^2 + m_A^2) - \frac{\kappa^2}{4} [2\alpha_1 \eta^{ab} \eta^{cd} + \alpha_2 (\eta^{ac} \eta^{bd} + \eta^{ad} \eta^{bc})] k^4 \right] \\
&\quad \times \left\{ \tilde{a} \eta_{cd} \eta_{ef} + \tilde{b} \eta_{ce} \eta_{df} + \tilde{c} \eta_{cf} \eta_{de} \right\} - \frac{1}{2} (\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b) \\
&= \left[\left(\tilde{a} + \frac{\tilde{b}}{2} + \frac{\tilde{c}}{2} \right) \eta^{ab} \eta_{ef} - \frac{1}{2} (\tilde{b} + \tilde{c}) (\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b) \right] (k^2 + m_A^2) \\
&\quad - \frac{\kappa^2}{4} \left[2\alpha_1 (4\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c}) \eta^{ab} \eta_{ef} + \alpha_2 (2\tilde{a} \eta^{ab} \eta_{ef} + \{\tilde{b} + \tilde{c}\} \{\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b\}) \right] k^4 \\
&\quad - \frac{1}{2} (\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b) \\
&= \left[\left(\tilde{a} + \frac{\tilde{b}}{2} + \frac{\tilde{c}}{2} \right) (k^2 + m_A^2) - \frac{\kappa^2}{4} (2\alpha_1 \{4\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c}\} + 2\alpha_2 \tilde{a}) k^4 \right] (\eta^{ab} \eta_{ef}) \\
&\quad + \left[-\frac{1}{2} (\tilde{b} + \tilde{c}) (k^2 + m_A^2) - \frac{\kappa^2}{4} \alpha_2 (\tilde{b} + \tilde{c}) k^4 - \frac{1}{2} \right] (\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b)
\end{aligned} \tag{A.2.2}$$

と展開できる. このとき伝搬関数を $D_{ab:cd} = \tilde{a} \eta_{ab} \eta_{cd} + \tilde{b} \eta_{ac} \eta_{bd} + \tilde{c} \eta_{ad} \eta_{bc}$ と仮定しておいている. これにより

$$\begin{aligned}
(\tilde{b} + \tilde{c}) &= -\frac{1}{k^2 + m_A^2 + \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} k^4} \\
\tilde{a} &= \frac{1}{2} \frac{1}{k^2 + m_A^2 + \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} k^4} \frac{k^2 + m_A^2 - \kappa^2 \alpha_1 k^4}{k^2 + m_A^2 - \frac{\kappa^2}{2} (4\alpha_1 + \alpha_2) k^4}
\end{aligned} \tag{A.2.3}$$

となる. 一般化して $\tilde{b} = \tilde{c}$ と置くと

$$\begin{aligned}
D_{ab:cd} &= \frac{1}{k^2 + m_A^2 + \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} k^4} P_{ab:cd} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{k^2 + m_A^2 + \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} k^4} \left(1 - \frac{k^2 + m_A^2 - \kappa^2 \alpha_1 k^4}{k^2 + m_A^2 - \frac{\kappa^2}{2} (4\alpha_1 + \alpha_2) k^4} \right) \eta_{ab} \eta_{cd}, \tag{A.2.4} \\
P_{ab:cd} &= \frac{1}{2} [\eta_{ab} \eta_{cd} - \eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc}],
\end{aligned}$$

となる.

A.3 量子補正の計算

(3.2) 式で導出した作用中での揺らぎの 2 次を元に 1-loop の影響を考えていく．考えていく経路積分は

$$Z = \int \prod_i \mathcal{D}\Psi_i e^{i(S^{(0)} + S^{quad})}, \quad (\text{A.3.1})$$

となっている．ここで $\Psi_i = (h_{ab}, \sigma_2, \Psi_I)$ ととっている．このとき $S^{quad} = \int d^4x - \frac{1}{2} \Psi_i A_{ij} \Psi_j$ と記述する事ができる．このとき A_{ij} の固有値とその重複度は

$$\begin{array}{ll} C_+ & : 1 \\ C_- & : 1 \\ \left(\partial^2 - m_A^2 - \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} \partial^4 \right) & : 3 \\ 2 \left(\partial^2 - m_A^2 - \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} \partial^4 \right) & : 3 \\ -2 \left(\partial^2 - m_A^2 - \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} \partial^4 \right) & : 3 \\ \partial^2 + m_D^2 & : 3 \end{array} \quad (\text{A.3.2})$$

となる．このとき

$$\begin{aligned} C_{\pm} = & \frac{2m_C^2 + 2m_A^2 - \kappa^2 (\alpha_2 + 4\alpha_1) \partial^4}{4} \\ & \pm \sqrt{4m_B^4 + \left(\partial^2 + \frac{\kappa^2 (\alpha_2 + 4\alpha_1)}{4} \partial^4 + \frac{m_C^2 - m_A^2}{2} \right)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

と定義している．このことより (A.3.1) 式の Gauss 積分は

$$\begin{aligned} Z = & 64 (\det(C_-))^{-1/2} (\det(C_+))^{-1/2} \left(\det \left(-\partial^2 + m_A^2 + \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} \partial^4 \right) \right)^{-9/2} \\ & \times (\det(\partial^2 + m_D^2))^{-3/2} \times e^{iS^{(0)}} \\ = & e^{i(S^{(0)} + S^{(qc)})} \end{aligned} \quad (\text{A.3.4})$$

となる．

量子補正 $S^{(qc)}$ は

$$\begin{aligned} S^{(qc)} = & -i \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{2} \right) \left[\ln(-C_-(k)) + \ln(C_+(k)) \right. \\ & \left. + 9 \ln \left(-k^2 - m_A^2 - \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} k^4 \right) + 3 \ln(-k^2 + m_D^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

となる．

有効ポテンシャルの計算

effective potential の計算においての基本的な計算を以下に示す.

$$\begin{aligned} Z &= \det(A(x))^\delta e^{iS^{(0)}} \\ &= e^{i(S^{(0)} + S^{(qc)})} \end{aligned} \quad (\text{A.3.6})$$

$$\begin{aligned} iS^{(qc)} &= \delta \ln \det A(x) \\ &= \delta \text{Tr} \ln A(x) \\ &= \delta \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln A(k) \end{aligned} \quad (\text{A.3.7})$$

(A.3.5) 式の運動量に関する積分を行い, 整理をすると

$$S^{(qc)} = S_C^{(qc)} + S_A^{(qc)} + S_D^{(qc)} \quad (\text{A.3.8})$$

となる. $S_C^{(qc)}$, $S_A^{(qc)}$, $S_D^{(qc)}$ の定義についてはこれ以降の計算頁を参照.

