

中学校数学における課題探究として 証明することのカリキュラム開発*

－進行状況と授業化の意味・役割－

宮崎 樹夫**・永田 潤一郎***・茅野 公穂**

要 約

課題探究として証明することは数学として真正な営みであり、この営みを学校数学で実現することによって汎用的スキルとして課題探究力の育成が促進され得る。この可能性を実現するために、本研究は次の問いに答えることを目的とする：我が国の中学校数学において、課題探究として証明することを実現するために、どのようなカリキュラムの開発が可能か／開発されたカリキュラムには、どのような効果と限界があるか。本稿では、特に前者について、カリキュラム開発の進行状況として次の4点を概説する：課題探究として証明することの捉え、カリキュラムの改善点、カリキュラム開発枠組みの構築、枠組みに基づく「内容－活動対応表」の作成。その上で、カリキュラムの効果と限界の特定に必要な「内容－活動対応表」に基づく授業化（理論知と実践知の相互作用に基づいてカリキュラムを授業として形づくるプロセス）の意味と役割を概観する。

キーワード：課題探究，証明すること，中学校数学，カリキュラム，授業化

1. 課題探究として証明することの重要性

今日、我が国を含む様々な国々・地域が学校教育による汎用的スキルの育成に動き出している（清水禎文，2012）。この視座からすると、学校数学には汎用的スキル育成の場として如何なる内容・活動においても一定の貢献が求められることになる。もちろん、「証明すること」、即ち、事柄の正否を根拠に基づいて明らかにすることも、その例外ではない。

本来、課題探究として証明することは数学として真正な営みである（Polya, 1957; Freudenthal, 1971; Lakatos, 1978）。この姿を学校数学に実現することは、教育及び数学教育にとって極めて重要であるだけでなく、汎用的スキルとして課題探究力を育成することにもなる（宮崎・藤田，2013）。そのために、特に証明の本格的な学習が重視されている我が国の中学校数学において、課題探究と

して証明することを実現するためのカリキュラム、学習指導法、評価法の開発が必要である。

2. 本研究の目的と方法

本研究の目的は次の問いに答えることである。我が国の中学校数学において、課題探究として証明することを実現するために、

- どのようなカリキュラムの開発が可能か。
- 開発されたカリキュラムには、どのような効果と限界があるか。

特に本稿では、前者の問いにあるカリキュラム開発の進行状況について次の4点を概観する：課題探究として証明することの捉え／カリキュラムの改善点と可能性の特定／カリキュラム開発枠組みの構築／枠組みに基づく「内容－活動対応表」の作成。その上で、後者の問いに答えるために必要となる、「内容－活動対応表」に基づく授業化の意味と役割を指摘する。

*平成26年8月31日受付，平成26年9月5日決定

**信州大学学術研究院教育学系

***文教大学教育学部

3. カリキュラム開発の進行状況

(1) 課題探究として証明することの捉え

我が国の学校数学における証明の学習が、汎用的スキルである課題探究力の育成につながるためには、数学における証明するという営みに内在する知的な“息吹”を、学校数学の限られた領域のみならず全ての領域に、さらには数学教育そして教育全体に吹き込むことが必要である。そこで、本研究では、課題探究として証明することを、証明することにみられる、事柄の生成、証明の生成（構想／構成）、評価・改善・発展という三側面の相互作用として捉えることにする（宮崎・藤田，2013）¹⁾。

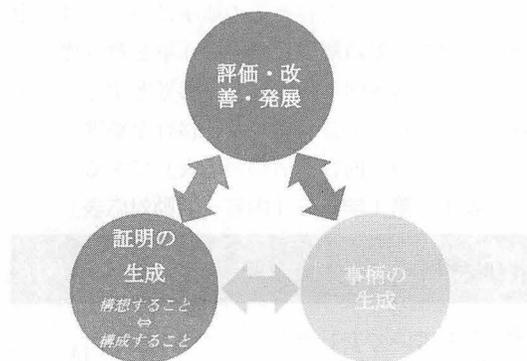


図1 課題探究として証明すること

この捉えによって、学校数学における証明の学習は、数学における証明することの本性に基づく真正さを有し得るようになるとともに、課題探究力を育む学習として学校数学の主な“支柱”と成り得る。さらに、教科横断的な学習を通じて、課題探究として証明することが学校教育さらには教育界全体で、その価値を有するようになることが期待される。

(2) カリキュラムの改善点

前記の捉えに基づき、課題探究として証明することの学習を実現するという視点から中学校学習指導要領解説数学編（平成20年）及び教科書を分析し、領域「数と式」及び「図形」に関するカリキュラムの改善点を次のように整理した。

