第1回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

課題探究として証明することのカリキュラム開発

－我が国の中学校数学科における必要性と，これまでの成果－

宮﨑樹夫　信州大学教育学部
藤田太郎　Graduate School of Education University of Exeter, UK

要　約

我が国の中学校数学科において，課題探究として証明することのカリキュラムを開発するために，はじめに，「課題探究として証明する」とは，ことがらの生成，証明の生成（構想／構成），評価・改善・発展，及びこれらの相互作用であり，この実現を我が国の義務教育において証明学習の中核である中学校数学科のカリキュラムとして目指す必要性があることを示す。次に，カリキュラムの開発枠組みとして学習レベルとその移行を設定し，学習レベルの移行に基づいて意図される活動とその系列を考案する。最後に，今後の課題として，意図される活動とその系列の実現性・実効性／他領域におけるカリキュラム開発等があることを指摘する。

キーワード：課題探究，証明すること，中学校数学，カリキュラム

１．課題探究として証明すること

1.1 教育界での課題探究力への注目

いつの時代においても子ども達が自らの生を天賦として実り豊かにしてゆくことが最優先とされるべきである。特に，知識基盤社会，即ち，新しい知識・情報・技術があらゆる活動の基盤として重要性を増す社会が一層進展する時代であるからこそ，子ども達には，自らにとって解決を要する課題を明確に捉え，その解決のために主体的・生産的・柔軟に探究できるようになることが期待される(DeSeCo (2006)他)。

我が国においても課題探究力を学力の重要な側面として位置づける方向は近年一層明確になってきている。例えば，「様々な課題解決のために，構想を立て実践し評価・改善する力」は，中央教育審議会　初等中等教育分科会　教育課程部会審議経過報告（平成 18 年 2 月 13 日）において，「イ　確かな学力の育成」の「知識・技能を活用し、考え行動する力の重視」のなかで「各教科等を横断してはぐく

む べき能力」として例示されており，全国学力・学習状況調査では主として「活用」に関する問題作成の基本理念として整理されている。

鍵となる学力として自律的な課題探究力を育むにあたり，その先導的な役割を担うのは学校教育であり，そのなかで主要な役割を担っているのが教科教育である。各教科で育まれた力が他教科でいかされるため，教科に固有な内容知の軸とともに，教科横断的な方法知の軸に課題探究力を据え，両軸により拡がる知の枠組みをもとに教科教育の学びを再構築していくことが求められる。

1.2 数学教育界での課題探究力の位置

この知の枠組み自体は数学教育にとって決して目新しいものではない。従来，数学教育では問題解決(Polya, 1957)が学校段階や内容領域を横断する軸として重要視されてきた。そのため，方法知の軸に課題探究力を据えることは，問題解決の視座を改めて価値付けるものといえる。また，子ども自らが解決の必要性を感じる問題として「課題」に考察の焦点をあて，解決の計画に加え高次での解決の仕方（視点や着想）をも「構想」として捉え直すことによって，解決活動の充実が期待できる。

さらに，数学教育では科学哲学における可謬主義(Lakatos, 1978)に基づく研究や実践が根付いており，この学問的意義と教育的価値が議論の余地を残しながらも広く認められている(Hanna, 2007)。こうした“土壌”において，問題解決の振り返りを「評価・改善・発展」と捉え直すことにより，解決での間違いや誤りを更なる課題探究の原動力としたり，解決をもとに新たなことを見出したりするダイナミックな過程が一層重視されるようになると考えられる。

1.3 課題探究として証明すること

我が国の学校数学において証明の学習は1800 年後半から証明の本性によって日本人の考え方を正すものとして時代の要請に応じてその形を変えながらも重要視され続けてきた(清水静海，1994)。また，証明の学習指導の改善はこれまでも弛まず続けられており一定の成果を収めてきた (例えば小関他，1987 等) 。一方，形式的な証明について中学生の学習状況は望ましいものとはなっていない(例えば，国立教育政策研究所(2012))。また，多くの子ども達にとって証明の学習は“通過儀礼”となってしまい，目的や状況に応じ何をどのように証明すればよいのかについて主体的に思考・判断・表現することが疎かにされているのではないかと懸念される。教育界の主翼となるべき数学教育において，証明の学習はあるべき方向に改善されているのだろうか，そして，何をもって真正に改善されているといえるのだろうか。我が国の証明の学習とその指導は，今後進むべき方向を見定める時に直面している。

数学教育における証明研究の基盤である，教育的視座からの公理的方法(Waerden, 1967; 杉山吉茂，1985)，相対的な真理観(Fawcett, 1938)，発見学，可謬主義等に現れているように，数学の営みとしての証明することは，しなやかであり生産的な諸側面を有し，それらが互いに共鳴し合い，知的な“息吹”を形づくっている。即ち，証明することには，その側面として，帰納的／演繹的／類比的に命題を生成すること，そして，生成された命題の証明を構想し構成すること（辻山，2012），さらには，証明の生成で立ち止まることなく，ことがらや証明に対する局所的/大局的反例を生産的に乗り越え，命題や証明とともに知識や概念までも精選する(Lakatos, 1976)ことが含まれている。そして，これらの諸側面が作用し合うことで知恵の“歯車”が噛み合い，「活動としての数学」（Freudenthal, 1971）が進展していく。

我が国の学校数学における証明の学習が，生涯学習社会における子どもの自立にとって真に価値あるものとなるためには，数学の営みとしての証明することに内在する知的な“息吹”を学校数学の限られた領域のみならず全ての領域に，さらには数学教育そして教育全体に吹き込むことが必要である。即ち，証明するこ

とにみられる，ことがらの生成，証明の生成（構想／構成），評価・改善・発展という三側面のみならず，これらの相互作用をも，課題探究として証明すること（図１）として実現していくことが求められる。なぜなら，この実現によって，学校数学における証明の学習は，数学における証明することの本性に基づく真正さを有し得るとともに，「構想を立て，実践し，評価・改善する」という課題探究力を，数学という形而上学的な内容領域を通して育む学習として，学校数学のみならず，学校教育さらには教育全体の“支柱”として価値を有するようになり得るからである。(Miyazaki & Fujita, in press; Chino et al., 2010)

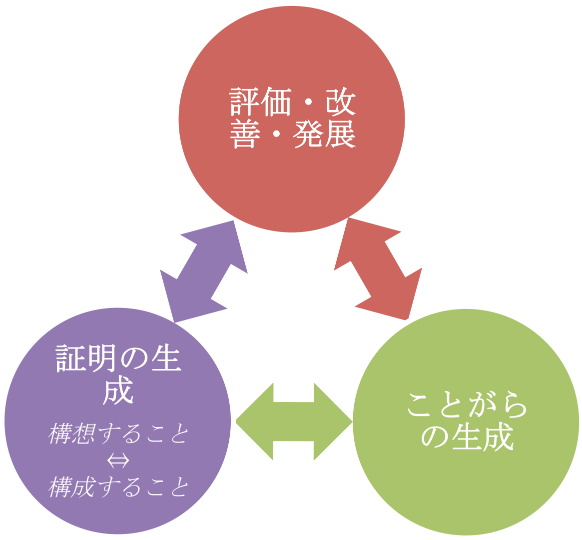


図１　課題探究として証明すること

1．4　中学校数学科におけるカリキュラム開発の必要性

前述のように，証明の学習についてこれまでにも数多くの指導改善が提案・実践されてきた。それにもかかわらず，子どもの学習状況が望ましいものとなっていない。このことからすると，証明のカリキュラムを学習状況の主因と捉えることが可能であると考えられる。そうであるとすれば，義務教育で証明学習の中核となる中学校数学科においてこそ，証明の学習全体を課題の自律的な探究として“編み”直し，その実現が意図されるとともに，遂行可能なカリキュラムを開発する必要がある。

２．目的

本研究の目的は，次の問いに答えることである。

> 我が国の中学校数学科において，課題探究として証明することを実現するために，
> - どのようなカリキュラムの開発が可能か。
> - 開発されたカリキュラムには，どのような効果があるか。