A.3.1 量子補正の計算-準備

基本的な計算手法として $\mathcal{L}_m := \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(-k^2 + m^2)$ を計算していく

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &:= \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(-k^2 + m^2) \\ &= \frac{i}{2(2\pi)^4} \cdot i \int_0^{2\pi} d\theta_3 \int_0^\pi d\theta_2 \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\Lambda dk_E \\ &\quad \times k_E^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 \cdot \ln(k_E^2 + m^2) \\ &= -\frac{1}{2(2\pi)^4} \cdot 2\pi^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda^2} dk_E^2 k_E^2 \ln(k_E^2 + m^2) \\ &= -\frac{1}{32\pi^2} \int_{m^2}^{\Lambda^2 + m^2} dK (K - m^2) \ln(K) \end{aligned} \quad (\text{A.3.9})$$

ここで $x \ln x = \partial_x \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x \right) - \frac{1}{2} x$ および $\ln x = \partial_x (x \ln x) - 1$ であることを用いると,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &:= -\frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{1}{2} K^2 \ln K - \frac{1}{4} K^2 - m^2 (K \ln K - K) \right]_{m^2}^{\Lambda^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{64\pi^2} \left[\frac{1}{2} \Lambda^4 - \Lambda^4 \ln(\Lambda^2 + m^2) - m^2 \Lambda^2 \right. \\ &\quad \left. + m^4 \ln(\Lambda^2 + m^2) - m^4 \ln m^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3.10})$$

またここで $\Lambda \gg m^2$ の場合に関しては $\ln(\Lambda^2 + m^2) = \ln \Lambda^2 + \frac{m^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \frac{m^4}{\Lambda^4} + \dots$ と展開できることから

$$\mathcal{L}_m|_{\Lambda \gg m^2} := \frac{1}{64\pi^2} \left[\frac{1}{2} \Lambda^4 - \Lambda^4 \ln \Lambda^2 - 2m^2 \Lambda^2 - m^4 \left(\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{A.3.11})$$

となる.

A.3.2 量子補正の計算 1

(A.3.5) 式の積分の一部を計算していく.

$$\begin{aligned} \bullet C_+ \times C_- &= \frac{\kappa^2}{2} (\alpha_2 + 4\alpha_1) k^6 - \left(\frac{\kappa^2}{2} m_C^2 (\alpha_2 + 4\alpha_1) + 1 \right) k^4 + (m_C^2 - m_A^2) k^2 + m_C^2 m_A^2 - 4m_B^4 \\ &= \frac{-\kappa^2}{2} (\alpha_2 + 4\alpha_1) (-k^2 + m_1^2) (-k^2 + m_2^2) (-k^2 + m_3^2), \end{aligned}$$

ここで m_i^2 の定義は次頁の”量子補正の計算 1 補助”を参照. 上記の事柄と式 (A.3.10) の計算を用いて

$$\begin{aligned} S_C^{(qc)} &:= \int d^4x \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(C_+ \times C_-) \\ &= \int d^4x \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\ln \left(\frac{-\kappa^2 (\alpha_2 + 4\alpha_1)}{2} \right) + \ln(-k^2 + m_1^2) \right. \\ &\quad \left. + \ln(-k^2 + m_2^2) + \ln(-k^2 + m_3^2) \right] \\ &= \int d^4x \frac{1}{64\pi^2} \left[\frac{3}{2} \Lambda^4 - \Lambda^4 \ln(C_+ \times C_-) \right. \\ &\quad \left. + \left(m_C^2 + \frac{2}{\kappa^2 (\alpha_2 + 4\alpha_1)} \right) \Lambda^2 - m_1^4 \ln \left(\frac{m_1^2}{\Lambda^2 + m_1^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - m_2^4 \ln \left(\frac{m_2^2}{\Lambda^2 + m_2^2} \right) - m_3^4 \ln \left(\frac{m_3^2}{\Lambda^2 + m_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3.12})$$

となる. ここで m_i に関して展開してみると

$$\begin{aligned} S_C^{(qc)} &= \int d^4x \frac{1}{64\pi^2} \left[\frac{3}{2} \Lambda^4 - \Lambda^4 \ln(C_+ \times C_-) + \left(m_C^2 + \frac{2}{\kappa^2 (\alpha_2 + 4\alpha_1)} \right) \Lambda^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2 - b}{3} \ln \left(\frac{c}{\Lambda^6 + a\Lambda^4 + b\Lambda^2 + c} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{D_+}{2} \left[\ln \left(\frac{m_2^4}{m_1^2 m_3^2} \right) - \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_2^2}{\Lambda^2 + m_1^2} \right) - \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_2^2}{\Lambda^2 + m_3^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\sqrt{3}D_-}{2} \left[\ln \left(\frac{m_1^2}{m_3^2} \right) - \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_1^2}{\Lambda^2 + m_3^2} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3.13})$$

となる. このとき D_{\pm} の定義は次頁の”量子補正の計算 1 補助”を参照.

A.3.3 量子補正の計算 1 補助

三次方程式の解は

$$\begin{aligned}
 x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - m_1^2)(x - m_2^2)(x - m_3^2), \\
 m_i^2 &= e^{i\theta_i}(-u + v)^{1/3} + e^{-i\theta_i}(-u - v)^{1/3} - \frac{a}{3}, \\
 \theta_i &= \left(-\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{2}{3}\pi\right), \\
 u &= \frac{27c + 2a^3 - 9ab}{54}, \\
 v &= \left(u^2 + \left(\frac{3b - a^2}{9}\right)^3\right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{A.3.14}$$

となる. またこのとき

$$\begin{aligned}
 \sum_i m_i^4 \ln(B_i) &= \sum_i \left[e^{2\theta_i}(-u + v)^{2/3} + e^{-2\theta_i}(-u - v)^{2/3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a^2 - b}{3} - \frac{2}{3}ae^{\theta_i}(-u + v)^{1/3} - \frac{2}{3}ae^{-\theta_i}(-u - v)^{1/3} \right] \ln(B_i) \\
 &= \frac{a^2 - b}{3} \ln\left(\prod_i B_i\right) + \frac{D_+}{2} \ln\left(\frac{B_2^2}{B_1 B_3}\right) + \frac{i\sqrt{3}D_-}{2} \ln\left(\frac{B_1}{B_3}\right), \tag{A.3.15} \\
 D_+ &:= \left[(-u + v)^{2/3} + (-u - v)^{2/3} - \frac{2}{3}a(-u + v)^{1/3} - \frac{2}{3}a(-u - v)^{1/3} \right], \\
 D_- &:= \left[(-u + v)^{2/3} - (-u - v)^{2/3} + \frac{2}{3}a(-u + v)^{1/3} - \frac{2}{3}a(-u - v)^{1/3} \right].
 \end{aligned}$$

と展開することができる.

三次方程式

$$\begin{aligned}
 C_+ \times C_- &= \frac{\kappa^2}{2}(\alpha_2 + 4\alpha_1)k^6 - \left(\frac{\kappa^2}{2}m_C^2(\alpha_2 + 4\alpha_1) + 1\right)k^4 \\
 &\quad + (m_C^2 - m_A^2)k^2 + m_C^2 m_A^2 - 4m_B^4 \\
 &:= \frac{-\kappa^2}{2}(\alpha_2 + 4\alpha_1)(-k^2 + m_1^2)(-k^2 + m_2^2)(-k^2 + m_3^2)
 \end{aligned} \tag{A.3.16}$$

を考えると式 (A.3.14) に対し, $a = -m_C^2 - \frac{2}{\kappa^2(\alpha_2 + 4\alpha_1)}$,

$$b = \frac{2}{\kappa^2(\alpha_2 + 4\alpha_1)}(m_C^2 - m_A^2),$$

$$c = \frac{2}{\kappa^2(\alpha_2 + 4\alpha_1)}(m_C^2 m_A^2 - 4m_B^4) \text{ 上記のように代入すればよい.}$$

A.3.4 量子補正の計算 2

(A.3.5) 式の積分の一部を計算していく.

