

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800060

研究課題名(和文) 分数冪ラプラシアンを持つ確率Burgers方程式の確率解析

研究課題名(英文) Stochastic analysis of fractal stochastic Burgers equation

研究代表者

謝 賓(XIE, Bin)

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号：50510038

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)： 確率偏微分方程式に対し、確率論的解析の手法に基づき、解の一意性および様々な解の振る舞いに関する研究を行った。分数冪ラプラシアンを持つ確率のバーガーズ型の方程式に対し、確率エントロピー解を新たに導入し、適切な状態空間において、解の一意性を証明した。なお、時空型のノイズが加わった有界領域上の確率拡散方程式に対して、方程式の基本解を厳密に評価した上、解の間欠性に関する解の長時間振る舞い及びノイズの影響を考察した。

研究成果の概要(英文)： We mainly investigated the uniqueness and various properties to the solution of stochastic partial differential equations, by the approach of stochastic analysis. We first considered the uniqueness of stochastic fractal Burgers equations. By introducing a new kind of definition of solution, stochastic entropy solution, we proved the uniqueness of the solution in some proper state space. We also studied long time behavior relative to intermittency of stochastic reaction-diffusion equation driven by space-time white noise on a bounded domain, which are essentially depending on the estimate of its fundamental solution.

研究分野： 確率解析

キーワード： 確率解析 確率偏微分方程式 entropy solution intermittency 分数冪ラプラスアン

## 1. 研究開始当初の背景

近年、分数冪ラプラシアンに関する偏微分方程式が活発的に研究されてきたが、分数冪ラプラシアンに関する確率偏微分方程式、特に、非線形を持つ方程式に関する研究があまり存在しない。一方、確率偏微分方程式は確率論において非常に重要な研究分野の一つである。確率解析の手法を用いて、分数冪ラプラシアンに関する非線形の確率偏微分方程式の性質を調べるのは重要だと思われる。なお、ランダムな揺らぎの加わった界面を記述する Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式の研究が注目を集めている。言うまでもなく、非線形の項を持っているので、その解の性質を調べるのは極めて困難である。KPZ 方程式は確率反応拡散方程式に密接に関係することを考慮し、放物型の Anderson モデルを含む確率反応拡散方程式の解の性質をさらに調べるべきだと思われる。

## 2. 研究の目的

本研究課題の主な目的は確率解析の手法で確率偏微分方程式に関する解の一意性および解の様々な性質を調べることである。詳しくは以下の通りです。

- (1) 確率論的解析の手法に基づき、ある種のノイズによる摂動された分数冪ラプラシアンパーガーズ型の方程式に関する解の一意性、台の問題、および大偏差原理についての研究を行うことである。
- (2) 確率反応拡散方程式に対して、解の長時間の振る舞い、ノイズの興奮度、間欠性についての研究を行うことである。このような方程式は界面の長さを記述する KPZ 方程式と深く繋がっていて、KPZ 方程式の解の確率

的性質を調べるための一つの道具である。

## 3. 研究の方法

本研究課題の目的を念頭において、関連する重要な参考文献を精読してきた。研究の動向を見極め、研究をスムーズに遂行するため、新たに発表された論文を理解し、研究課題に関わる研究問題の理解を深めていった。また、研究の進捗に応じて、国内外の確率論の研究集会、特に、確率偏微分方程式に関する研究集会などに積極的に出席し、情報収集を行うと共に、関連分野の研究者と研究情報交換を通じて、研究に対する新たな視点を得た。さらに、研究状況を踏まえて、得られた研究成果を積極的に発表し、専門家からの意見やアドバイスを合わせて、研究結果のさらなる改良を行った。なお、他大学から確率論の講演者を招き、関連分野の研究情報収集をも行った。