特に，本稿では，前者の問いに関し，次の点について述べる。

Ⅰ：学習レベルの設定

Ⅱ：レベル間の移行を捉える枠組みの構築

Ⅲ：意図される学習とその系列の考案

３．学習レベルの設定

3.1 学習レベルを設定する必要性と方法

証明というプロダクトの質の向上することについては数多くの研究がなされている(例えば，Stylianides & Stylianides (2009))。また，我が国の中学校数学科では，証明の質を向上する工夫が施されている(Jones & Fujita, in press)。一方，証明するというプロセスの質を規準としたカリキュラムが開発されている(例えば，NCTM(2000))が，課題探究として証明することに着目したカリキュラム開発研究は見当たらない。また，我が国の教科書や授業では，諸外国に比べ証明するというプロセスが十分に注目されていない（藤田，2012）。

課題探究として証明することについて学習の高さや深さをカリキュラムに設けるためには，そのスコープとなる学習レベルを設定することが必要である。特に本研究では，課題について自律的に探究する力の育成という視座から，課題探究として証明するプロセスに着目して学習レベルを設定する。

課題探究として証明するプロセスの諸側面のうち，命題を生成することは，証明することの対象をつくりだすこととしてカリキュラム全体を通じて重視されるべきことである。一方，カリキュラムのスコープとして命題を生成することの学習レベルに差異を設定することは難しい。ま

た，評価・改善・発展することは，証明を生成することを考察の対象とし，これは，証明を構想すること及び証明を構成することを主要なプロセスとする。そこで，証明を構想すること及び証明を構成することの二つに優先して着目し，それぞれの学習に関してレベルを設定する。

3.2　証明を構想することの学習に関するレベル

証明を構想するとは，ことがらの前提と結論を演繹的な推論によってどのように結びつけるかについて探る営み（辻山, 2012）である。この営みでは，前提と結論を結びつけるために，どのような着想に基づいて，何を（対象），どのように用いればよいのか（方法）を捉えることが必要である。これが証明を構想することの学習に関する第一レベル(P1)である。

一方，証明を構想する営みでは，前提と結論を結びつけるために，前提からの中間命題の関係網と結論からの関係網が拡充され両者に共通な中間命題の有無が検討される（Heinze, et al, 2008）。これが証明を構想することの学習に関する第二レベル(P2)である。

以上のことから，証明を構想することの学習に関するレベルとして次の二つを設定する。

P1：前提と結論を結びつけるための着想，必要となる対象と方法を捉える。

P2：前提と結論を結びつけるために双方から中間命題の関係網を拡充する。

3.3 証明を構成することの学習に関するレベル

証明を構成するには，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現することが必要である。この連鎖を形づくる主な推論は仮言三段論法であるので，前提と結論の間における命題の演繹的な連鎖のうち，この演繹的な推論を実行することによって仮言三段論法に基づく部分を形づくり表現できるようになることが，証明を構成することの学習として求められる。これが第一レベル(D1)である。

一方，前提と結論の間における命題の演繹的な連鎖には，仮言三段論法に加え，定理等の全称命題に基づく普遍例化が用いられている。そのため，前提と結論の間における命題の演繹的な連鎖を厳密に形づくり表現するために，演繹的な推論を仮言三段論法と普遍例化に分化し(Miyazaki & Fujita, 2010)，特に，普遍例化について根拠となる全称命題と，この命題から導かれる単称命題を明確に区別して表現できるようになることが求められる。これが第二レベル(D2)である。

以上のことから，証明を構成することの学習に関するレベルとして次の二つを設定する。

D1：前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する

D2：演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化して前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する

3.4 学習レベルの設定

証明を構想することの2レベル P1，P2 と，証明を構成することの2レベル D1，D2 の組み合わせることによって，4つの学習レベル(P1, D1), (P2, D1)，(P1, D2)，(P2, D2)が設定され得ることになる。また，証明を構想することと，証明を構成することが未分化であっても，いずれか一方が意図される学習レベルが設定され得る。これらの学習レベルを，証明を構想することに関しては P1，P2，証明を構成することに関しては D1, D2 と表す。

さらに，証明を構想すること／構成することの両者が未分化である学習レベルが設定され得る。このレベルを「O」と表す。なお，本研究では中学校数学科のカリキュラム開発を目的とするため，このレベルにおいて，証明することの対象となる命題の生成という側面は既に分化されているとする。

一方，評価・改善・発展という側面について，これら9つの各レベルにおける証明の生成について評価・改善・発展することが学習として意図され得る。（評価・改善・発展することを C,I,A と表す。）なお，証明の生成に連動する

命題の生成という側面についても評価・改善・発展することが学習として意図され得る。

以上のことから，9つの学習レベルが次のように設定され得る(図2参照)。

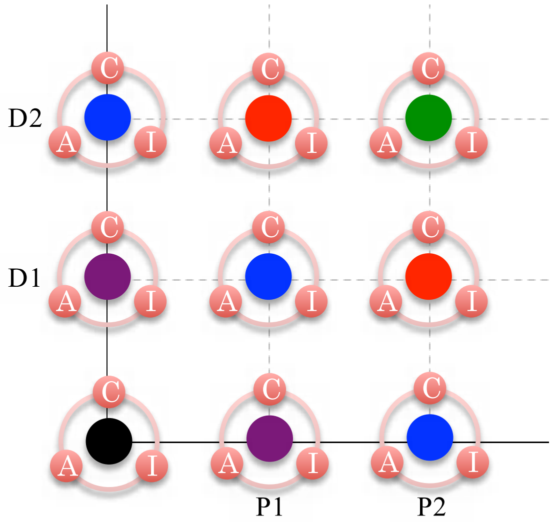


図2　学習レベル

4．学習レベルの移行とその過程

4.1 学習レベルの移行過程の必要性

中学校数学における課題探究として証明することのカリキュラムにおいてスコープにあたるのは，前述の課題探究として証明することの学習レベルである。一方，カリキュラムのシーケンスにあたるのは学習レベルの移行過程である。そのため，学習レベルをどのように移行すべきであるかについて考察することが必要である。そこで，シーケンスのデザインのために仮説的学習軌道(Simon, 1995)を基盤とし，学習レベル(P1, P2)と(D1, D2)に依拠し学習レベルの移行について考察を進める。

4.2 学習レベルの移行：第Ⅰ期と第Ⅱ期

中学校数学における課題探究として証明することのカリキュラムにおいて，移行の基点となるのは学習レベル O，即ち，証明を構想することと構成することが未分化なレベルである。一方，学習目標として，最終的に到達されるべき学習レベルは (P2, D2)である。(図2参照)

学習レベル O から(P2, D2)に至る移行において，中学校数学全体を通じて課題探究として証明することの学習が高まり深まっていくためには，学習過程として，証明を構想することと，証明を構成することが相補的かつ互恵的な関係を保ち続けることが必要である。そのため，証明を構想することと，証明を構成することのレベルを交互に上げていく必要があり，学習レベル O から (P2, D2)に至る移行は，学習レベル(P1, D1)を経ることになる。

このように考えると，学習レベル O から学習レベル(P2,D2)に至るまでに次の二つの移行があることになる。以下では前者を第Ⅰ期，後者を第Ⅱ期と呼ぶことにする。

第Ⅰ期：学習レベル O ⇒ (P1, D1)

第Ⅱ期：学習レベル (P1, D1) ⇒ (P2, D2)

4.3 学習レベルの移行過程

4.3.1 第Ⅰ期移行過程

学習レベルの移行がカリキュラムのシーケンスとして機能するためには，この移行によって課題探究として証明することの学習が次第に高まり深まっていくという仕組みが明らかにされなくてはならない。その意味では，証明を構想すること／証明を構成することの各レベルは上がることはあっても下がることはなく，結果として学習レベルについても同様である。そのため，第Ⅰ期における移行過程は，学習レベル D1 を経るか／P1 を経るかのいずれかである。

学習レベル D1 を経て (P1,D1)に移行する場合，D1 において仮言三段論法によって前提と結論を演繹的に結びつけること(D1)が学習されている。そのため，証明を構想することの学習において，前提と結論を結びつけるために何を(対象)どのように用いればよいか(方法)について考察する(P1)ことが可能になる。

一方，学習レベル P1 を経て (P1,D1)に移行する場合には，前提と結論を結びつけること(D1)を学習していないため，学習レベル P1 において前提と結論を結びつけるために必要となる対象と方法について考察できない。