- $k^2 + m_A^2 + \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} k^4 = \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} (k^2 + m_{A+}^2) (k^2 + m_{A-}^2),$
- $m_{A+}^2 = \frac{1}{\kappa^2 \alpha_2} \left(1 + \sqrt{1 - 2\kappa^2 \alpha_2 m_A^2} \right) \simeq \frac{2}{\kappa^2 \alpha_2}$
- $m_{A-}^2 = \frac{1}{\kappa^2 \alpha_2} \left(1 - \sqrt{1 - 2\kappa^2 \alpha_2 m_A^2} \right) \simeq m_A^2$

上記の事柄と式 (A.3.10) の計算を用いて

$$\begin{aligned}
S_A^{(qc)} &:= \int d^4x \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 9 \ln \left(-k^2 - m_A^2 - \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} k^4 \right) \\
&= \int d^4x \frac{i9}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\ln(-k^2 - m_{A+}^2) \right. \\
&\quad \left. + \ln(-k^2 - m_{A-}^2) + \ln \left(-\frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} \right) \right] \\
&= \int d^4x \frac{9}{64\pi^3} \left[\Lambda^4 - \Lambda^4 \ln \left(\Lambda^2 - m_A^2 - \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} \Lambda^4 \right) + \frac{2}{\kappa^2 \alpha_2} \Lambda^2 \right. \\
&\quad \left. - m_{A+}^4 \ln \left(\frac{-m_{A+}^2}{\Lambda^2 - m_{A+}^2} \right) - m_{A-}^4 \ln \left(\frac{-m_{A-}^2}{\Lambda^2 - m_{A-}^2} \right) \right] \tag{A.3.17} \\
&= \int d^4x \frac{9}{64\pi^3} \left[\Lambda^4 - \Lambda^4 \ln \left(\Lambda^2 - m_A^2 - \frac{\kappa^2 \alpha_2}{2} \Lambda^4 \right) + \frac{2}{\kappa^2 \alpha_2} \Lambda^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2 - 2\kappa^2 \alpha_2 m_A^2}{\kappa^4 \alpha_2^2} \left[\ln \left(\frac{-m_{A+}^2}{\Lambda^2 - m_{A+}^2} \right) + \ln \left(\frac{-m_{A-}^2}{\Lambda^2 - m_{A-}^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\sqrt{1 - 2\kappa^2 \alpha_2 m_A^2}}{\kappa^4 \alpha_2^2} \left[\ln \left(\frac{-m_{A+}^2}{-m_{A-}^2} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2 - m_{A-}^2}{\Lambda^2 - m_{A+}^2} \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

となる. またここで $\Lambda^2 \gg m_{A+}^2, m_{A-}^2$ の場合に関して摂動展開してみると

$$\begin{aligned}
S_A^{(qc)}|_{\Lambda^2 \gg m_{A+}^2, m_{A-}^2} &= \int d^4x \frac{9}{64\pi^3} \left[\Lambda^4 - 2\Lambda^4 \ln(\Lambda^2) + \frac{4}{\kappa^2 \alpha_2} \Lambda^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2 - 2\kappa^2 \alpha_2 m_A^2}{\kappa^4 \alpha_2^2} \left[\ln \left(\frac{-m_{A+}^2}{\Lambda^2 - m_{A+}^2} \right) + \ln \left(\frac{-m_{A-}^2}{\Lambda^2 - m_{A-}^2} \right) - 1 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\sqrt{1 - 2\kappa^2 \alpha_2 m_A^2}}{\kappa^4 \alpha_2^2} \left[\ln \left(\frac{-m_{A+}^2}{-m_{A-}^2} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda^2 - m_{A-}^2}{\Lambda^2 - m_{A+}^2} \right) \right] \right] \tag{A.3.18}
\end{aligned}$$

となる. このとき第5項目 (最後の項) のみが $1 \gg 2\kappa^2 \alpha_2 m_A^2$ の状況下で $\phi^n | n > 4$ の項を有する可能性を残しているがカットオフの依存性は非常に小さい式構造をしている.

A.3.5 量子補正の計算 2

(A.3.5) 式の積分の一部を計算していく．計算過程に関しては式 (A.3.10) を参照

$$\begin{aligned}
 S_D^{(qc)} &:= \int d^4x \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 3 \ln(-k^2 + m_D^2) \\
 &= \int d^4x \frac{3}{64\pi^2} \left[\frac{1}{2} \Lambda^4 - \Lambda^4 \ln(\Lambda^2 + m_D^2) - m_D^2 \Lambda^2 \right. \\
 &\quad \left. + m_D^4 \ln(\Lambda^2 + m_D^2) - m_D^4 \ln m_D^2 \right]
 \end{aligned} \tag{A.3.19}$$

ここで $\ln(\Lambda^2 + m_D^2) = \ln \Lambda^2 + \frac{m_D^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \frac{m_D^4}{\Lambda^4} + \dots$ と展開できることから

$$S_D^{(qc)} \simeq \int d^4x \frac{3}{64\pi^2} \left[\frac{1}{2} \Lambda^4 - \Lambda^4 \ln \Lambda^2 - m_D^4 \left(\ln \frac{m_D^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \right] \tag{A.3.20}$$

となる．

A.4 ダイアグラム計算

A.4.1 1-loop の効果 (ϕ への補正)

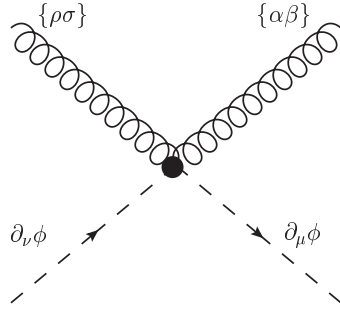
運動項に対しての 1-loop の効果を見ることによって higgs 場そのものに対しての量子補正 δZ を見ていく．

このときスカラー場の座標勾配 $\partial_\mu \phi$ を仮の粒子場のようにしてダイアグラムを記述する．

考えるべき作用は重力の揺らぎの二次に注目して

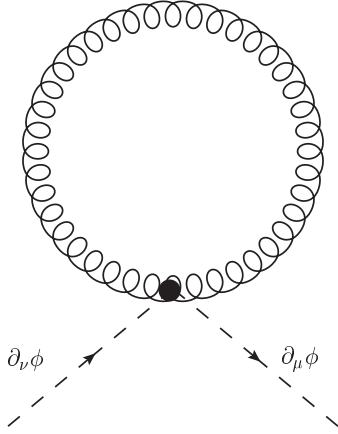
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\phi &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi (\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 g^{\alpha\beta} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu) \left(1 + \frac{\kappa}{2} h_\rho^\rho - \frac{\kappa^2}{4} h_\sigma^\rho h_\rho^\sigma + \frac{\kappa^2}{8} h_\rho^\rho h_\sigma^\sigma \right) \sqrt{-g} \\
 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \left[\kappa^2 \left(-\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} h_\sigma^\rho h_\rho^\sigma + \frac{1}{8} \eta^{\mu\nu} h_\rho^\rho h_\sigma^\sigma - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} h_\rho^\rho + h^{\mu\rho} h_\rho^\nu \right) \right] + \dots \\
 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi h_{\rho\sigma} h_{\alpha\beta} \cdot \frac{\kappa^2}{8} \left[\begin{aligned}
 &- \eta^{\mu\nu} (\eta^{\rho\alpha} \eta^{\sigma\beta} + \eta^{\rho\beta} \eta^{\sigma\alpha} - \eta^{\rho\sigma} \eta^{\alpha\beta}) \\
 &+ \eta^{\mu\rho} (\eta^{\nu\alpha} \eta^{\sigma\beta} + \eta^{\nu\beta} \eta^{\sigma\alpha} - \eta^{\nu\sigma} \eta^{\alpha\beta}) \\
 &+ \eta^{\mu\sigma} (\eta^{\nu\alpha} \eta^{\rho\beta} + \eta^{\nu\beta} \eta^{\rho\alpha} - \eta^{\nu\rho} \eta^{\alpha\beta}) \\
 &+ \eta^{\mu\alpha} (\eta^{\nu\rho} \eta^{\sigma\beta} + \eta^{\nu\sigma} \eta^{\rho\beta} - \eta^{\nu\beta} \eta^{\rho\sigma}) \\
 &+ \eta^{\mu\beta} (\eta^{\nu\rho} \eta^{\sigma\alpha} + \eta^{\nu\sigma} \eta^{\rho\alpha} - \eta^{\nu\alpha} \eta^{\rho\sigma})
 \end{aligned} \right] \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

