第45回数学教育論文発表会論文集
論文発表の部

中学校数学における課題探究としての証明学習カリキュラムに関する研究

－ カリキュラム開発のための枠組みの構築 －

宮﨑樹夫　永田潤一郎　茅野公穂
信州大学教育学部　文教大学教育学部　信州大学教育学部

要　約

本研究では，中学校数学における課題探究としての証明学習カリキュラムを開発するために，課題探究として証明するプロセスの側面（証明を構成すること／証明を構成する／証明することについて評価・改善・発展すること）に着目した。そして，これらの側面に基づき学習レベルを設定し，証明を構想することと，証明を構成することの相補的互恵的な関係に基づき，学習レベルを段階的に移行するという枠組みを構築した。この枠組みの独自性は，課題探究として証明学習を捉え，中学校数学全体における証明学習の質的な向上を学習レベルの移行過程として段階的に表している点である。

キーワード：中学校数学，課題探究，証明学習，カリキュラム

1. 課題探究としての証明学習カリキュラムの必要性

グローバル化／高度情報化が進む知識基盤社会において，課題について言語やICT等のツールを用いて他者と有機的にかかわりながら課題について自律的に探究する力が求められている(DeSeCo, 2006 他)。こうした鍵となる力を数学教育において育むために証明学習の重要性は近年益々高まってきている。なぜなら，この学習を通じて偏見や権威などの束縛から離れ自分の力で考える力を育むことができる (Hanna, 1995 他)からである。

しかし，各種大規模調査の結果において様々な事象について説明する･証明する問題への回答状況からすると，学校数学における証明学習の状況は課題について自律的に探究する力の育成という点からみて決して望ましいとはいえない(例えば，国立教育政策研究所，2012)。この主な原因には，カリキュラム，学習，学習指導及び評価が大きく考えられる。

これまでにも証明の学習について子どもの学習の実態に基づき学習指導の改善が数多く提案・実施されてきた。しかし，大規模調査の結果から明らかにされているように，学習状況には証明の構成のみならず証明の方針を立てること，証明から発展的に考えること等に関して重要な課題が残されたままになっている。こうした現状からすると，証明学習のカリキュラムそのものに証明学習の望ましくない状況の原因を求め，鍵となる力を数学教育のみならず教育全体の視座として，カリキュラムの新たな姿を構想する必要があるといえる。

課題について自律的に探究するためには，自分にとって解決を要する課題を見出し，その課題の解決に主体的かつ生産的に取り組むことが必要である。特に，その取り組みでは，解決のために構想を立てること，構想に基づいて実践すること，構想及び実践について評価し誤り等を改善するとともに，新たに見出せることはないか等と発展的に考えることが重要である。証明学習を通じて課題について自律的に探究する力を育むためには，義務教育で証明学習の中核となる中学校数学において，証明学習全体を課題の自律的な探究として編み直し，その総体をカリキュラムとして形にする必要がある。そこで，本研究では，カリキュラム開発の一歩として，課題探究としての証明学習に関する高まりや深まりを設けるための「ものさし」となる枠組みを構築する。

2. 目的，方法

本研究の目的は，次の問いに答えることである。

> 中学校数学における，課題探究としての証明学習カリキュラムを開発するために，どのような枠組みが必要か。

この目的を達成するために，3章では，課題探究として証明するプロセスの諸側面に着目することによって学習レベルを設定し，4章では，諸側面の相補的かつ互恵的な関係に基づいて学習レベルの移行過程を特定する。

3. 課題探究として証明することの学習レベル

(1) 学習レベルを設定する必要性

我が国の中学校数学科では，数学的な推論として帰納と演繹の働きの違いが強調されている(文部科学省，2008)。また，教科書では，小単元「平行線と角の性質」，「多角形の角についての性質」，「合同の意味と三角形の合同条件」に対応する部分での演繹的な説明と，「証明の必要性と意味及び方法」，「三角形や平行四辺形の性質」に対応する部分での演繹的な説明について，辺や角など図形の表記の仕方のみならず，説明・証明の記述，特に証明の根拠となる事柄の表し方に差異が設けられており，プロダクトとしての証明の質が次第に向上していくための工夫が施されている。