4.3.2 第Ⅱ期移行過程

第Ⅱ期移行過程に関しても，第Ⅰ期同様，学習レベルが下がることはない。そのため，第

Ⅱ期移行過程は，学習レベル(P1，D2)を経るか／(P2,D1)を経るかのいずれかである。

学習レベル(P1，D2)を経て(P2,D2)に移行する場合，(P1，D2)において演繹的推論が普遍例化と仮言三段論法に分化しており，特に普遍例化に関して全称命題から単称命題を導くこと(D2)が学習されている。このように演繹的推論が全称命題に基づいて実行されることにより，証明を構想することにおいて，前提から結論に向けて必要条件を探るために前向きに推論することと，結論から前提に向けて十分条件を探るために後向きに推論することとが区別され，並行して実行可能になる。

一方，学習レベル(P2,D1)を経て(P2,D2)に移行する場合，(P2,D1)では普遍例化に関して全称命題から単称命題を導くことを学習していないので，(P2,D2)において前述の前向き／後向き推論において必要条件と十分条件を区別できない。そのため，前提と結論を結びつけるために必要となる方法の分化について考察することができないことになる。

なお，領域「数と式」では，演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化すること(D2)が中等学校数学科において必ずしも求められない。そのため，第Ⅱ期の移行過程を(P1，D1)から(P2，D1)として，学習レベルの移行過程を準用する。

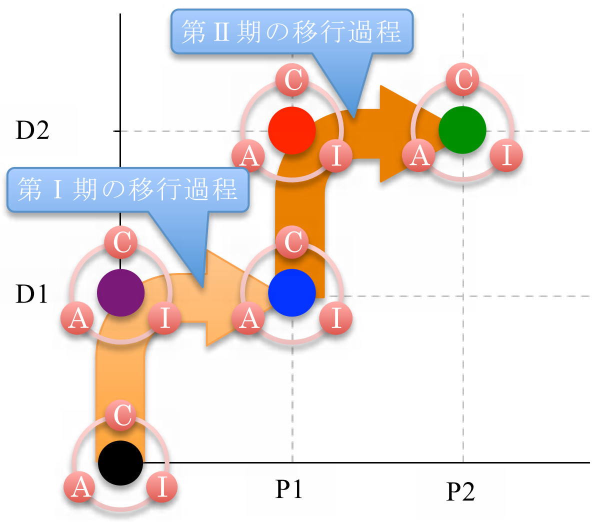


図3　学習レベルの移行過程

5．意図される学習とその系列の考案

5.1 移行過程と各学年の対応

学習レベルの移行過程に基づいて中学校数学の領域「数と式」及び「図形」のカリキュラムを構成するためには，移行過程と各学年を対応付ける必要がある。現状（学習指導要領及び教科書）では，第二学年において，証明を構成することに加え，証明を構想することが求められており(文部科学省，2008)，これら2つの側面からなる学習レベル(P2，D2)への到達が意図されている。また，領域「図形」の教科書をみてみると，証明を構成することについては，第一学年及び第二学年での「証明のしくみ」以前に，演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に区別しないまま，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現すること(D1)が考慮されている。

一方，証明を構想することの重要性については学習指導要領等で言及されてはいるが，構想を立てられるようになるための準備や素地が明確には位置づけられていない。また，各学年の学習内容と，証明の構想／構成との対応が明確にされておらず，学習レベル(P2，D2)に漸進的に移行する段階や道筋が不明確になっている。そのため，(P2，D2)への漸進的な移行が学習指導で配慮されないまま，第二学年で学習レベル O から（P2, D2）までの急激な移行が意図され，それが望ましくない学習状況に現れていると予想される。

そこで，本研究では，学習レベルの移行過程を中学校数学全体で実現することをカリキュラム開発の前提とする。これにより，学習レベル O は中学校数学での“初期状態”となる。その上で，学習レベルの移行過程における二つの移行期 Ⅰ 及びⅡと各学年の対応について，現状にそって，第二学年で学習レベル（P2, D2）の実現を意図するものとすると，次のように対応付けることができる。なお，この場合，第三学年は第二学年によって実現される学習レベル(P2，D2)において，証明を生成することに

ついて評価・改善・発展することを一層充実することになる。

- ■ 第一学年：第Ⅰ期の移行（学習レベルO ⇒ (P1, D1)）
- ■ 第二学年，第三学年：第Ⅱ期の移行（学習レベル (P1, D1) ⇒ (P2, D2)）

仮に，第二学年ではなく，第三学年で学習レベル（P2, D2）の実現が意図されるとすると，第二学年で(P2, D2) の前レベル (P1, D1)，あるいは更に一つ前のレベル(P1, D2)の実現が意図されることになる。こうした場合，現行のままであれば，第二学年における，三角形や四角形の性質を合同に基づいて論理的に考察することは（P1, D2）に留まることになり，解析的／総合的に考えることによって証明を構想すること(P2)は第二学年で意図されなくなる。もちろん，第三学年で合同に基づいて論理的に考察することを扱うようにするなど，内容の系列や配置を大幅に変更することも考えられるが，そうしたアプローチによるカリキュラムは仮に開発できたとしても，授業としての実現性・実効性に乏しく教育現場にとっては受け入れがたいであろう。

そこで，本研究では，内容の系統や配列を現行のものに暫定的に固定して課題探究として証明することの実現を探ることとし，第二学年において，学習目標である学習レベル（P2, D2）の実現を意図する前述の対応付けを採用する。なお，この方法によるカリキュラム開発の過程で，課題探究として証明することの実現に内容の系列や配置の変更が必要になれば，その時点で検討を加える。

5.2「内容−活動対応表」の作成

内容の系統や配列を現行のものに暫定的に固定する方法として，中学校学習指導要領解説数学編の「第2章目標及び内容　第3節各学年の内容」に示された各学年の領域の項目とその順序を基本的に採用する。特に，中学校数学において証明することが主に扱われている領域「数と式」及び「図形」に注目し，当該の学年で意図される学習レベルの移行が，その学年の領域における項目とその系列に応じて達成されるようにする。また，評価・改善・発展することについては，学習レベルの移行が意図されている項目には対応させず，それに続く項目に示された内容や場面の特徴に応じて評価・改善・発展の一部，あるいは全体をサイクリックに実現していく。その上で，各項目で扱われる場面の特徴に応じ，可能となる活動を一般的に記述し，「内容−活動対応表」として整理する。（各学年の詳細については，別項「中学校数学科第〇学年の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想」を参照）。

６．今後の課題

【課題A】内容−活動対応表の実現性・実効性

- ■ 一覧表の各項目について意図された活動は，当該学年の生徒にとって授業などの場において実際に可能であるのか。
- ■ 意図された活動の実現によって，生徒には課題探究として証明する力が育まれるのか。

【課題 B】学習レベルと評価・改善・発展の関係

- ■ 中学校数学全体を通じ，命題を生成すること及び証明を生成することについて評価・改善・発展することの質はどのように変わるべきであるのか。
- ■ ある学習レベルにおいて実現可能となる評価・改善・発展の特徴は何か。
- ■ ある学習レベルにおいて実現可能となる評価・改善・発展が次のレベルへの移行に影響し得るのか。

【課題C】他領域におけるカリキュラム開発

- ■ 日常的／数学的な事象について考察する場面において，課題探究として証明することの特徴は何か。
- ■ 我が国の中学校数学科の領域「関数」及び「資料の活用」において，課題探究として証明することを実現するために，どのようなカリキュラムの開発が可能か。

参考文献

Chino, K., Fujita, T., Komatsu, K., Makino, T., Miyakawa, T., Miyazaki, M., Tsujiyama, Y. (2010). An assessment framework for students' abilities/competencies in proving. *Proceedings of EARCOME5* (Vol. 2, pp.416-423). Tsukuba: Inamoto Printig Co. Ltd.

DeSeCo. (2005). *The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary*. Retrieved from http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf

Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof (NCTM, The Thirteenth Yearbook)*. NY: AMS PRESS

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *ESM*, 3(1), 1, 413-435.

藤田太郎． 2012. 「イギリスの中等教育段階における数学教育: 数学的推論に焦点を当てて」. 日本数学教育学会誌. 94. 3. 21～25.