となっていることを考えると, バートックスは



$$\frac{i\kappa^2}{4} \left[\begin{aligned} & -\eta^{\mu\nu} (\eta^{\rho\alpha}\eta^{\sigma\beta} + \eta^{\rho\beta}\eta^{\sigma\alpha} - \eta^{\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta}) \\ & + \eta^{\mu\rho} (\eta^{\nu\alpha}\eta^{\sigma\beta} + \eta^{\nu\beta}\eta^{\sigma\alpha} - \eta^{\nu\sigma}\eta^{\alpha\beta}) \\ & + \eta^{\mu\sigma} (\eta^{\nu\alpha}\eta^{\rho\beta} + \eta^{\nu\beta}\eta^{\rho\alpha} - \eta^{\nu\rho}\eta^{\alpha\beta}) \\ & + \eta^{\mu\alpha} (\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\beta} + \eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\beta} - \eta^{\nu\beta}\eta^{\rho\sigma}) \\ & + \eta^{\mu\beta} (\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\alpha} + \eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\alpha} - \eta^{\nu\alpha}\eta^{\rho\sigma}) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.4.2})$$

左記のようなダイアグラムを考えると



$$\begin{aligned} & = \frac{i\kappa^2}{4} \left[\begin{aligned} & -\eta^{\mu\nu} (\eta^{\rho\alpha}\eta^{\sigma\beta} + \eta^{\rho\beta}\eta^{\sigma\alpha} - \eta^{\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta}) \\ & + \eta^{\mu\rho} (\eta^{\nu\alpha}\eta^{\sigma\beta} + \eta^{\nu\beta}\eta^{\sigma\alpha} - \eta^{\nu\sigma}\eta^{\alpha\beta}) \\ & + \eta^{\mu\sigma} (\eta^{\nu\alpha}\eta^{\rho\beta} + \eta^{\nu\beta}\eta^{\rho\alpha} - \eta^{\nu\rho}\eta^{\alpha\beta}) \\ & + \eta^{\mu\alpha} (\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\beta} + \eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\beta} - \eta^{\nu\beta}\eta^{\rho\sigma}) \\ & + \eta^{\mu\beta} (\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\alpha} + \eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\alpha} - \eta^{\nu\alpha}\eta^{\rho\sigma}) \end{aligned} \right] \\ & \times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{2p^2} (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) \\ & \times \frac{1}{2} \quad (\text{A.4.3}) \end{aligned}$$

ここで計量に関して計算してみると

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & -\eta^{\mu\nu} (\eta^{\rho\alpha}\eta^{\sigma\beta} + \eta^{\rho\beta}\eta^{\sigma\alpha} - \eta^{\rho\sigma}\eta^{\alpha\beta}) \\ & + \eta^{\mu\rho} (\eta^{\nu\alpha}\eta^{\sigma\beta} + \eta^{\nu\beta}\eta^{\sigma\alpha} - \eta^{\nu\sigma}\eta^{\alpha\beta}) \\ & + \eta^{\mu\sigma} (\eta^{\nu\alpha}\eta^{\rho\beta} + \eta^{\nu\beta}\eta^{\rho\alpha} - \eta^{\nu\rho}\eta^{\alpha\beta}) \\ & + \eta^{\mu\alpha} (\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\beta} + \eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\beta} - \eta^{\nu\beta}\eta^{\rho\sigma}) \\ & + \eta^{\mu\beta} (\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\alpha} + \eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\alpha} - \eta^{\nu\alpha}\eta^{\rho\sigma}) \end{aligned} \right] \\ & \times (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) \\ & = \eta^{\mu\nu} [-40 + 10 + 10 + 10 + 10] \\ & = 0 \quad (\text{A.4.4}) \end{aligned}$$

となる．そのためこのダイアグラムに関する計算は

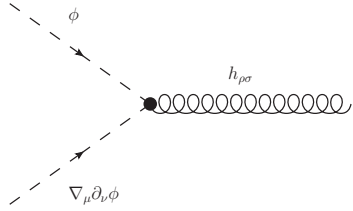
$$= 0 \quad (\text{A.4.5})$$

となる．

また運動項に対し置換 ($\partial\phi\partial\phi\sqrt{-g} \rightarrow \nabla^2\phi \cdot \phi\sqrt{-g}$) を施した上で注目すると,

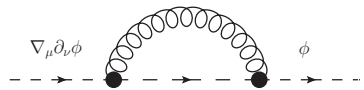
$$S_{kinematic} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \phi (\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \dots) \cdot \phi \left[1 + \frac{\kappa}{2} h^\rho_\rho + \dots \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \dots) \Gamma^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho \phi \cdot \phi \left[1 + \frac{\kappa}{2} h^\rho_\rho + \dots \right] \right] \quad (\text{A.4.6})$$

となり, $-\frac{\kappa}{4} \nabla_\mu \partial_\nu \phi \cdot \phi h_{\rho\sigma} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma})$ という $\partial^2\phi$, ϕ そして h をそれぞれひとつずつ保有する項を見ることが出来る．この項に注目してみると



$$i \frac{\kappa}{4} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}) \quad (\text{A.4.7})$$

左記のような 1-loop を考えると



$$= \frac{i\kappa}{4} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}) \\ \times \left(-\frac{i}{2} \kappa m^2 \eta^{\alpha\beta} \right) \\ \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\eta_{\rho\alpha} \eta_{\sigma\beta} + \eta_{\rho\beta} \eta_{\sigma\alpha} - \eta_{\rho\sigma} \eta_{\alpha\beta}) \\ \times \frac{i}{2(p+k)^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \quad (\text{A.4.8})$$