しかし，証明の方針を立てる等のような証明をつくりだすプロセスについては，結論から前提に向かって十分条件を探す等について適切な場面や該当する記述を見出すことはできない。また，循環論を見出し修正する，あるいは，証明から新たな事柄を見出すなど，証明及び証明することについて評価し，改善／発展する機会が設けられていても，トピックとして埋め込まれているに過ぎず，カリキュラムとして明確に位置づけられているわけではない。

中学校数学において，課題探究としての証明学習の高さや深さをカリキュラムに設けるためには，スコープとなる学習レベルを設定することが必要である。特に本研究では，課題について自律的に探究する力の育成という視座から，課題探究として証明するプロセスに着目して学習レベルを設定する。

(2) 学習レベルの設定

① 基点となる学習レベルの設定

証明学習の高さや深さを学習レベルとして設け学習レベル間の移行によってカリキュラムを構成するためには，課題探究としての証明学習の基点となる学習レベルを定めておく必要がある。この学習レベルでは，事柄を証明

するという課題について探究することが求められるが，証明するプロセスを，証明を構想する／証明を構成する／証明するという諸側面にまで分化して探究することまでは求められない。本研究では，この学習レベルを「O」と表す。

② 証明を構想すること／証明を構成することに基づく，学習レベルの設定

ア．証明を構成すること，及び証明を構成することへの着目

課題探究として証明するプロセスの諸側面のうち，証明することについて評価・改善・発展することは，証明を構想すること及び証明を構成することの2つを考察の対象とする。そこで，証明学習の高さや深さを学習レベルとして設けるために，証明を構想すること，及び証明を構成することの二つに優先して着目し，それぞれの学習に関してレベルを設定する。

イ．証明を構想することの学習に関するレベル

証明を構想するとは，事柄の前提と結論を演繹的な推論によってどのように結びつけるかについて探る営み（辻山，2011）である。この営みでは，基本的に，前提から結論に向けて必要条件が導かれるとともに，結論から前提に向けて十分条件が導かれる。前者で用いられるのが前向き推論であり，この推論によって前提から導出可能な中間命題を構成要素とする関係網が構成される。一方，後者で用いられるのが後向き推論であり，この推論によって結論から導出可能な中間命題を構成要素とする関係網が構成される。証明を構想する営みでは，この二種類の関係網が漸進的に拡充されるとともに，両関係網に共通な中間命題があるかどうか，即ち，二種類の関係網の接合可能性について検討されていく。

証明を構想する営みでは，前提と結論を結びつけるために何を用いればよいのか（対象），そして，その対象をどのように用いればよいのか（方法）について検討され，両者の適切な活用が必要である。そのため，証明を構想することの学習においてはじめに求められるのは，前記の対象と方法を分化し，これらを前提と結論を結びつけるために活用できるようになることである。これが証明を構想することの学習に関する第一レベル(P1)である。

一方，前述のように，証明を構想する営みでは，前提と結論を結びつけるために，前提からの中間命題の関係網と結論からの関係網が拡充され両者に共通な中間命題の有無が検討される。ここでは，前提と結論を結びつけるために用いられるものをどのように用いればよいのかという第一レベルの方法を，前提から結論に向けて推論することと，結論から前提に向けて推論することに分化し，この両者が前提と結論を結びつけるために活用できるようになることが求められる。これが証明を構想することの学習に関する第二レベル(P2)である。