## 4. 研究成果

- (1) 分数冪ラプラシアンを持つ確率 Burgers 方程式についての研究を行った。分数冪ラプラシアンの指標が二分の三より小さい場合、非線形の項を持つ確率 Burgers 方程式について解の一意性を確保するのは難しい。それを考察するため、確率エントロピー解という新たな解を導入し、適切な状態空間において解の一意性の証明に成功した。または、その状態空間において、確率エントロピー解の構成に取り組んできた。また、ガウスノイズで摂動された分数冪ラプラシアンの確率偏微分方程式の比較定理の研究を行い、反射壁を持つ分数冪確率偏微分方程式に関する解の存在と一意性という基本問題を調べた。最後に、ガウスノ

イズが加わった分数冪の確率 Burgers 方程式に関わる Freidlin-Wentzell 型と解の占有時間についての大偏差原理を論じた。

(2) 有界領域上の確率反応拡散方程式に関する間欠性, とくにそれに関する解の長時間の振る舞い, ノイズの励起度 (noise excitation) などの性質を考察した。間欠性は物理学において興味深い問題である。一方, このような確率偏微分方程式は放物型の Anderson モデルや界面成長を記述する KPZ 方程式との深い関わり研究が知られ, 多くの研究者の注目を集めている。実際, KPZ 方程式の確率的研究が活発であったが, 厳密な数学的意味を与えるのは難しい。しかし, 形式的には KPZ 方程式の解に対し Cole-Hopf 変換により, 確率熱方程式に帰着される。

本研究では, 有界区間上の Dirichlet 境界条件を満たす確率熱方程式について解のモーメントやノイズの影響を中心として研究を行った。特に, 解の長時間挙動、微分作用素の固有値とノイズの強さとの関係を明らかにし, ノイズの興奮度が 4 であることを証明した。なお, 我々の考え方は多次元領域上の確率反応拡散方程式に関する間欠性や解の長時間の振る舞いの研究に対して, 有効であると思われる。これについての研究は今後引き続き行っていく。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

B. Xie, Some effects of the noise intensity upon non-linear stochastic heat equations on  $[0,1]$ . *Stochastic Process. Appl.* 126 (2016), no. 4,

1184-1205, 査読有。

DOI:10.1016/j.spa.2015.10.014

B. Xie, SPDEs deduced from evolutionary models of two-dimensional Young diagrams, *RIMS Kôkyûroku Vol 1905*, 2014, p18-29. 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1905.html>

T. Funaki, M. Sasada, M. Sauer, B. Xie, Fluctuations in an evolutionary model of two-dimensional Young diagrams. *Stochastic Process. Appl.* 123 (2013), no. 4, 1229-1275. 査読有。

DOI:10.1016/j.spa.2012.12.005

[学会発表](計 10 件)

謝賓, 確率偏微分方程式に関する長時間の振る舞いについて, マルコフ過程とその周辺, ヴェルク横須賀, 2016年1月10日。

謝賓, Effects of the noise intensity upon stochastic heat equations with linear growth coefficients, Morningside Center of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, China, September 24, 2015.

謝賓, Some properties of stochastic partial differential equations, 2015 Peking University Youth Probability Forum, Peking University, China, July 7, 2015.

謝賓, Fractal Burgers equations with Gaussian type noises, Seminar of Mathematical Sciences, Department of

Mathematical Sciences, Qinghua University, May 8, 2014.

謝賓, SPDEs deduced from evolutionary models of two-dimensional Young diagrams, 非圧縮性粘性流体の数理解析, 京都大学数理解析研究所, 2013年11月25日.

謝賓, On stochastic interface models, Seminar of Probability Theory, Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, September 23, 2013.

謝賓, Limit problems for the evolutionary models of two-dimensional Young diagrams, Morningside Center of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, September 21, 2013.

謝賓, Limit problems for the evolutionary models of two dimensional Young diagrams, Seminar of Stochastic Analysis, Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, September 18, 2013.

謝賓, Limit problems for an evolutionary model of 2-D Young diagrams, School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, September 16, 2013.

謝賓, Some limit problems for an evolutionary model of 2-D Young diagrams, IMS-SWUFE International Conference on Statistics and

Probability, Chengdu, China, July 2, 2013.

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

謝 賓 (XIE, Bin)

信州大学 · 學術研究院理学系 · 准教授

研究者番号 : 50510038