様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２８　年　　６　月　１５　日現在

機関番号：１３６０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：２４７４０００７

研究課題名（和文）複素鏡映群に付随するヘッケ代数とその準遺伝被覆のモジュラー表現論

研究課題名（英文）Modular representation theory of Hecke algebras associated with complex reflection groups and their quasi-hereditary covers

研究代表者
和田　堅太郎（WADA, Kentaro）

信州大学・学術研究院理学系・助教

研究者番号：６０５８３８６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：G(r,1,n)型の複素鏡映群に付随する巡回 Hecke 代数の準遺伝被覆である巡回 q-Schur 代数のモジュラー表現論について研究した。
本研究において，一般線形Lie代数のカレントLie代数のフィルター変形となっている変形カレントLie代数，及び，変形カレントLie代数の普遍包絡環のq-類似となる量子変形カレントLie代数を導入し，巡回 q-Schur 代数をその商代数として実現できることを示した（q=1の場合の巡回 q-Schur 代数は変形カレントLie代数の普遍包絡環の商代数となる）。さらに，変形カレントLie代数，及び，量子変形カレントLie代数の表現論の基礎付けを与えた。

研究成果の概要（英文）：We studied on the representation theory of cyclotomic q-Schur algebras which are quasi-hereditary covers of cyclotomic Hecke algebras associated with complex reflection groups of type G(r,1,n).
In this research, we introduced the deformed current Lie algebra which is a filtered deformation of the current Lie algebra of the general linear Lie algebra, and also introduced the quantum deformed current algebra which is regarded as a q-analogue of the universal enveloping algebra of the deformed current Lie algebra. Then, we proved that the cyclotomic q-Schur algebra is a quotient algebra of the quantum deformed current algebra (in the case where q=1, the cyclotomic q-Schur algebra is a quotient of the universal enveloping algebra of the deformed current Lie algebra). Moreover, we gave some basic facts on representation theory of deformed current Lie algebras and quantum deformed current algebras.

研究分野：表現論

キーワード：表現論　Hecke 環　Lie 環　量子群　複素鏡映群　組み合わせ論

１．研究開始当初の背景

G(r,1,n)型の複素鏡映群に付随する巡回 Hecke 代数は，A 型のアファイン Hecke 代数の商代数でもあり，非常に興味深い研究対象であり，様々な研究が行われている。巡回 Hecke 代数のある加群の自己準同型環として定義される巡回 q-Schur 代数は，準遺伝代数であり，Schur 関手と呼ばれる巡回 q-Schur 代数の有限次元表現のなす圏から巡回 Hecke 代数の有限次元表現のなす圏への完全関手，及びその随伴関手を通じて，お互いの表現論は密接に関係している。特に，巡回 q-Schur 代数は巡回 Hecke 代数の(Rouquier の意味での)準遺伝被覆となっている。

r=1 の場合，巡回 Hecke 代数は対称群に付随した Iwahori-Hecke 代数であり，巡回 q-Schur 代数は古典的な q-Schur 代数と一致する。このとき，これらの表現論は対称群，及び一般線形群の表現論の q-類似と見なすことができ，組み合わせ論を用いて記述することができる。また，Schur-Weyl 双対(の q-類似)を通じて，q-Schur 代数は一般線形 Lie 代数に付随する量子群の商代数として実現できることも知られており，量子群の表現論を用いて q-Schur 代数の表現論を調べることもできる。

r が一般の場合，巡回 q-Schur 代数の導入者である，Dipper-James-Mathas によって，巡回 Hecke 代数，及び巡回 q-Schur 代数の組み合わせ論を用いた cellular 基底が与えられており，Mathas を中心に，これらの表現論が r=1 の場合の自然な拡張となっていることが知られている。

また，研究代表者，及び，Stroppel-Webster によって，巡回 q-Schur 代数の有限次元表現のなす圏を用いた A 型のアファイン Lie 代数の Fock 空間の圏化も与えられており，標数 0 の体上の巡回 q-Schur 代数の表現のなす圏の Grothendieck 群のレベルでは，その理解がかなり進んでいる。

２．研究の目的

前項に書いたように，r=1 の場合，古典的な q-Schur 代数は Schur-Weyl 双対(の q-類似)を通じて，一般線形 Lie 代数に付随した量子群の商代数として実現でき，q-Schur 代数の表現論を量子群の表現論として展開することにより，様々な操作が可能となり，より深く理解することができる。特に，量子群の有限次元表現のなす圏が組み紐テンソル圏としての構造を持っていることが重要であり，Iwahori-Hecke 代数との関係を与える Schur-Weyl 双対は，テンソル圏の構造から従うものである。また，量子群の表現論と見なすことにより，代数群，Lie 代数，量子群等でよく使われるウェイト理論を用いることができ，ウェイト理論と q-Schur 代数の表現論に用いられる組み合わせ論が整合的であることも分かる。