以上のことから，証明を構想することの学習に関するレベルとして次の二つを設定する。

P1：前提と結論を結びつけるために必要となる対象と方法を分化し活用する

P2：前提と結論を結びつけるために必要となる方法を分化し活用する

ウ．証明を構成することの学習に関するレベル

課題探究として証明するプロセスにおいて，証明を構想することに続くのが，証明を構成すること，即ち，事柄の前提と結論を実際に結びつける営みである。この営みでは，前提から必要条件として導出可能な中間命題の関係網と，結論から十分条件として導出可能な中間命題の関係網とを接合する中間命題が見出され，この命題を言わば“接合点”として，前提と結論の演繹的な結びつきが明示される。この結びつきは，定理等の全称命題に基づく普遍例化と，それによる単称命題についての仮言三段論法の適切な組合せによって主に実現される。そして，実現された結びつきが言語・図等で表現されることによって，プロダクトとしての証明が構成される。

証明を構成するには，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現することが必要である。この連鎖を形づくる主な推論は仮言三段論法であるので，前提と結論の間における命題の演繹的な連鎖のうち，この演繹的な推論を実行することによって仮言三段論法に基づく部分を形づくり表現できるようになることが，証明を構成することの学習としてはじめに求められる。これが第一レベル(D1)である。

一方，前述のように，前提と結論の間における命題の演繹的な連鎖には，仮言三段論法に加え，定理等の全称命題に基づく普遍例化が用いられている。そのため，前提と結論の間における命題の演繹的な連鎖を厳密に形づくり表現するために，演繹的な推論を仮言三段論法と普遍例化に分化し(Miyazaki & Fujita, 2010)，特に，普遍例化について根拠となる全称命題と，この命題から導かれる単称命題を明確に区別して表現できるようになることが求められる。これが第二レベル(D2)である。

以上のことから，証明を構成することの学習に関するレベルとして次の二つを設定する。

D1：前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する

D2：演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化して前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する

エ．証明を構成することと証明を構成する事が分化した学習レベルの設定

証明を構想することの2レベル P1，P2 と，証明を構成することの2レベル D1，D2 を組み合わせることによって，4つの学習レベル(P1, D1), (P2, D1) , (P1, D2) , (P2, D2)が設定され得ることになる。これら4つの各学習レベルに応じ課題探究として証明することが学習として意図されるとすると，それぞれを考察の対象として，証明を構想すること，及び構想に基づいて証明を構成することの正誤や適否等について判断し，直すべき点があればそれを修正したり，証明を構想する／構成する過程や結果から新たなことを見出したりすること，即ち，証明することについて評価・改善・発展することが学習として意図し得る。

③ 証明を構想することと，証明を構成することが未分化な学習レベルの設定

証明を構想することと，証明を構成することが未分化であっても，いずれか一方が意図される学習レベルが設定され得る。(実際，現状の証明学習では証明を構成することが極めて強く意図されている。)これらの学習レベルを，証明を構想することに関しては P1, P2，証明を構成することに関しては D1, D2 と表す。

なお，これらの4レベルでは，証明を構想すること，あるいは，証明を構成することが顕在的に学習されるので，いずれかを考察の対象として，証明することについて評価・改善・発展することが学習として意図し得る。

(3) 課題探究として証明することの学習レベルの設定

以上のことから，課題探究として証明することの学習レベルとして次のものを設定する。

- 基点となる学習レベル：O
- 証明を構想することと，証明を構成することが未分化な学習レベル：P1, P2, D1, D2
- 証明を構想することと，証明を構成することが分化した学習レベル
  ：(P1, D1), (P2, D1) , (P1, D2) , (P2, D2)