Hanna, G. (2007), The ongoing value of proof, In Boero, P. (Ed.) *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice*, (pp. 3-16) Rotterdam: Sense publisher.

Heinze, A., Cheng, Y. H., Ufer, S., Lin, F. L., & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM*, *40*(3), 443-453.

Jones, K. & Fujita, T. (in press). Interpretations of National Curricula: the case of geometry in textbooks from England and Japan. *ZDM*, *45*(5).

国立教育政策研究所. 2012)『平成24年度 全国学力・学習状況調査【中学校】調査結果概要(4.教科に関する調査の各問題の分析結果と課題)』. Retrieved from http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03chuu-gaiyou/24_chuu_kekkagaiyou-4_suugaku.pdf

小関熙純. 1987.『*図形の論証指導*』. 明治図書.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1978). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?. In J. Worrall and G. Currie (Eds.), *Lakatos, Imre Philosophical papers: Vol.2. Mathematics, science and epistemology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Miyazaki, M., & Fujita, T. (2010). Students' understanding of the structure of proof: Why do students accept a proof with logical circularity? In Y. Shimizu et al. (Eds), *Proceedings of EARCOME5* (pp. 172-179). Tsukuba: Inamoto Printig Co. Ltd.

Miyazaki, M., & Fujita, T. (in press). Proving as an explorative activity in mathematics education: New trends in Japanese research into proof. In *B. Sriraman* et al. (Eds), *The First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

文部科学省. 2008.『*中学校学習指導要領解説 数学編*』. 教育出版.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. NJ: Princeton University Press.

清水静海. 1994.「論証」.『CRECER 中学校数学科教育実践講座 第6巻 図形と論証』(pp. 204～236). ニチブン.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *JRME, 26*, 114–145.

Stylianides, G.J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *JRME*, *40*(3), 314-352.

杉山吉茂. 1986.『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』. 東洋館.

辻山洋介. 2012.「学校数学における証明の構想の意義に関する研究」. 数学教育学論究. 95. 29-44.

Waerden, B.L. van der. (1967). Klassische und moderne Axiomatik, *Elemente der Mathematik* 22, 1-4.

【謝辞】本研究は，科研費(No. 23330255, 24243077)と，次の方の御協力を承けています(敬称略，五十音順): 青山和裕(愛教大),岩田耕司(福教大),小松孝太郎(信州大),佐々祐之(熊本大),茅野公穂（信州大）,辻山洋介(敬愛大),中川裕之(大分大),永田潤一郎（文教大），牧野智彦(宇都宮大),水谷尚人(文部科学省),宮川健(上教大)。

第1回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

課題探究として証明することのカリキュラム開発

− 中学校数学科第1学年の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想 −

茅野公穂　岩田耕司
信州大学教育学部　福岡教育大学

要　約

本研究は，中学校数学科第1学年の領域「数と式」及び「図形」において，課題探究として証明することの学習を実現するためのカリキュラム開発の方向性を提案することを目的とする。そのために，はじめに，この学習を実現するためのカリキュラムとしての問題点を整理する。次に，学習指導要領解説の項目と，第1学年で意図される学習レベル及びその移行とを対応づけ，問題点への対処可能性を検討する。その上で，「基本的な作図とその活用」及び「空間図形の平面上への表現と読み取り」の授業場面において課題探究として証明するための学習を構想し，問題点への現実的な対応可能性を例示する。最後に，領域「数と式」における学習を構想するための検討課題を示す。

キーワード：課題探究，証明すること，中学校数学，カリキュラム

1. 第1学年のカリキュラム構想の必要性

義務教育段階の学校数学において，証明することは，算数・数学の目的，内容，方法，それぞれにおける核となる活動として重要視され続けている。例えば，平成 20 年 1 月の中央教育審議会答申は，小学校算数科，中・高等学校数学科の改善の基本方針において「数学的な思考力・表現力は，合理的，論理的に考えを進めるとともに，互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものである。」ことを指摘し，数学的な思考力・表現力を育成するための指導内容や活動を具体的に示すことなどを要請している。実際，平成 20 年告示学習指導要領において，小学校算数科では，算数的活動が学年ごとに例示され，具体的な内容に即して考えたことを説明する活動が位置付けられている。また，中学校数学科では，数学的活動が三つの柱で整理され，その一つとして「数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝

え合う活動」が領域を横断する形で位置付けられている。さらに，これら三つの数学的活動が，発達段階や計画的・累積的な学習とその指導を意図して第１学年と第２・３学年とに分けられていることも見逃せない重要な点である。

特に，中学校第１学年，さらに，領域「数と式」及び「図形」における証明することに焦点を置くと，小学校算数科における学習状況に十分配慮するとともに，漸次，論理的に考察し表現する能力を培うことが意図されている。また，中学校第２学年以降への計画的・累積的な学習とその指導も意図されている。

しかし，各種調査結果からすると，領域「数と式」及び「図形」において，課題探究として証明することの学習状況は望ましいとはいえない。例えば，全国学力・学習状況調査において，小学校算数では，理由を記述する問題についての課題が，解答類型とその反応率を基に指摘されている。また，中学校数学科では，証明の構想を立てること，構想に基づいて証明すること，証明を評価・改善すること，ことがらとその証明を発展することなどに対応する問題についての課題が，解答類型とその反応率を基に指摘されている。

上述の学習状況の主要因として，意図されたカリキュラム，学習，学習指導及び評価が考えられる。一方，これまでにも証明の学習実態に基づき学習指導の改善が数多く提案・実施され，その結果が肯定的に評価されてきた。学習状況のさらなる改善のためには，中学校数学科における意図されたカリキュラムに，望ましくない学習状況の原因を求め，カリキュラムの新たな姿を構想する必要がある。そこで，本研究では，中学校数学科の特に第１学年に焦点をあて，課題の自律的な探究としての証明学習の可能性についてカリキュラム開発の視点から検討する。

2. 目的・方法

本研究の目的は次の研究問題に答えることである。

中学校数学科第１学年の領域「数と式」と「図形」において，証明することに関するカリキュラムとしての問題点は，意図される学習レベル・移行により解消され得るか。

この研究問題を解決するために，まず，課題探究として証明することの学習を実現するためのカリキュラムとしての問題点を整理する。平成 20 年告示学習指導要領の項目と，第１学年で意図される学習レベル及びその移行とを対応づけ，問題点への対処可能性を検討する。その上で，「基本的な作図とその活用」及び「空間図形の平面上への表現と読み取り」の授業場面において課題探究として証明するための学習を構想し，問題点への現実的な対応可能性を例示する。最後に，領域「数と式」における学習を構想するための検討課題を示す。

3. カリキュラムとしての問題点

3.1 領域「数と式」の問題点

●根拠に基づいて，数量の関係や法則などを文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりすることの充実

第１学年では「数量の関係や法則などを文字を用いた式に表すことができることを理解し，式を用いて表したり読み取ったりすること」（A(2)エ）が意図されている。小学校算数科では，数量を□や△などを用いて表し，その関係を式に表したり，□，△などに数を当てはめて調べたりする第４学年での学習等をふまえ，第６学年では「数量を表す言葉や□，△などの代わりに，a，x などの文字を用いて式に表したり，文字に数を当てはめて調べたりすること」（D(3)ア）が意図されている。小学校算数科での学習との接続，さらに，文字を用いた式に表したり読みとったりすることについての小学校算数科第６学年での学習をさらに深めるために，第１学年において，

文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりする場面で，表したり読みとったりすることができる根拠や理由を明らかにする活動が考えられる。この活動は，第２学年における文字を用いた式でとらえ説明するための素地となる。そのため，第１学年において，根拠に基づいて，文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりすることを充実する必要がある。

●第1学年における説明の構想や構成の導入

第１学年の学習をさらに深めて，第２学年では「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」（A(1)イ）が意図されている。

第２学年の教科書では，具体的な事象の中にある数量の関係をとらえ説明するために，数量及び数量の関係を文字を用いた式にどう表すか考えたり，その式を目的に応じて変形したり，変形後の式の意味を解釈したりすることをとりあげている。漸次，第２学年でこれらのことが本格的に行えるようにするために，文字を用いた式での説明の構想や構成についての学習の準備を第１学年において導入する必要がある。