しかし，r が一般の場合，r=1 の場合の量子群に相当するものが知られておらず，Mathas らによって進められた組み合わせ論を用いた表現論によって，それらが r=1 の場合の自然な拡張となっていることが示唆されているが，それらの背後にあるものがよく分かっていない。

そこで，r が一般の場合に，r=1 の場合の量子群に相当する代数構造を見つけ，それらを用いて巡回 q-Schur 代数の表現論をみつめなおすことによって，その表現論の位置づけを明確にしていく手掛かりを得ることを本研究の目的とする。

３．研究の方法

Du-Rui によって，巡回 q-Schur 代数の(上下)Borel 部分代数が構成され，Borel 部分代数に制限すれば，それは古典的な q-Schur 代数の Borel 部分代数と同型であることが示されている。よって，Borel 部分代数に制限すれば，それは一般線形 Lie 代数に付随する量子群の Borel 部分代数の商代数となっている。r が一般の場合に，量子群の商代数とはならない理由は，上下の Borel 部分代数を張り合わせる関係式が，量子群と巡回 q-Schur 代数とは異なっているためである。研究代表者によって，巡回 q-Schur 代数における上下の Borel 部分代数を張り合わせる関係式は取り敢えず得られているが，その関係式は非常に複雑で，明示的な表示は得られていない。この点が，r が一般の場合に，r=1 の場合の量子群に相当する代数構造を見つける際の問題点となっている。しかし，Borel 部分代数に制限すれば，量子群の Borel 部分代数の商代数になっていることから，この着眼点自体は悪くないはずである。そこで，これらのことを，Mathas らによって進められた組み合わせ論を用いた巡回 q-Schur 代数の表現論との関係を見つつ，改良することによって，r が一般の場合に，r=1 に場合の量子群に相当する代数構造をみつけ，それを用いて巡回 q-Schur 代数の表現論を見直すことによって，その位置づけを明確にしていく。

４．研究成果

前項に書いたように，巡回 q-Schur 代数の(上下)Borel 部分代数は，一般線形 Lie 代数に付随する量子群の Borel 部分代数の商代数となっている。しかしこの事実を用いて，上下の Borel 部分代数を張り合わせる関係式を記述しようとしても，複雑すぎて明示的に表せないことが，巡回 q-Schur 代数の背後にあるべき代数構造を記述することを困難にしている原因であった。

しかし，上下の Borel 部分代数の張り合わせの関係式に，巡回 q-Schur 代数の

Jucys-Murphy 元が深く関わっていることが分かったので，それを用いて，巡回 q-Schur 代数の生成元を(加算無限個に)増やすことによって，上下の Borel 部分代数の張り合わせを表す関係式を記述することに成功した。これを用いて，量子変形カレント代数を導入し，その商代数として巡回 q-Schur 代数を実現できることを示した。

量子変形カレント代数は，生成元と基本関係式によって定義される結合代数で，当初はその実態がよく分からなかったが，その後の研究で以下のことが分かった：

- q=1 として簡単な操作(ある元の符号の違いを無視する)を行うと，量子変形カレント代数は，ある Lie 代数の普遍包絡環となる。
- 上記の Lie 代数は，一般線形 Lie 代数のカレント Lie 代数のフィルター変形となっている。(このことから，この Lie 代数を変形カレント Lie 代数と呼び，先に導入した代数を量子変形カレント代数と呼ぶことにした。)
- 上記のことから，量子変形カレント代数は，変形カレント Lie 代数の普遍包絡環の q-類似と見なせる。
- q=1 である巡回 q-Schur 代数は，変形カレント Lie 代数の普遍包絡環の商代数として実現できる。

変形カレント Lie 代数が，一般線形 Lie 代数のカレント Lie 代数のフィルター変形になっており，量子変形カレント代数が，その普遍包絡環の q-類似と見なせることより，量子変形カレント代数が，r=1 の場合の量子群に相当するものとしての役割を果たすことが期待できる。ただし，r=1 の場合でも，量子変形カレント代数と一般線形リー代数に付随した量子群の関係はよく分かっていない。量子変形カレント代数を導入する際，巡回 q-Schur 代数の Jucys-Murphy 元が重要な役割を果たしており，この元はまた，巡回 q-Schur 代数の表現論においても重要であることが知られているので，r=1 の場合でも，量子変形カレント代数と量子群の関係を調べることは重要であるし，量子群とはことなる新たな視点を提供しているはずである。