【中学校第1学年】

■領域「数と式」の改善点

- ・根拠に基づいて、数量の関係や法則などを文字を用いた式に表したり、文字を用いた式の意味を読みとったりすることの充実

- ・第2学年の準備として、第1学年における証明を構想及び構成することの導入

■領域「図形」の改善点

- ・第1学年で意図される、証明することの意味の明確化
- ・小学校算数科と中学校第1学年における、証明することに関する学習の接続の確立
- ・第1学年と第2学年における、課題探究として証明することに関する学習の接続の確立

【中学校第2学年】

■領域「数と式」の改善点

- ・第2学年と第3学年の教科書における、証明することの学習に関する差異の明確化
- ・課題探究として証明することの充実、特に証明を構想すること、評価・改善・発展をすることの充実

■領域「図形」の改善点

- ・第2学年における、証明することに関する学習の漸進性の設定
- ・課題探究として証明することの充実、特に証明を構想し構成すること、事柄及び証明の生成について評価・改善・発展をすることの充実

【中学校第3学年】

■領域「数と式」の改善点

- ・第2学年と第3学年の教科書における、証明することの学習に関する差異の明確化
- ・課題探究として証明することの充実、特に証明を構想すること、評価・改善・発展をすることの充実

■領域「図形」の改善点

- ・第2学年での証明することの学習を第3学年の初期段階で学び直すことの重要性
- ・課題探究として証明することの充実、特に評価・改善・発展のうち、特に発展の機会を意図的に設けることによる、自ら課題を見だし課題探究に取り組む活動の促進

一方、カリキュラムには、長さや角の大きさなど具体的な数量の正しさを証明の対象とする可能性を学年に共通して見出すことができる。現状では、証明の対象として、事柄の全称性や一般的な関係（ $AB=CD$ 等）が多く扱われている。これに対し、角の大きさ等の具体的な数量が正しい理由

を図形の性質や関係に基づいて示す／課題探究として証明するという学習をカリキュラムに位置づける可能性を見出すことができる。

(3) カリキュラム開発枠組みの構築 (概要)

前記の改善点と可能性に基づいて、課題探究として証明すること(図1)のうち、証明を生成することに焦点を当て、証明を構想すること(横軸)と、証明を構成すること(縦軸)に基づいて、学習レベルの移行過程に関する枠組みを次のように設定した(宮崎・永田・茅野, 2012)。

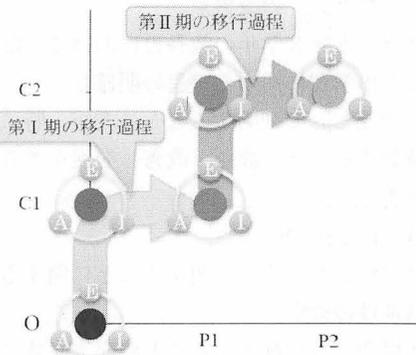


図2 カリキュラム開発枠組み

この枠組みでは、証明を構想することの学習に関するレベルとして次の二つが設定されている。

P1：前提と結論を結びつけるための着想、必要となる対象と方法を捉える。

P2：前提と結論を結びつけるために双方から中間命題の関係網を拡充する。

一方、証明を構成することの学習に関するレベルとして次の二つが設定されている。

C1：前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する。

C2：演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に区別して前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する。

その上で、証明を構想すること及び構成することが未分化な学習レベルを「O」と定め、証明を構成する学習が証明を構想する学習に先行するとして、第I期の移行【O→C1→(P1, C1)】と、第II期の移行【(P1, C1)→(P1, C2)→(P2, C2)】が設定されている。いずれの学習レベルでも、事柄及び証明の生成について評価・改善・発展(EIA)が意図される。

学年との対応については、第2学年の教科書でC2レベルの証明の構成が求められていることから、第I期の移行が第1学年に対応し、第II期の移行が第2学年及び第3学年に対応することにした。また、領域「数と式」では、我が国の中学校数学で意図されている証明に即し、第II期の移行過程を(P1, C1)→(P2, C1)に限定し準用する。

なお、この枠組みはカリキュラム開発及び検証を推進するための仮設的なものである。今後、理論的な考察と、後述の授業化によるカリキュラムの検討を通じて改善されていくと考えられる。