3.2 領域「図形」の問題点

●第1学年における証明することの明確化

第１学年では「論理的に考察し表現する能力を培う」（B(1)）ことが意図されている。教科書でも，平面図形の作図の場面や空間図形の構成等の場面において，それまでに学習してきたことがらを根拠に理由を述べる活動を意図した設問等の工夫がみられる。このように，説明すべき対象は明確である一方で，算数科と第１学年とにおける証明することの異同や，第１学年と第２学年との証明することの異同は必ずしも明らかではない。課題探究として証明することの学習が中学校数学科において計画的・累積的になるために，第１学年で意図される，証明することが明確にされる必要がある。

●小学校算数科と第1学年の接続の確立

小学校算数科では，例示された算数的活動にみられるように，計算の仕方や面積の求め方を考え説明する活動など，根拠を明らかにして，それを基に筋道立てて理由を説明する活動の充実が意図されている。算数科や第１学年の教科書においても，何を根拠としたのかを明らかにするように促す工夫や，根拠にしたことの質的な違いに児童の関心が向くようにする配慮がみられる。実際，算数科の教科書では,帰納や類推が,多くの場面で用いられ，演繹もまた用いられている。しかし，帰納と演繹を対比するなどして，それぞれの差異や役割を明らかにすることについては，必ずしも明示的に取り上げられてはいない。

そのため，理由の説明で用いられている推論が演繹的であることを判断したり，帰納，類推，演繹それぞれの役割に応じてこれらを適宜選択して用いたりすることが漸次できるように，算数科と第１学年の計画的・累積的な接続を確立する必要がある。

●第1学年と第2学年の接続の確立

第２学年では，「証明の必要性と意味及びその方法について理解すること」（B(2)イ）が意図されている。第２学年の教科書では，証明のしくみやその構想の立て方について学習するページが準備されている。また，算数科や第１学年の教科書において，問題解決のための方法の見通しを立てるように促す工夫もみられる。一方，あることがらが成り立つことの理由や判断の理由を説明しようとする場面で，その説明の構想を立てることについては，必ずしも明示的ではない。したがって，証明を構想することと，証明を構成することは，未分化の状態にあると考えられる。

そのため，ことがらの生成と証明の生成，さらには証明を構想することと構成することとが，それぞれ漸次分化するように，第１学年と第２学年の計画的・累積的な接続を確立する必要がある。

4. 内容と学習レベル･移行の対応

4.1 領域「数と式」における対応

本研究では，カリキュラムの実現性・実効性を考慮し，内容の系統や配列を現行のものに暫定的に固定することにした(宮﨑・藤田, 2013)。中学校学習指導要領解説数学編には，第１学年の領域「数と式」の項目として次のものが示されている。

a. 正の数と負の数の必要性と意味
b. 正の数と負の数の四則計算と意味
c. 正の数と負の数を用いて表したり処理したりすること
d. 文字を用いることの必要性や意味
e. 文字を用いた式における乗法と除法の表し方を知ること
f. 一次式の加法と減法
g. 式を用いて表したり読み取ったりすること
h. 方程式の必要性と意味及びその解の意味
i. 等式の性質
j. 一元―次方程式を解くこと
k. 一元―次方程式の活用

これらのうち，証明することが考察の方法や対象として位置づけら得るのは g である。そこで，表 1 のように，第２学年での学習レベルの起点(P1, D1)に接続できるようにするために，第１学年での学習レベルの起点 O から D1 への移行，そして D1 での評価・改善・発展，さらに，D1 から(P1, D1)への移行を意図する(学習レベルについては，宮﨑・藤田 (2013)参照)。

表 1 項目と学習レベル･移行の対応:「数と式」

項　目	学習レベル･移行
式を用いて表したり読み取ったりすること	O → D1
	D1 + CIA
	D1 → (P1, D1)

項目と学習レベル・移行との対応付けにより，項目「式を用いて表したり読み取ったりすること」に質・量ともに意図される学習レベル・移行を背負わせることになる。単に，文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりするだけでは, D1 への移行を意図することはできない。式に表したり読みとったりすることができる根拠や理由を明らかにする活動を実現する必要がある。さらに，現状では，第１学年において，ことがらを証明するという場面は設定されていない。

したがって，領域「数と式」に関する前述のカリキュラムとしての問題点″根拠に基づいて，数量の関係や法則などを文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりすることの充実″あるいは″第１学年における説明の構想や構成の導入″については現状としては対処できていない。新たな項目を設定する必要がある。

4.2 領域「図形」における対応

中学校学習指導要領解説数学編には，第１学年の領域「図形」の項目として次のものが示されている。

ｱ. 基本的な作図とその活用
ｲ. 平行移動，対称移動及び回転移動
ｳ. 空間における直線や平面の位置関係
ｴ. 平面図形の運動による空間図形の構成
ｵ. 空間図形の平面上への表現と読み取り
ｶ. 扇形の弧の長さと面積
ｷ. 柱体，錐体及び球の表面積と体積

これらのうち，図形を計量することに関わるｶとｷを除き，証明することが考察の方法や対象として位置づけられ得るのは項目ｱ,ｲ,ｳ,ｴ，ｵである。このうち，「ｳ. 空間における直線や平面の位置関係」は，空間図形を平面上へ表現したり，平面上に表現されたものからもとの空間図形を読みとったりする際に基本となる。そこで，項目ｳは，ｴ並びにｵと，それぞれ関連付けて取り扱うことにする。

次に，項目ｱ，ｲ，ｳ&ｴ，ｳ&ｵの４項目に対応する内容の教科書における配列について検討する。項目ｱ，ｲの配列は教科書によって異なるが，「作図の意味を理解するために，基

本的な作図の方法や結果の正しいことを，図形の移動の見方から確かめることも大切である」(文部科学省, 2008, p. 67)ことから，項目ｲからｱへと配列することにする。これら以外の項目とその順序は，対応する内容の教科書における配列と概ね一致する。そこで，表 2 のように，各項目と学習レベル・移行を対応付ける。

表 2 項目と学習レベル･移行の対応:「図形」

項　目	学習レベル･移行
平行移動，対称移動及び回転移動	O → D1
基本的な作図とその活用	
平面図形の運動による空間図形の構成	D1 + CIA
空間図形の平面上への表現と読み取り	D1 → (P1, D1)

まず，項目「平行移動，対称移動及び回転移動」及び「基本的な作図とその活用」において O から D1 への移行を意図し，続く，項目「平面図形の運動による空間図形の構成」において D1 での評価・改善・発展を意図する。さらに，項目「空間図形の平面上への表現と読み取り」において, D1 から(P1, D1)への移行を意図し, 第 2 学年での(P1, D1)からの学習レベルに接続できるようにする。

これらの項目と学習レベル・移行との対応付けにより，領域「図形」に関する前述のカリキュラムとしての問題点″第 1 学年における証明することの明確化″，″小学校算数科と第 1 学年の接続の確立″，″第 1 学年と第 2 学年の接続の確立″について対処が可能になる。

5. 領域｢図形｣における学習の構想 I

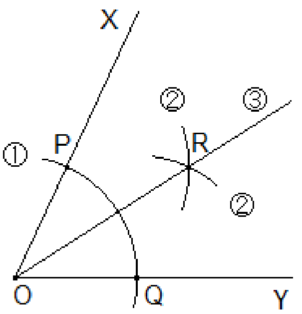
第 1 学年の「基本的な作図とその活用」に関する学習は，約 5 単位時間を予定し構成している。ここでは，そのうち，学習レベル O から D1 への移行，及び「評価・改善すること」を扱う 1 単位時間分の学習を例示する。

5.1 本時のねらい

角の二等分線の作図手順を踏んで作図した線が，確かに角の二等分線となることを，線対称な図形の性質を根拠に説明することができるようにする。

なお，この授業では，課題探究として証明することのうち, 定義に基づき図形を特定し，説明したり，作図方法を対称な図形の性質を根拠に見直し，説明したりすることに重点を置いている。

5.2 課題探究として証明すること(本時)