また，量子変形カレント代数，及び，変形カレント Lie 代数の有限次元表現についても調べた。

量子変形カレント代数，及び，変形カレント Lie 代数は三角分解を持ち，その表現論において，代数群，Lie 代数，量子群等の表現論で用いられる，ウェイト理論を適用できることが分かった。特に，有限次元既約表現が最高ウェイト表現となり，また，任意の最高ウェイト表現は，Verma 加群の商加群として実現できるなど，代数群，Lie 代数，量子群等の表現論で用いられる既存の手法がそのまま適用できることが分かった。また，量子変形カレント代数から巡回 q-Schur 代数への自然な全射を通じて，巡回 q-Schur 代数の既約表現を量子変形カレント代数の表現と思った時の，既約表現の最高ウェイトを決定した。このことより，巡回 q-Schur 代数の有限次元表現は，量子変形カレント代数の有限次元表現の中ではごく一部でしかない事が分かり，量子変形カレント代数の有限次元表現のなす圏そのもの研究，及び，そこにおける巡回 q-Schur 代数の有限次元表現の位置づけ等については，今後の研究課題である。

また，q=1 の場合に，他のパラメータが全て一般的(generic)であるとき，巡回 q-Schur 代数の表現を，変形カレント Lie 代数の普遍包絡環の表現と思い，普遍包絡環の余積を用いてテンソル積表現を考えたとき，巡回 q-Schur 代数の有限次元表現のなす圏はテンソル積を取る操作で閉じていることが分かった。さらに，巡回 q-Schur 代数の Weyl 加群のテンソル積は，Weyl 加群達の直和で表せ，その重複度が Littlewood-Richardson 係数を用いて表せることが分かった。これは，指標のレベルでの積の分解と整合的である。

q が一般の場合には，量子変形カレント代数が Hopf 代数の構造を持つことは分かっていないが，上記の q=1 の場合の結果は，量子変形カレント代数が Hopf 代数の構造を持つことを期待させる一つの根拠となっている。

量子変形カレント代数，変形カレント Lie 代数の表現論はまだ分かっていないことが多く，まだまとまった結果は得られていないが，その表現論は，カレント Lie 代数，ヤンギアン，量子ループ代数などの表現論と同様な手法が適用できると思われ，その方向で研究を進めることによって，既存の表現論との関係が明確になっていくことが期待できる。また，今回導入した，量子変形カレント代数，変形カレント Lie 代数は，A 型のカルタンデータによって定義されているので，形式的には他の型のカルタンデータに付随する同様な代数を定義することもでき，それらの表現論を展開していくことによって，さらなる拡がりも期待できる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）

1. K.Wada, Induction and restriction functors for cyclotomic q-Schur algebras, Osaka J. Math. 51 (2014), 785-822 (査読有).

2. K.Wada, On Weyl modules of cyclotomic q-Schur algebras, Contemp. Math. 565 (2012), 261-286 (査読有).

〔学会発表〕（計　６件）

1. K.Wada, New realization of cyclotomic q-Schur algebras, Diagram algebra and topolpgy, 2015年8月6日, ホテルスポーツロッジ糸満(沖縄).

2. K.Wada, New realization of cyclotomic q-Schur algebras, Representation theory and Related Topics, 2015年2月19日, 伊良湖ビューホテル(愛知県).

3. K.Wada, New realization of cyclotomic q-Schur algebras, Conference on Cluster Algebras an Representation Theory, 2014年11月7日, CMC(韓国, ソウル).

4. 和田堅太郎, cyclotomic q-Schur 代数の表現論, 第 58 回代数学シンポジウム, 2013年8月26日, 広島大学(広島).

5. 和田堅太郎, A quantum Frobenius map and tensor product theorem for cyclotomic q-Schur algebras, 第 16 回代数群と量子群の表現論研究集会, 2013年6月3日, 強羅青雲荘(神奈川).

6. 和田堅太郎, cyclotomic q-Schur 代数の Drinfeld 型の表示について, 組合せ論的表現論とその周辺, 2012年10月10日, 京都大学数理解析研究所(京都).

６．研究組織

(1)研究代表者

和田 堅太郎（WADA, Kentaro）

信州大学・学術研究院理学系・助教

研究者番号：60583862

(2)研究分担者

（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　　）

研究者番号：