Feynman パラメータ, Euclid 化, 極座標系の適用 ($k_E + xp_E$ に対し, 半径 $\Lambda \sim \mu$ で

積分, Λ : カットオフスケール, μ : エネルギースケール) を行い

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\kappa^2 m^2}{16(2\pi)^4} \cdot (4\eta^{\mu\nu}) \int dx dy \delta(x+y-1) \int d^4 k \frac{1}{[x(p+k)^2 + y(k^2 - m^2)]^2} \\
&= -\frac{\kappa^2 m^2}{4(2\pi)^4} \eta^{\mu\nu} \int dx dy \delta(x+y-1) \int d^4 k \frac{1}{[(k+xp)^2 + xyp^2 - ym^2]^2} \\
&= -\frac{\kappa^2 m^2}{4(2\pi)^4} \eta^{\mu\nu} \int dx dy \delta(x+y-1) \\
&\quad \times 2\pi^2 \int_\mu^\Lambda d(k_E + x p_E) \frac{i(k_E + x p_E)^3}{[(k_E + x p_E)^2 + xyp_E^2 + ym^2]} \\
&= -\frac{\kappa^2 m^2}{4(2\pi)^4} \eta^{\mu\nu} \int dx dy \delta(x+y-1) \\
&\quad \times i\pi^2 \left(\ln \left(\frac{\Lambda^2 + ym^2 - xyp^2}{\mu^2 + ym^2 - xyp^2} \right) + \frac{ym^2 - xyp^2}{\Lambda^2 - xyp^2 + ym^2} - \frac{ym^2 - xyp^2}{\mu^2 - xyp^2 + ym^2} \right) \\
&= \left(-\frac{i}{2} \eta^{\mu\nu} \right) \frac{\kappa^2 m^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\ln \left(\frac{\Lambda^2 + (1-x)(m^2 - xp^2)}{\mu^2 + (1-x)(m^2 - xp^2)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-x)(m^2 - xp^2)}{\Lambda^2 + (1-x)(m^2 - xp^2)} - \frac{(1-x)(m^2 - xp^2)}{\mu^2 + (1-x)(m^2 - xp^2)} \right) \\
&= \left(-\frac{i}{2} \eta^{\mu\nu} \right) \frac{\kappa^2 m^2}{32\pi^2} \\
&\quad \times \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) + \int_0^1 dx \left(\frac{m^2 - x^2 p^2}{\Lambda^2 + (1-x)(m^2 - xp^2)} - \frac{m^2 - x^2 p^2}{\mu^2 + (1-x)(m^2 - xp^2)} \right) \right] \tag{A.4.9}
\end{aligned}$$

末尾の二項は発散しないので無視することが出来る。

このことより Higgs 場そのものに対しての重力の 1-loop レベルでの量子補正 $\delta Z_\phi^{(g)}$ *22 と異常次元 $\gamma_\phi^{(g)}$ は

$$\delta Z_\phi^{(g)} = \frac{\kappa^2 m^2}{16\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right), \tag{A.4.10}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_\phi^{(g)} &= -\frac{1}{2} \mu \frac{\partial \delta Z_\phi^{(g)}}{\partial \mu} \\
&= -\frac{\kappa^2 m^2}{32\pi^2}, \tag{A.4.11}
\end{aligned}$$

となることがわかる。このとき運動項は 1-loop による量子効果を踏まえた上で

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{kinematic}} &= \frac{1}{2} \left(1 + \delta Z_\phi^{(g)} + \dots \right) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \\
&= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_r \partial^\mu \phi_r, \tag{A.4.12}
\end{aligned}$$

*22 $\phi_r = \sqrt{1 + \delta Z_\phi^{(g)}} \phi$ と定義, ϕ_r : 繰り込まれた Higgs 場, \dots は重力の 1-loop 以外の量子補正

となる用にとっている.

A.4.2 1-loop の効果 (トップクォークへの補正)

トップクォークの運動項に対しての 1-loop の効果を見ることによってトップクォーク場そのものに対しての量子補正 δZ を見ていく.

曲がった空間でのフェルミオンの運動項は四脚場 e_a^μ スピン接続 w_μ^{ab} を用いた上で

$$\bar{\psi} (i\gamma^a e_a^\mu D_\mu - m) \psi \quad (\text{A.4.13})$$

と記述できる (微小ローレンツ変換と伝搬関数から導出できる.)

このとき共変微分 D_μ は

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - \frac{i}{4} w_\mu^{ab} \sigma_{ab} \\ \sigma_{ab} &:= \frac{i}{2} [\gamma_a, \gamma_b] \end{aligned} \quad (\text{A.4.14})$$

と定義している.

なおスピン接続は射影空間に対しての接続として

$$0 = \nabla_\mu e_\nu^b = \partial_\mu e_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^b + \omega_{\mu b}^a e_\nu^a \quad . \quad (\text{A.4.15})$$

を満たす.

このことからスピン接続 w_μ^{ab} は

$$\begin{aligned} w_\mu^{ab} &= -e^{\nu b} \partial_\mu e_\nu^a + e^{\nu b} \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^a \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [e^{\nu a} \partial_\mu e_\nu^b - e^{\nu b} \partial_\mu e_\nu^a] + e_{\mu c} [e^{\nu b} e^{\rho a} - e^{\nu a} e^{\rho b}] \partial_\nu e_\rho^c + [e^{\nu b} \partial_\nu e_\mu^a - e^{\nu a} \partial_\nu e_\mu^b] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.4.16})$$

となることがわかる. また展開した数式から $w_\mu^{ab} = -w_\mu^{ba}$ というスピン接続の反対称性が確認できる.

四脚場に対しての揺らぎは $\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$ という関係を元に揺らぎ $h_{\mu\nu}$ の乗数ごとに展開して

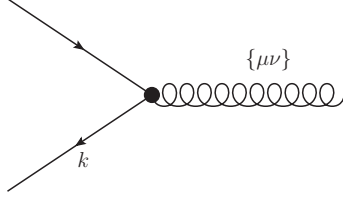
$$\begin{aligned} e_\mu^a &= \delta_\mu^a + \frac{\kappa}{2} h_\mu^\nu \delta_\nu^a + \frac{\kappa^2}{8} h_\mu^\rho h_\rho^\nu \delta_\nu^a + \cdots \\ e_a^\mu &= \delta_a^\mu - \frac{\kappa}{2} h_\nu^\mu \delta_a^\nu + \frac{\kappa^2}{8} h_\rho^\mu h_\nu^\rho \delta_a^\nu + \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.4.17})$$

運動項 $\mathcal{L}_{tk} := \bar{\psi} \gamma^a e_a^\mu \partial_\mu \psi \sqrt{-g}$ に対しての重力場の 1 次, 2 次の影響は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{tk}^{(1)} &= \bar{\psi} i \gamma^a \partial_\rho \psi \cdot h_{\mu\nu} \cdot \frac{\kappa}{2} [\delta_a^\rho \eta^{\mu\nu} - \delta_a^\nu \eta^{\mu\rho}] \\ \mathcal{L}_{tk}^{(2)} &= \bar{\psi} i \gamma^a \partial_\eta \psi \cdot h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} \cdot \frac{\kappa^2}{8} [\delta_a^\sigma \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\eta} - \delta_a^\eta (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma})] \end{aligned} \quad (\text{A.4.18})$$

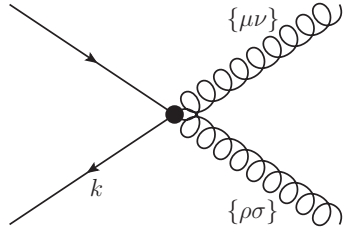
と展開できる.