O	角の二等分線の作図手順をふむと，OR は∠XOY の二等分線になると説明する。  ① 点 O を中心とする円をかき， 直線 OX，OY との交点を， それぞれ P，Q とする。 ② 2 点 P，Q を，それぞれ中心として， 半径 OP の円をかき， その交点の 1 つを R とする。 ③ 直線 OR をひく。
D1	上述の手順を振り返って，四角形 POQR がひし形であることを定義に基づいて特定し，説明する。また，OR は∠XOY の二等分線になることを，ひし形の性質や線対称な図形の性質を根拠に，理由と結論をセットにしながら数学的な表現を用いて説明する。
C	上述の∠XOY の二等分線の作図手順の適用範囲を，説明の根拠を基に考える。

5.3 本時の展開（概要）

①∠XOY の二等分線の作図手順を実行し，∠XOY の二等分線となっていることを実測などで確かめる。

∠XOY の二等分線の作図手順を実行し，∠POR と∠QOR の大きさを測ったり，OR を折り目にして∠XOY を折ったときに∠POR と∠QOR がぴったり重なるか調べたりすることを通して，OR が∠XOY の二等分線となっていることを実感する。

②四角形 POQR を定義に基づき特定し，説明する【構成（D1）】

それぞれの手順からわかることを整理し，四角形 POQR がひし形であることを定義に基づき特定し，説明する。

手順①からわかること: OP＝OQ。 ※相等関係を指摘できればよい。 記号表現にはこだわらない。 手順②からわかること: PR＝OP，QR＝OP。 これらを組み合わせることでわかること: OP＝OQ＝PR＝QR。 辺の長さがみんな等しい四角形なので， 四角形 POQR はひし形である。

③OR は∠XOY の二等分線になることを，ひし形の性質や線対称な図形の性質を根拠に，理由と結論をセットにしながら数学的な表現を用いて説明する【構成（D1）】

∠XOY の二等分線の作図では， 手順①と②で OP＝OQ＝PR＝QR となるから，四角形 POQR は，ひし形である。また，手順③より，OR はひし形の対角線である。 ひし形は，その対角線を軸とする線対称な図形である。線対称な図形では，対応する角の大きさは等しいので，∠POR と∠QOR は等しい。だから，直線 OR は，∠XOY の二等分線になる。

④∠XOY の二等分線の作図手順の適用範囲を，説明の根拠を基に考える【評価（C）】

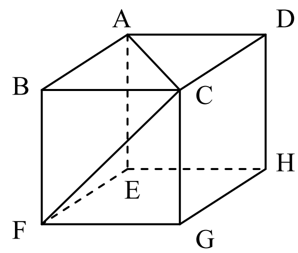
上述の角の二等分線の作図手順を，ひし形が作図できるか否かに着目して振り返ることを通して，∠XOY が平角の大きさになると，ひし形ができないので，平角の二等分線はこの手順では作図できないことなどに気づき，この作図手順の適用範囲をまとめる。

✓ この作図方法は，∠XOY の大きさに依存しないので，（ある特定の角にのみ適用できるのではなく）一般性がある。 ●ただし，∠XOY が平角の大きさになるとひし形ができないので，平角の二等分線はこの方法では作図できない。 ●この方法は，平角より小さい角の二等分線を作図することができる。 ✓ 平角以上の大きさの角の二等分線の作図は残された課題である

6．領域「図形」における学習の構想Ⅱ

第 1 学年の「空間図形の平面上への表現と読み取り」「空間における直線や平面の位置関係」に関する学習は，約 10 単位時間を予定し構成している．ここでは，そのうち，学習レベル D1 から(P1，D1) への移行，及び「評価・改善すること」を扱う 2 単位時間分の学習を例示する。

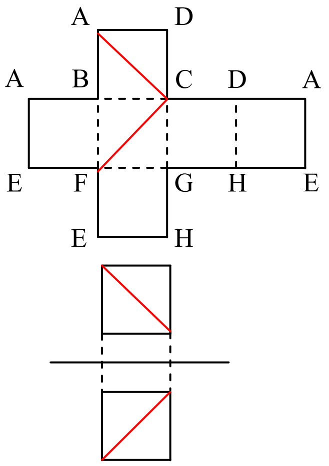
6.1 本時のねらい



与えられた立方体の見取図における 2 つの線分（AC と FC）の長さが等しいことを，展開図や投影図を用いて説明するだけではなく，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形成することで説明できるようにする。

なお，この授業では，課題探究として証明することのうち，展開図や投影図に依存した「証明を評価・改善すること」を通して，より的確な証明を構想することに重点を置いている。

6.2 課題探究として証明すること（本時）

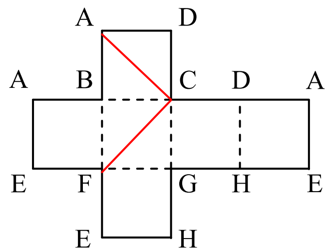
O	与えられた立方体の見取図における２つの線分（AC と FC）の長さが等しいことを，展開図や投影図を用いて説明する。 
CI	上述の証明を振り返って，投影図や展開図に表すと AC と FC の長さが等しいとわかるのは，どちらの線分も合同な正方形の対角線であり，２つの線分がぴったり重なるからであることに気づき，さらに，これを根拠とすれば，図を用いずに言葉だけで説明できることに気づく。
P1,D1	与えられた立方体の見取図における２つの線分（AC と FC）の長さが等しいことを，投影図や展開図に依らない根拠とその表現等を考慮して証明を構想する。
C	「立方体の６つの面は合同な正方形で構成されていること」及び「線分 AC と FC は，その正方形の対角線であること」を根拠にすれば，立方体の見取図での線分の位置関係が変わっても，線分 AC と FC の長さは等しいことを展開図や投影図に依らずに説明することができていることを確認する。

6.3 本時の展開（概要）

①与えられた立方体の見取図における2つの線分（AC と FC）の長さの大小を予想し，予想したことがらが成り立つことを説明する

与えられた立方体の見取図における２つの線分（AC と FC）の長さについて，展開図や投影図等に表し，「立方体において，与えられた２つの線分（AC と FC）の長さは等しい」ことを予想する。教師の発問「線分 AC と FC の長さが等しいことを説明しよう」に対して，２つの線分の長さが等しくなることを，説明する。

②展開図や投影図に依存した説明を評価し，予想したことがらが成り立つことを証明するための構想を立てる【構想（P1）】

> 立方体の展開図に表すと線分 AC と FC の長さは等しい。
>
> 
>

展開図や投影図に表すことで結果の見通しが立ったことを確認するとともに，見取図では線分の長さや角度などが正確に表されない場合があること，目的に応じて図を使い分ける必要があることを確認する。

> ✓ 見取図を用いると，線分や角の大きさを正しく表せないことがある。
> ✓ 見取図を用いると，もとの空間図形の辺や面のつながりをとらえやすい。
> ✓ 展開図を用いると，もとの空間図形を構成する面の形を正しく表すことができる。

線分 AC と FC の長さが等しいことを，立方体の特徴（性質）を根拠に説明することはできないかを問う教師の発問を契機に，投影図や展開図では立方体の面が合同な正方形であることが正確に表現されていること，線分 AC

とFCはこれらの正方形の対角線であること，そのため，２つの線分がぴったり重なることがはっきりすることに気づき，さらに，これを根拠とすれば，図を用いずに言葉だけで説明できることに気づく。

③構想に基づいて，予想したことがらが成り立つことの証明を構成する【構成(D1)】

与えられた立方体の見取図における 2 つの線分 AC と FC は，どちらも合同な正方形の対角線なので，長さが等しい。

④展開図や投影図に依存した証明と立方体の特徴を根拠とした証明を比較することを通して，それぞれの証明の特徴をまとめる【評価(C)】

２つの証明は，どんなときに役立つのかを問う教師の発問を契機に，与えられた立方体の見取図における２つの線分の長さの大小を比較する文脈におけるそれぞれの証明の役割をまとめる。

- ✓ 展開図や投影図に表して比較する方法は，２つの線分の長さが等しいことを見いだしたり，そのことを確かめたりするときに役立つ。
- ✓ 立方体の特徴を根拠に比較する方法は，展開図や投影図等がなくても２つの線分の長さが等しいことを説明することができる。

7. 結論及び今後の課題と展望

本研究の結論は次の通りである。

学習指導要領解説の項目と，意図される学習レベル・移行とを対応づけることにより，第１学年の領域「図形」において，問題点″第１学年における証明することの明確化″，″小学校算数科と第１学年の接続の確立″，″第１学年と第２学年の接続の確立″について対処が可能になる。また，学習レベル及びその移行を実現する学習を構想することにより現実的な対応の可能性があることを例示した。

一方，第１学年の領域「数と式」においては，現在第１学年の教科書でとりあげられている内容のままでは，″根拠に基づいて，数量の関係や法則などを文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりすることの充実″あるいは″第１学年における説明の構想や構成の導入″に対処できていない。

今後の課題は次の通りである。

- 第１学年の領域「数と式」における学習レベル・移行を実現するための学習をどのように構想するか。
- 各項目に対応付けられた学習レベル・移行は授業での学習として実現可能か。

参考文献

国立教育政策研究所. 2012.『平成 24 年度　全国学力･学習状況調査【小学校】調査結果概要(4. 教科に関する調査の各問題の分析結果と課題)』. Retrieved from http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03shou_houkokusho.htm.