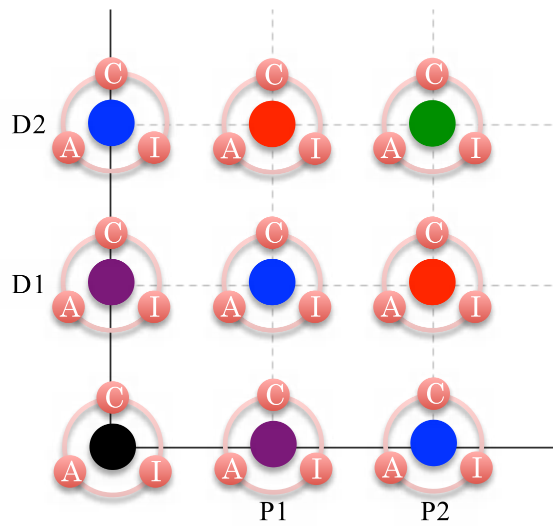

図 1 学習レベル

4. 学習レベルの移行とその過程

(1) 学習レベルの移行過程の必要性

中学校数学における課題探究としての証明学習カリキュラムにおいてスコープにあたるのは，前述の課題探究として証明することの学習レベルである。一方，カリキュラムのシーケンスにあたるのは学習レベルの移行過程である。そのため，学習レベルをどのように移行すべきであるかについて考察することが必要である。

(2) 学習レベルの移行：第Ⅰ期と第Ⅱ期

中学校数学における課題探究としての証明学習カリキュラムにおいて，移行の基点となるのは学習レベル O，即ち，証明を構想することと証明を構成することとが未分化なレベルである。一方，最終的に到達されるべき学習レベルは (P2, D2)である。（図1参照）

学習レベル O から(P2, D2)に至る移行において，中学校数学全体を通じて課題探究として証明することの学習が高まり深まっていくためには，証明を構想することと，証明を構成することが相補的かつ互恵的な関係を保ち続けることが必要である。そのため，証明を構想することと，証明を構成することのレベルを交互に上げていく必要があり，学習レベル O から(P2, D2)に至る移行は，学習レベル(P1, D1)を経ることになる。

このように考えると，学習レベル O から学習レベル(P2,D2)に至るまでに次の二つの移行があることになる。以下では前者を第Ⅰ期，後者を第Ⅱ期と呼ぶことにする。

第Ⅰ期：学習レベル O ➔ (P1, D1)

第Ⅱ期：学習レベル (P1, D1) ➔ (P2, D2)

(3) 学習レベルの移行過程

① 第Ⅰ期移行過程

学習レベルの移行がカリキュラムのシーケンスとして機能するためには，この移行によって課題探究としての証明学習が次第に高まり深まっていくことが明らかにされなくてはならない。その意味では，証明を構想すること／証明を構成することの各レベルは上がることはあっても下がることはなく，結果として学習レベルについても同様である。そのため，第Ⅰ期における移行過程は，学習レベル D1 を経るか／P1 を経るかのいずれかである。

学習レベル D1 を経て (P1,D1)に移行する場合，D1 において仮言三段論法によって前提と結論を演繹的に結びつけること(D1)が学習されている。そのため，証明を構想することの学習において，前提と結論を結びつけるために何を(対象)どのように用いればよいか(方法)について考察する(P1)ことが可能になる。

一方，学習レベル P1 を経て (P1,D1)に移行する場合には，前提と結論を結びつけること(D1)を学習していないため，学習レベル P1 において前提と結論を結びつけるために必要となる対象と方法について考察できない。

② 第Ⅱ期移行過程

第Ⅱ期移行過程に関しても，第Ⅰ期同様，学習レベルが下がることはない。そのため，第Ⅱ期移行過程は，学習レベル(P1, D2)を経るか／(P2,D1)を経るかのいずれかである。

学習レベル(P1, D2)を経て(P2,D2)に移行する場合，(P1, D2)において演繹的推論が普遍例化と仮言三段論法に分化しており，特に普遍例化に関して全称命題から単称命題を導くこと(D2)が学習されている。このように演繹的推論が全称命題に基づいて実行されることにより，証明を構想することにおいて，前提から結論に向けて必要条件を探るために前向きに推論することと，結論から前提に向けて十分条件を探るために後向きに推論することとが区別され，並行して実行可能になる。