重力場が1次で結合したラグランジアンから考えられるバーテックスは, Minkowski 背景時空上のガンマ行列 $\gamma^\mu := \gamma^a \delta_a^\mu$ を用いた上で,



$$-\frac{i\kappa}{2} [\gamma^\rho k_\rho \eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu k_\rho \eta^{\mu\rho}] \quad (\text{A.4.19})$$

同様にして, 重力場が2次で結合したラグランジアンから考えられるバーテックスは

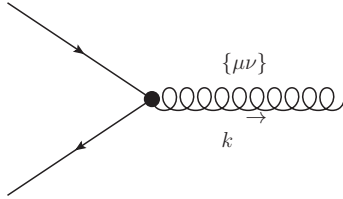


$$\frac{i\kappa^2}{8} [\gamma^\eta k_\eta (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}) - \gamma^\sigma k_\eta \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\eta}] \quad (\text{A.4.20})$$

スピン接続による影響のある項 $\mathcal{L}_{tw} := -\frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma^c e_c^\mu \sigma_{ab} w_\mu^{ab} \psi \sqrt{-g}$ の重力場の1次の影響は,

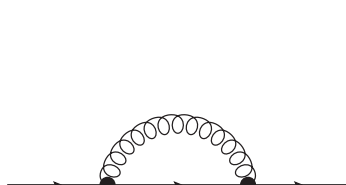
$$\mathcal{L}_{tw}^{(1)} = \frac{i\kappa}{8} \gamma^\mu (\gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\nu) \bar{\psi} \psi \partial_\rho h_{\mu\nu} \quad (\text{A.4.21})$$

となる. このラグランジアン $\mathcal{L}_{tw}^{(1)}$ から考えられるバーテックスは



$$-\frac{i\kappa}{8} \gamma^\mu (\gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\nu) k_\rho \quad (\text{A.4.22})$$

(A.4.22), (A.4.19) 式のバーテックスの式を用いると以下のような 1-loop を求めることが出来る.



$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{i\kappa}{8} \right) \gamma^\mu (\gamma^\nu \gamma^\eta - \gamma^\eta \gamma^\nu) (-k_\eta) \\ &\quad \times \frac{i(\not{k} + \not{p} + m)}{(k+p)^2 - m^2} \\ &\quad \times \frac{i}{2k^2} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) \\ &\quad \times \left(-\frac{i\kappa}{2} \right) (\not{p} \eta^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma p^\rho) \end{aligned} \quad (\text{A.4.23})$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\kappa^2}{32} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2[(k+p)^2 - m^2]} \\
&\quad \times (-2)(k_\rho \gamma_\sigma + k_\sigma \gamma_\rho + \not{k} \eta_{\rho\sigma}) (\not{k} + \not{p} + m) (\not{p} \eta^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma p^\rho) \\
&= \frac{\kappa^2}{16} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2[(k+p)^2 - m^2]} \\
&\quad \times [4k^2 \not{p} + 2k^\mu p_\mu \not{k} + 4p^2 \not{k} + 2k^\mu p_\mu \not{p} + 6m(\not{k} \not{p} - k^\mu p_\mu)]
\end{aligned} \tag{A.4.24}$$

Feynman パラメータ, Euclid 化, 極座標系の適用を順次行い

$$\begin{aligned}
&= \frac{\kappa^2}{16} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \int dx \int dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xk^2 + y\{(k+p)^2 - m^2\}]^2} \\
&\quad \times [4k^2 \not{p} + 2k^\mu p_\mu \not{k} + 4p^2 \not{k} + 2k^\mu p_\mu \not{p} + 6m(\not{k} \not{p} - k^\mu p_\mu)] \\
&= \frac{\kappa^2}{16} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \int_0^1 dy \frac{1}{[(k+yp)^2 - y(y-1)p^2 - ym^2]^2} \\
&\quad \times \left[4(k+yp)^2 \not{p} + 2(k^\mu + yp^\mu) p_\mu (\not{k} + y\not{p}) + 2(2-y)p^2 (\not{k} + y\not{p}) \right. \\
&\quad \left. + 2(1-5y)(k^\mu + yp^\mu) p_\mu \not{p} + 6y(y-1)p^2 \not{p} + 6m(\not{k} \not{p} - k^\mu p_\mu) \right] \\
&= -\frac{i\kappa^2}{16(2\pi)^4} \int d^4 k'_E \int_0^1 dy \frac{1}{[k'^2_E - y(y-1)p^2 - ym^2]^2} \\
&\quad \times \left[4k'^2_E \not{p} + 2k'^\mu_E p_\mu \not{k}'_E - 6y(y-1)p^2 \not{p} \right]
\end{aligned} \tag{A.4.25}$$

このとき $k'_\mu := k_\mu + yp_\mu$ と定義している. 2 から 3 段落目の変換では, k'_E に関しての積分領域が球形になっている ($\int d^4 k_E k_E^\mu q_\mu = 0, |A_\mu := \text{const}$) ことから k_E に関して奇数乗の項が 0 となることを利用している.

また $\int d\Omega_k^3 \not{k} \not{p} \not{k} = \frac{\pi^2}{2} k^2 \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = -\pi^2 k^2 \not{p}$ となっていることを用いると

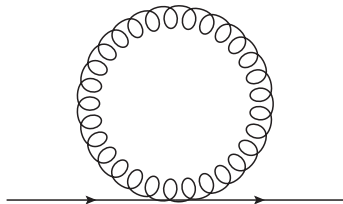
$\int d\Omega_k^3 k \cdot p \not{k} = \frac{1}{2} \int d\Omega_k^3 \not{k} \not{p} \not{k} + k^2 \not{p} = \frac{1}{2} (-\pi^2 + 2\pi^2) k^2 \not{p} = \frac{\pi^2}{2} k^2 \not{p}$ となる事がわかり極

座標系を適用して

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i\kappa^2}{16(2\pi)^4} \cdot 2\pi^2 \int dk'_E \int_0^1 dy \frac{k_E'^3}{[k_E'^2 - y(y-1)p^2 - ym^2]^2} \\
&\quad \times \left[4k_E'^2 \not{p} + \frac{1}{2} k_E'^2 \not{p} - 6y(y-1)p^2 \not{p} \right] \\
&= -\frac{i\kappa^2}{16(2\pi)^2} \pi^2 \int_0^1 dy \int_{\mu^2}^{\Lambda^2} dk_E'^2 \frac{k_E'^2}{[k_E'^2 - \Delta]^2} \\
&\quad \times \left[\frac{9}{2} k_E'^2 - 6y(y-1)p^2 \right] \not{p} \\
&= -\frac{i\kappa^2}{16(2\pi)^2} \pi^2 \int_0^1 dy \int_{\mu^2-\Delta}^{\Lambda^2-\Delta} dl \frac{(l+\Delta)}{l^2} \\
&\quad \times \left[\frac{9}{2} (l+\Delta) - 6y(y-1)p^2 \right] \not{p} \\
&= -\frac{i\kappa^2}{512\pi^2} \not{p} \int_0^1 dy \int_{\mu^2-\Delta}^{\Lambda^2-\Delta} dl \left[9 + 18\frac{\Delta}{l} + 9\frac{\Delta^2}{l^2} - \left(6y(y-1)p^2 \right) \left(\frac{1}{l} + \frac{\Delta}{l^2} \right) \right] \\
&= -\frac{i\kappa^2}{512\pi^2} \not{p} \int_0^1 dy \left[9(\Lambda^2 - \mu^2) + (18\Delta - 6y(y-1)p^2) \ln \left(\frac{\Lambda^2 - \Delta}{\mu^2 - \Delta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(-9\Delta^2 + 6y(y-1)p^2 \Delta \right) \left(\frac{1}{\Lambda^2 - \Delta} - \frac{1}{\mu^2 - \Delta} \right) \right] \\
&= -\frac{i\kappa^2}{512\pi^2} \not{p} \left[9(\Lambda^2 - \mu^2) + (-2p^2 + 9m^2) \ln \left(\frac{\Lambda^2 - m^2}{\mu^2 - m^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 dy (9\Delta - (5y^2 - 3y)p^2) (\Delta + y^2 p^2) \left(\frac{1}{\Lambda^2 - \Delta} - \frac{1}{\mu^2 - \Delta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(-9\Delta^2 + 6y(y-1)p^2 \Delta \right) \left(\frac{1}{\Lambda^2 - \Delta} - \frac{1}{\mu^2 - \Delta} \right) \right] \\
&= -\frac{i\kappa^2}{512\pi^2} \not{p} \left[9(\Lambda^2 - \mu^2) + (-2p^2 + 9m^2) \ln \left(\frac{\Lambda^2 - m^2}{\mu^2 - m^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 dy \left\{ (5y^4 + 10y^3 + 3y^2) p^4 + (10y^3 - 3y^2) p^2 m^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{1}{\Lambda^2 - \Delta} - \frac{1}{\mu^2 - \Delta} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.4.26}$$