国立教育政策研究所. 2012.『平成 24 年度　全国学力･学習状況調査【中学校】調査結果概要(4. 教科に関する調査の各問題の分析結果と課題)』. Retrieved from http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03chuu-gaiyou/24_chuu_kekkagaiyou-4_suugaku.pdf.

宮﨑樹夫，藤田太郎. 2013. 「課題探究として証明することのカリキュラム開発: 我が国の中学校数学科における必要性と，これまでの成果」. 日本数学教育学会第１回春期研究大会論文集.

文部科学省. 2008.『小学校学習指導要領解説算数編』. 東洋館出版社.

文部科学省. 2008.『中学校学習指導要領解説数学編』. 教育出版.

岡崎正和，岩崎秀樹. 2003.「算数から数学への移行教材としての作図: 経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践」. 日本数学教育学会誌 数学教育学論究. 80. 3-27.

【謝辞】本研究は科学研究費補助金(No. 23330255, 24243077)の支援を承けています。

第1回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

課題探究として証明することのカリキュラム開発

－ 中学校第二学年数学科の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想 －

宮﨑樹夫　　佐々祐之　　辻山洋介
信州大学教育学部　熊本大学教育学部　敬愛大学国際学部

要　約
本研究は，中学校数学科第二学年の領域「数と式」及び「図形」において，課題探究として証明することの学習を実現するためのカリキュラム開発の方向性を提案することを目的とする。そのために，はじめに，課題探究として証明することの学習を実現するためのカリキュラム上の問題点を整理する。次に，これらの問題点を解消するために，学習指導要領解説の項目と，第二学年で意図される学習レベル及びその移行とを対応づけ，これによって諸課題への対処可能性を検討する。その上で，「文字を用いた式でとらえ説明できること」及び「三角形や平行四辺形の性質」の授業場面において課題探究として証明するための学習を構想し，諸課題への現実的な対応可能性を例示する。最後に，第二学年のカリキュラムについて今後の課題を指摘する。
キーワード：課題探究，証明すること，中学校数学，カリキュラム

１．新たなカリキュラム構想の必要性

我が国では，義務教育の学校数学において証明することは核となる活動として重視され続け，今日に至っている。実際，平成20年改訂学習指導要領では，小学校算数科の目標に関し「考えたことなどを表現したり，説明したりする活動」が算数的活動に含まれることが明記され，学年ごとに説明する活動が例示されている。また，中学校数学科においては，「数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動」が数学的活動とされ，領域を横断して実現されることが意図されている。

特に，中学校第二学年では領域「数と式」及び「図形」において数や図形の性質・関係について本格的に証明することが意図されており，これを考察の手段として今後の学習が進展していく。この意味で，第二学年の領域「数と式」及び「図形」における証明の学習は極めて重要である。

一方，中学校数学科における証明の学習状況が望ましくないことは各種調査研究により明らかにされている。特に全国学力・学習状況調査では，課題探究として証明することの諸側面（証明を構想すること，構想に基づいて証明すること，ことがらや証明などを評価・改善・発展すること）について科学的なエビデンスとして調査結果が得られている（例えば，国立教育政策研究所，2012）。この結果からすると，領域「数と式」及び「図形」において，課題探究として証明することの諸側面の学習状況は望ましくないことは明らかである。

こうした学習状況の主因として，カリキュラム，学習，学習指導及び評価が考えられる。従来から証明の学習の実態に基づき学習指導の改善が数多く提案・実施され，その結果が評価されてきたことからすると，中学校数学科のカリキュラムに，望ましくない学習状況の原因を求め，カリキュラムの新たな姿を構想する必要があるといえる。そこで，本研究では，中学校数学科の特に第二学年に焦点をあて，課題探究として証明することの学習の可能性についてカリキュラム開発の視点から検討する。

２．目的・方法

本研究の目的は次の問いに答えることである。

中学校数学科第二学年の領域「数と式」と「図形」において，証明することに関するカリキュラムとしての問題点は，意図される学習レベル･移行により解消され得るか。

この問いに答えるために，平成 20 年改訂学習指導要領と教科書(平成 23 年度版)の関係，課題探究として証明することに着目しカリキュラムとしての問題点を整理する。そして，課題探究として証明することとして意図された学習レベル及びその移行（宮﨑＆藤田，2013）による，整理された問題点への対処可能性について検討するとともに，学習レベル及びその移行を実現する学習を構想することにより現実的な対応の可能性があることを例示する。

３．カリキュラムとしての問題点

3.1 領域「数と式」の問題点

●第一学年における，根拠に基づいて式をよむことの充実

中学校学習指導要領「第３節数学」の第一学年では「数量の関係や法則などを文字を用いた式に表すことができることを理解し，式を用いて表したり読み取ったりすること」（A(2)エ）が意図されている。特に「式を読み取る」ことについて教科書をみてみると，第一学年において式（例えば $2(a+b)$）から意味(長方形の周りの長さ)をよみとることが扱われている。この学習において式の意味をよみとることに加え，その根拠や理由を明らかにすることが，第二学年で，ことがらの全称性を示すために，意図的に変形し得られた文字式について解釈することにつながる。そのため，第一学年において根拠に基づいて式をよむことを充実する必要がある。

●第三学年での学習との差異の明確化

第三学年では「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明すること」(A(2)ウ）とされ，第二学年では「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」(A(1)イ）とされ，意図されている学習の差異が明確にされている。一方，教科書では，意図されている証明の学習に明確な差異を両学年の間に見出すのは困難である。

●課題探究として証明することの充実

教科書のなかには，第二学年及び第三学年において，ことがらを帰納的に予想し文字式を用いて証明するという場面の展開が設けられているものがある。また，ことがら「奇数の和は偶数である」等について文字の用い方が誤っている証明を修正する場面が設けられているものもある。これらは，

課題探究として証明することのうち，ことがらの生成と証明の生成の相互作用，評価・改善することに該当する。一方，証明を構想すること，ことがら及び証明の生成について評価・発展することに該当する場面や展開が明確に設けられているのを見出すことはできない。

3.2 領域「図形」の問題点

●第一学年で意図される証明の明確化

第一学年では「論理的に考察し表現する能力を培う」(B(1))ことが，作図，移動，空間における直線や平面の位置関係，空間図形の構成・表現などにおいて意図されており，第二学年における証明の学習の素地形成となる。一方，図形の性質について証明する場面が設けられている教科書もあるが，第二学年における証明の学習との接続のために，第一学年においてどの程度の証明が意図されるのかは明らかではない。中学校数学科における証明の学習が累積的になるためには，第一学年で意図される証明の“姿”が明確にされる必要がある。

●第二学年における学習の漸進性の設定

第二学年では，「証明の必要性と意味及びその方法について理解すること」(B(2)イ)が意図されており，教科書には，第二学年内において，証明することについて学習する部分が用意されている。この部分では普遍特化及び仮言三段論法に基づく証明が導入される。一方，第二学年では，この部分までに「平行線と角の性質」/「多角形の角についての性質」/「合同の意味と三角形の合同条件」が扱われている。これらの部分では，証明することについて学習する部分の準備として考察及び表現の深まりや高まりについて一定の配慮がなされており，学習指導でも証明の根拠の使用を意識付けるなど様々な工夫が見受けられる。一方，第二学年の領域「図形」全体を通して，証明することについて学習する部分に向け，証明することがどのように深まり高まっていくのかが明らかではない。そのため，証明することについて学習する部分までに証明することの質をどのように上げていくか，即ち学習の漸進性を設定する必要がある。