一方，学習レベル(P2,D1)を経て(P2,D2)に移行する場合には，(P2,D1)では普遍例化に関して全称命題から単称命題を導くことを学習していないため，(P2,D2)において前述の前向き／後向き推論において必要条件と十分条件を区別できない。そのため，前提と結論を結びつけるために必要となる方法の分化について考察することができない。

5. 結語

本研究の結論は次の通りである。

中学校数学における課題探究としての証明学習カリキュラムを開発するために，課題探究として証明するプロセスの側面（証明を構成すること／証明を構成する／証明することについて評価・改善・発展すること）に基づく5つの学習レベルを，第Ⅰ期／第Ⅱ期に分け段階的に移行するという枠組み(図2)が必要である

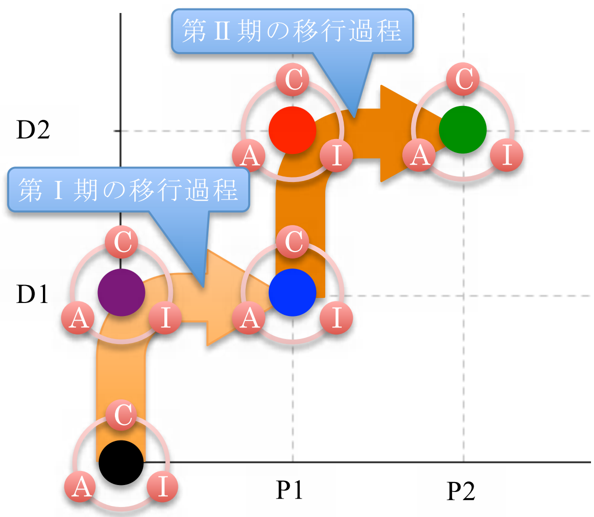

図2 学習レベルの移行過程

本枠組みの独自性は，課題探究として証明学習を捉えなおし，中学校数学全体における証明学習の質的な向上を学習レベルの移行過程として段階的に表している点である。また，本枠組みによって，中学校数学全体における課題探究としての証明学習の高まりや深まりをカリキュラムに設けることが可能になるとともに，各学年の小単元において意図されるべき証明学習を考案することが可能になる。

今後の課題は次の通りである。

- 内容の特殊性(例えば，文字式による説明)に応じ，本枠組みをどのように準用するか。
- 本枠組みにおける学習レベルの移行過程と，中学校の各学年及び小単元・内容をどのように対応させればよいか。
- 本枠組みに基づいて，既存の中学校数学科カリキュラムの小単元・内容はどのように扱われるべきであるか。

参考文献

DeSeCo. (2005). *The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary*. Retrieved from http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*, 42-49.

国立教育政策研究所 (2012). *平成24年度全国学力・学習状況調査【 中学校 】調査結果概要(4. 教科に関する調査の各問題の分析結果と課題)*. Retrieved from http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03chuu-gaiyou/24_chuu_kekkagaiyou-4_suugaku.pdf

Mariotti, M.A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp.173–204). Rotterdam: Sense.

Miyazaki, M., & Fujita, T. (2010). Students' understanding of the structure of proof: Why do students accept a proof with logical circularity? In Y. Shimizu, Y. Sekiguchi, and K. Hino (Eds), *Proceedings of EARCOME5* (pp. 172-179). Tokyo, Japan: EARCOME.

文部科学省 (2008). *中学校学習指導要領解説 数学編*. 教育出版：東京.

辻山洋介 (2012). 学校数学における証明の構想の意義に関する研究. *日本数学教育学会誌 数学教育学論究, 95*, 29-44.

【謝辞】本研究は科学研究費補助金(No. 22330245, 23330255)の支援とともに，次の方々の御協力を得ています(敬称略，五十音順)：岩田耕司(福岡教育大学)，小松孝太郎(信州大学)，佐々祐之(熊本大学)，辻山洋介(筑波大学)，中川裕之(大分大学)，藤田太郎(プリマス大学)，牧野智彦(宇都宮大学)，水谷尚人(文部科学省)，宮川健(上越教育大学)。