と算出できる. このとき $\Delta := y(y-1)p^2 + ym^2$, $l := k_E'^2 - \Delta$ と定義している. 最終的に Feynman パラメータ y に対しての積分が残っている項が存在するが, この項は非発散項となっている.

(A.4.20) 式のバーテックスの式を用いると以下のような 1-loop を求めることが出来る.



$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\
&\quad \times \frac{i\kappa}{8} \{ \not{p} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}) - \gamma^\sigma p^\nu \eta^{\mu\rho} \} \\
&\quad \times \frac{i}{2k^2} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) \\
&\quad \times \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{A.4.27}$$

Euclid 化し

$$= \frac{i\kappa^2}{32} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \{ \not{p} \cdot 40 - 4\not{p} \} \frac{1}{k_E^2} \tag{A.4.28}$$

4次元極座標系に変換して

$$\begin{aligned}
&= \frac{i9\kappa^2}{8(2\pi)^4} \not{p} \cdot 2\pi^2 \int_\mu^\Lambda dk_E k_E \\
&= \frac{i9\kappa^2}{128\pi^2} \not{p} x (\Lambda^2 - \mu^2)
\end{aligned} \tag{A.4.29}$$

上記重力の 1-loop によるトップクォークへの量子補正 $\delta Z_t^{(g)}$ ^{*23} と異常次元 $\gamma_t^{(g)}$ は

$$\begin{aligned}
\delta Z^{(g)} &= -\frac{9\kappa^2}{512\pi^2} (\Lambda^2 - \mu^2) + \frac{9\kappa^2}{128\pi^2} (\Lambda^2 - \mu^2) \\
&= \frac{27\kappa^2}{512\pi^2} (\Lambda^2 - \mu^2)
\end{aligned} \tag{A.4.30}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_t^{(g)} &= -\frac{1}{2} \mu \frac{\partial \delta Z_t^{(g)}}{\partial \mu} \\
&= \frac{27\kappa^2}{512\pi^2} \mu^2
\end{aligned} \tag{A.4.31}$$

となる事がわかる. このとき運動項は量子効果 $\delta Z_t^{(g)}$ を踏まえて

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{kinematic}} &= \left(1 + \delta Z_t^{(g)} + \dots \right) \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\
&= \bar{\psi}_r i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_r
\end{aligned} \tag{A.4.32}$$

となるようにとっている.

^{*23} $t_r = \sqrt{1 + \delta Z + \dots} t$: t_r は繰り込まれた場, \dots は重力の 1-loop 以外の量子補正

A.4.3 1-loop の効果 (湯川結合への補正)

湯川結合に対しての 1-loop の効果を見ていく.

湯川相互作用 (top) と重力場の結合は

$$\mathcal{L}_{yukawa} = -y_t \bar{t} t \phi \left(1 + \frac{\kappa}{2} h_\mu^\mu - \frac{\kappa^2}{4} h_\nu^\mu h_\mu^\nu + \frac{\kappa^2}{8} h_\mu^\mu h_\nu^\nu \right) \quad (\text{A.4.33})$$

となっている. 重力場の 1 次, 2 次の結合した部分を見ると

$$\mathcal{L}_{yukawa}^{(1)} = -\frac{\kappa}{2} \eta^{\mu\nu} y_t \cdot \bar{t} t \phi h_{\mu\nu} \quad (\text{A.4.34})$$

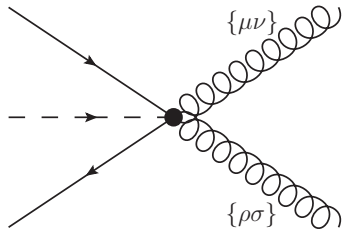
$$\mathcal{L}_{yukawa}^{(2)} = \frac{\kappa^2}{8} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}) y_t \cdot \bar{t} t \phi h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} \quad (\text{A.4.35})$$

重力場が 1 次で結合したラグランジアンから考えられるバーテックスは,



$$-\frac{i\kappa}{2} \eta^{\mu\nu} y_t \quad (\text{A.4.36})$$

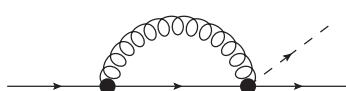
重力場が 2 次で結合したラグランジアンから考えられるバーテックスは,



$$\frac{i\kappa^2}{8} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}) y_t \times 2 \quad (\text{A.4.37})$$

これらバーテックスを用いた 1-loop として以下のようなものが考えられる.

(A.4.19), (A.4.36) 式のバーテックスを基に考えられる 1-loop として



$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k \left(-\frac{i\kappa}{2} \right) [(k + p) \eta^{\mu\nu} - (k^\mu + p^\mu) \gamma^\nu] \\ &\quad \times \frac{i(k + p + m)}{(k + p)^2 - m^2} \frac{i}{2k^2} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) \\ &\quad \times \left(-\frac{i\kappa}{2} \right) \eta^{\rho\sigma} y_t \end{aligned} \quad (\text{A.4.38})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\kappa^2}{8(2\pi)^4} \int d^4k [(k + p)\eta^{\mu\nu} - (k^\mu + p^\mu)\gamma^\nu] \\
&\quad \frac{1}{k^2[(k+p)^2 - m^2]} (k + p + m) (-2\eta_{\mu\nu}) y_t \\
&= -\frac{\kappa^2 y_t}{4(2\pi)^4} \int d^4k \frac{3[(k+p)^2 + m(k+p)]}{k^2[(k+p)^2 - m^2]} \quad (\text{A.4.39}) \\
&= -\frac{3\kappa^2 y_t}{4(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2} (1 + m\{k + p + m\}) \\
&= \frac{i3\kappa^2 y_t}{64\pi^2} (\Lambda^2 - \mu^2) (1 + mp + m^2)
\end{aligned}$$

が考えられる．このとき $\bar{t} \leftrightarrow t$ で入れ替えた 1-loop に関しても同様の結果を得られることに注意．

上記の 1-loop に似たものとして (A.4.22), (A.4.36) 式のバーテックスを基に考えられる以下の 2 種類のような 1-loop が考えられるが，それらは互いに打ち消しあうような格好になっている．

$$\begin{array}{c} \bar{t} \end{array} \rightarrow \text{loop} \rightarrow \begin{array}{c} t \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c} t \end{array} \rightarrow \text{loop} \rightarrow \begin{array}{c} \bar{t} \end{array} = 0$$