(4) 「内容－活動対応表」の作成

カリキュラムの内容とその順序については、中学校学習指導要領解説数学編の「第2章目標及び内容 第3節各学年の内容」を参考とする。各項目で意図される学習レベル及び移行を整理したものが、以下の「内容－活動対応表」である。

表1 第1学年の「内容－活動対応表」

領域	項目	学習レベル・移行
数と式	式を用いて表したり読み取ったりすること	O→C1
		C1+EIA
		C1→(P1, C1)
図	平行移動、対称移動及び回転移動	O→C1
	基本的な作図とその活用	
形	平面図形の運動による空間図形の構成	C1+EIA
	空間図形の平面上への表現と読み取り	C1→(P1, C1)

表2 第2学年の「内容－活動対応表」

領域	項目	学習レベル・移行
数と式	文字を用いた式でとらえ説明できること 目的に応じた式の変形	(P1, C1)→(P2, C1) (P2, C1)+EIA
図	平行線と角の性質	(P1, C1)→(P1, C2)
	多角形の角についての性質	(P1, C2)+EIA
	合同の意味と三角形の合同条件	
形	証明の必要性と意味及び方法	(P1, C2)→(P2, C2)
	三角形や平行四辺形の性質	(P2, C2)+EIA

表3 第3学年の「内容－活動対応表」

領域	項目	学習レベル・移行
数と式	文字を用いた式でとらえ説明すること	(P1.C1) →(P2.C1)+EIA
	三角形の相似条件	(P1.C2)→(P2.C2)
図	平行線と線分の比についての性質	(P2.C2)+EIA
	相似な図形の性質の活用	
形	円周角と中心角の関係が証明できることを知ること	(P2.C2)+EIA
	円周角と中心角の関係の活用	
	三平方の定理が証明できることを知ること	(P2.C2)+EIA
	三平方の定理の活用	

4. 「内容－活動対応表」に基づく授業化

(1) 本研究における「授業化」の意味

カリキュラムは望まれる教育の“魂”であり、学校教育で授業としてその“肉体”を得る。意図されるカリキュラムが授業として形づくられるまでには、「企画・立案→実践→評価・改善」という循環・発展的な過程を経る必要がある。

この過程では、意図されるカリキュラムを“夢物語”に終わらせぬために理論知と実践知の相互作用が重要であり、カリキュラム開発に携わる研究者と実践者が子どもを基軸として真摯に連携・協働することが不可欠である。本研究では、理論知と実践知の相互作用に基づいてカリキュラムを授業として形づくりのプロセスを「授業化」と呼ぶ。

(2) 授業化の役割

授業化の取り組みによってカリキュラムが局地的に検証され、授業として実現可能な部分と更なる工夫を要する部分が明らかとなる。特に後者はカリキュラムの改善に向け研究者と実践者が連携・協働することにより一層固い絆で協働し合う契機となる。

この際、研究者には、局地的な検証の重要性 (Lewis, Perry & Murata, 2006) を認識しつつ、授業化の革新部分を実践者に詳らかにし、カリキュラムに基づく授業化の進展に必要な支援を主導していく責任とその履行が求められる。

5. 今後の課題・展開

今後、領域「数と式」、「図形」での授業化を拡充するとともに、その過程や結果に基づいてカリキュラム開発枠組み及び「内容－活動対応表」を改善する。また、領域「関数」、「資料の活用」でのカリキュラム開発及び授業化を展開する。その上で、評価問題等の作成と調査の実施を通じカリキュラムの効果と限界を特定していく。

謝辞

本研究は科研費 (No. 23330255, 23330251, 24243077, 26282039) の支援を受けています。

註

*1: 記号を次のように変更した: 証明の構成 (旧D→新C), 評価・改善・発展 (旧CIA→新EIA)。

引用・参考文献

- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3(1), 1, 413-435.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Lewis, C., Perry, R., and Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement?: The case of lesson study. *Educational Researcher*, 35 (3), 3-14.
- 宮崎樹夫, 永田潤一郎, 茅野公穂 (2012). 中学校数学における課題探究としての証明学習カリキュラムに関する研究: カリキュラム開発のための枠組みの構築, 日本数学教育学会 第45回数学教育論文発表会論文集, 887-892.
- 宮崎樹夫, 藤田太郎 (2013). 課題探究として証明することのカリキュラム開発: 我が国の中学校数学科における必要性と, これまでの成果, 日本数学教育学会第1回春期研究大会論文集, 1-8.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. NJ: Princeton University Press.
- 清水禎文 (2012). ジェネリック・スキル論の展開とその政策的背景, 東北大学大学院教育学研究科研究年報, 61(1), 275-287.