(A.4.37) 式のバーテックスを基に考えられる 1-loop として

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\kappa^2}{4} (\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}) y_t \\
&\quad \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k \frac{i}{2k^2} (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) \\
&\quad \times \frac{1}{2} \quad (\text{A.4.40})
\end{aligned}$$

Euclid 化を施し,

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\kappa^2 y_t}{16(2\pi)^4} \cdot 40 i \int d^4 k_E \frac{1}{-k_E^2} \\
&= \frac{i5\kappa^2 y_t}{2(2\pi)^4} 2\pi^2 \int_{\mu}^{\Lambda} dk_E k_E \\
&= \frac{i5\kappa^2 y_t}{32\pi^2} (\Lambda^2 - \mu^2)
\end{aligned} \tag{A.4.41}$$

これらのことからトップクォークの湯川結合定数 y_t に対しての補正 δy_t と β 関数は

$$\begin{aligned}
\delta y_t &= -\frac{3\kappa^2 y_t}{64\pi^2} (\Lambda^2 + \mu^2) \times 2 - \frac{5\kappa^2 y_t}{32\pi^2} (\Lambda^2 - \mu^2) \\
&= -\frac{\kappa^2 y_t}{4\pi^2} (\Lambda^2 - \mu^2), \\
\beta_{y_t}^{(g)} &= \mu \frac{\partial \delta y_t^{(g)}}{\partial \mu} \\
&= \frac{\kappa^2 y_t}{2\pi^2} \mu^2,
\end{aligned} \tag{A.4.42}$$

となることがわかる. このとき湯川結合の項は量子効果を考えた上で

$$\mathcal{L}_{yukawa} = -(y_t + \delta y_t^{(g)} + \dots) \bar{t} t \phi \tag{A.4.43}$$

となっている. ここで \dots は重力の 1-loop 以外の湯川結合に対しての量子補正である.

謝辞

本研究を行うにあたり多くの方々にご協力いただきました。指導教官である奥山和美准教授には本研究での議論、研究会での発表、論文執筆などに多くのアドバイス、サポートをしていただきました。御礼申し上げます。また川村嘉春教授と小竹悟教授のお二方にも研究の議論や論文へのアドバイスをいただきました。ありがとうございました。

共同研究者である国立台湾大学の稲見武夫教授には議論や論文執筆といった研究のことのみに限らず、議論の際の資金的な補助、研究会の紹介などさまざまな事柄でお世話になりました。深く感謝いたします。同じく共同研究者であり、昨年まで研究室をともに過ごした阿部裕悟さんには本研究での議論のほか大学生活におけるさまざまなアドバイスもいただきました。ありがとうございます。

本研究では台湾大学、理化学研究所の初田研究室、中央大学の坪井研究室のかたがたには議論の場所を提供していただきました。特に台湾大学の Pei-Ming Ho 氏には台湾滞在中に金銭面を含めたさまざまな支援をしていただきました。心から感謝いたします。

参考文献

- [1] ATLAS collaboration, G. Aad et al., Phys. Lett. B **710** (2012) 49
- [2] CMS collaboration, S. Chatrchyan et al., Phys. Lett. B **710** (2012) 26
- [3] G. Degrandi, S. D. Vita, J. Elias-Miro, J. R. Espinosa, G. F. Giudice, G. Isidori and A. Strumia, JHEP **1208**, 098 (2012).
- [4] Y. Hamada, H. Kawai and K. Oda, Phys. Rev. D **87**, 053009 (2013).
- [5] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 1.
- [6] S. Nobbenhuis, Found. Phys. **36** (2006) 613
- [7] J. Polchinski, arXiv:0603249 [hep-th].
- [8] M. Li, X. D. Li, S. Wang and Y. Wang, Commun. Theor. Phys. **56** (2011) 525
- [9] J. Martin, Comptes Rendus Physique **13** (2012) 566
- [10] C. P. Burgess, arXiv:1309.4133 [hep-th].
- [11] A. Padilla, arXiv:1502.05296 [hep-th].
- [12] M. Spira and P. M. Zerwas, Lect. Notes Phys. **512**, 161 (1998).
- [13] C. Ford, I. Jack and D. R. T. Jones, Nucl. Phys. B **387**, 373 (1992).
- [14] Y. Abe, M. Horikoshi and T. Inami, Communications in Physics, Vol. 26, No. 3 (2016), pp. 229-240
- [15] N. Cabibbo, L. Maiani, G. Parisi and R. Petronzio, Nucl. Phys. B **158**, 295 (1979).
- [16] F. Bezrukov, M. Y. Kalmykov, B. A. Kniehl and M. Shaposhnikov, JHEP **1210**, 140 (2012).
- [17] D. Buttazzo, G. Degrandi, P. P. Giardino, G. F. Giudice, F. Sala, A. Salvio and A. Strumia, JHEP **1312**, 089 (2013).
- [18] A. Andreassen, W. Frost and M. D. Schwartz, Phys. Rev. Lett. **113**, 24, 241801 (2014).
- [19] A. V. Bednyakov, B. A. Kniehl, A. F. Pikelner and O. L. Veretin, Phys. Rev. Lett. **115**, 20, 201802 (2015).
- [20] F. Loebbert and J. Plefka, Mod. Phys. Lett. A **30**, 34, 1550189 (2015).
- [21] N. Haba, K. Kaneta, R. Takahashi and Y. Yamaguchi, Phys. Rev. D **91**, 016004 (2015).
- [22] Y. Hamada, H. Kawai and K. Oda, Phys. Rev. D **92**, 045009 (2015).
- [23] L. Smolin, Phys. Lett. B **93**, 95 (1980)
- [24] S. Bhattacharjee and P. Majumdar, Nucl. Phys. B **885**, 481 (2014).
- [25] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).
- [26] K. G. Chetyrkin and M. F. Zoller, JHEP **1304**, 091 (2013).
- [27] A. V. Bednyakov, A. F. Pikelner and V. N. Velizhanin,

- Nucl. Phys. B **875**, 552 (2013).
- [28] V. Branchina and E. Messina, Phys. Rev. Lett. **111**, 241801 (2013).
 - [29] F. L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **659**, 703 (2008).
 - [30] I. D. Saltas, JCAP **1602**, 048 (2016).
 - [31] K. S. Stelle, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
 - [32] I. Antoniadis and E. T. Tomboulis, Phys. Rev. D **33**, 2756 (1986).
 - [33] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. B **201**, 469 (1982).
 - [34] C. H. Llewellyn Smith, Phys. Lett. **46B**, 233 (1973).
 - [35] Y. Abe, M. Horikoshi and Y. Kawamura, Int. J. Mod. Phys. A **32** (2017) no.06n07, 1750037
 - [36] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], Astron. Astrophys. **571** (2014) A16 [arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO]].
 - [37] E. K. Akhmedov, arXiv:0204048 [hep-th].
 - [38] J. F. Koksma and T. Prokopec, arXiv:1105.6296 [gr-qc].
 - [39] R. L. Jaffe, Phys. Rev. D **72** (2005) 021301
 - [40] E. L. Wright, arXiv:9805292[astro-ph].
 - [41] V. B. Braginskii and V. I. Panov, Sov. Phys. JETP **34** (1972) 463
 - [42] 川村嘉春, S G C ライブラリ 48 例題形式で学ぶ 現代素粒子物理学, サイエンス社
 - [43] Particle Data Group web サイト, <http://www-pdg.lbl.gov/>