●課題探究として証明することの充実

第二学年では，証明に基づく発展が意図されている：「三角形の合同条件などを基にして三角形や平行四辺形の基本的な性質を論理的に確かめたり，図形の性質の証明を読んで新たな性質を見いだしたりすること」(B(2)ウ)。教科書のなかには，ある証明を基に新たな性質を演繹的に見出す場面が設定されているものがある。また，作図などを基に図形の性質を予想し証明するという展開になっているものがある。これらは，課題探究として証明することのうち，発展すること，ことがらの生成と証明の生成の相互作用に該当する。一方，証明を構想すること，ことがら及び証明の生成について評価・改善することに該当する場面が全ての教科書に設けられているわけではない。そのため，証明について学習する際，証明を構想し構成することついて扱うとともに，三角形や四角形の性質について証明することを基に考察していく際，ことがら及び証明の生成について評価・改善することを扱う必要がある。

４．内容と学習レベル・移行の対応

4.1 領域「数と式」における対応

本研究では，カリキュラムの実現性・実効性を考慮し，内容の系統や配列を現行のものに暫定的に固定することにした(宮﨑・藤田，2013)。中学校学習指導要領解説数学編において第二学年の領域「数と式」の項目として示されているもののうち，証明することが考察の対象や方法として位置づけられているのは次の二つである。

c. 文字を用いた式でとらえ説明できること
d. 目的に応じた式の変形

このうち，項目dは数の性質などについて文字式で証明するために手段として必要となる。そこで，これらの項目を一つとし，第一学年で到達される学習レベル(P1, D1)から(P2, D1)への移行，続いて(P2, D1)での評価・改善・発展(CIA)が意図されるようにする（表1：記号については，宮崎・藤田（2013）を参照）。

項目	学習レベル・移行
文字を用いた式でとらえ説明できること	(P1, D1) → (P2, D1)
目的に応じた式の変形	(P2, D1) + CIA

表1　項目と学習レベル・移行の対応:「数と式」

項目と学習レベル・移行との対応により，領域「数と式」に関する前述の「カリキュラムとしての課題」のうち，“課題探究として証明することの充実”については一定の対処が可能になる。一方，課題“第三学年での学習との差異の明確化”については対処できていない。

4.2 領域「図形」における対応

中学校学習指導要領解説数学編での第二学年領域「図形」の項目は次の通りである。

ｱ. 平行線と角の性質
ｲ. 多角形の角についての性質
ｳ. 合同の意味と三角形の合同条件
ｴ. 数学的な推論
ｵ. 証明の必要性と意味及び方法
ｶ. 三角形や平行四辺形の性質
ｷ. 証明を読んで新たな性質を見いだすこと

このうち，エとキ以外の5項目とその順序は教科書における内容及びその系列に概ね該当している。そこで，表2にあるように，各項目と学習レベル・移行を対応付ける。

項目	学習レベル・移行
平行線と角の性質	(P1, D1) → (P1, D2)
多角形の角についての性質	(P1, D2) + CIA
合同の意味と三角形の合同条件	
証明の必要性と意味及び方法	(P1, D2) → (P2, D2)
三角形や平行四辺形の性質	(P2, D2) + CIA

表2　項目と学習レベル・移行の対応:「図形」

先ず，項目「平行線と角の性質」において(P1, D1)から(P1, D2)への移行が意図され，続く二つの項目「多角形の角についての性質」及び「合同の意味と三角形の合同条件」において (P1, D2)での評価・改善・発展が意図されるようにする。その上で，項目「証明の必要性と意味及び方法」において (P2, D2)が意図されることから，この項目で (P1, D2)からの移行が意図され，続く項目「三角形や平行四辺形の性質」において(P2, D2)での評価・改善・発展が意図されるようにする。

項目と学習レベル・移行との対応により，カリキュラムとしての領域「図形」の問題点(3.2)，即ち“第一学年で意図される証明の明確化”，“第二学年における漸進性の設定”，“課題探究として証明することの充実”に一定の対処が可能になる。

5. 領域「数と式」における学習の構想

第2学年の「文字を用いた式でとらえ説明できること」，「目的に応じた式の変形」に関する学習は，通常4ないし5単位時間をもって構成される。ここでは，学習レベル(P1, D1)から(P2, D1)への移行，及び「ことがらの生成と証明・説明の生成の相互作用」「評価・改善すること」に関する2単位時間分の学習を例示する。

5.1 本時のねらい

連続する3つの自然数の和について成り立つ性質を予想し，それが成り立つ理由を，文字式で説明する。その際，式の意図的な変形の仕方について，結論を示すためによりよく表現したり，文字の用い方を工夫したりするなどして証明することを評価・改善していく。また，連続する5つの自然数の和について発展的に考察し，連続する自然数の和に共通する性質を統合的に見出す。

なお，この授業では，課題探究として証明することのうち，文字を用いた説明を振り返る活動を通して，「証明の構想」のための視点を見出すことに力点を置く。

5.2 課題探究として証明すること（本時）

P1,D1	連続する3つの自然数の和について予想したことがらを証明するために，連続する3つの自然数を文字で表し，その和を計算する。
CI	証明を振り返って，3の倍数であることを示すために,式を3×(自然数)の形に意図的に変形する必要があることに気づき，証明を修正する。
CIA	連続する3つの自然数をn-1, n, n+1と表しておくと,式変形の結果が3nとなり，3の倍数であることが示しやすくなることに気づく。また，得られた式から，単に3の倍数であるだけではなく連続する3つの自然数の中央の数の3倍であることを見出し，新たなことがらをつくり出す。
P2,D1	連続する3つの自然数の場合を参考にして，連続する5つの自然数の和について成り立つことがらを予想し，文字の用い方，式の表し方等を考慮して証明を構想する。
CA	連続する3つの自然数の和や連続する5つの自然数の和について成り立つ性質を統合し，連続する自然数の和に共通して成り立つ性質を見出そうとする。

5.3 本時の展開（概要）

①連続する3つの自然数の和について成り立つ性質を予想する

連続する3つの自然数の和について，いくつかの具体例から帰納的に推論し，「連続する3つの自然数の和は，3の倍数になる。」という予想を立てる。

②予想した性質が成り立つことを証明するための構想を立てる【構想 P1】

「連続する3つの自然数は，一般にどのように表されるだろうか。」という教師の問いかけをもとに，生徒は，「連続する3つの自然数を文字で表し，それらの和を計算する」という証明の構想を立てる。

③予想が成り立つことを証明し評価・改善する【構成 D1＋評価・改善 CI】

連続する3つの自然数について，最も小さな数を文字nとして「n，n+1，n+2」と表して，和を計算し，予想を説明する。

> 連続する3つの自然数のうち，最も小さい数をnとすると，連続した3つの自然数は，n，n+1，n+2と表される。
> したがって連続する3つの自然数の和は，
> $n+(n+1)+(n+2)=3n+3$

3n+3という式の意味を問う教師の発問から，生徒は，3の倍数であることを示すには3×（自然数）という形に表す必要があることを見出し，3n+3を3(n+1)に変形し直す。また，結論を示すために意図的に式を変形したことを基に，3(n+1)の解釈に関する記述の仕方について理解する。

> n+1は自然数だから，3(n+1)は3の倍数である。
> したがって，連続する自然数の和は，3の倍数である。

④証明の構想及び構成を修正する【評価・改善・発展（CIA）】

和が3の倍数であることをより簡潔に式で示せないかという教師の発問から，3つの連続する自然数をn-1, n, n+1と表わすと，式変形による式が3nとなり，和が3倍であることをより簡潔に示せることに気づく。

> 連続する3つの自然数のうち，真ん中の数をnとすると，連続した3つの自然数は，n-1，n，n+1と表される。
> したがって連続する3つの自然数の和は，
> $(n-1)+n+(n+1)=3n$
> nは自然数だから，3nは3の倍数である。
> したがって，連続する3つの自然数の和は，3の倍数である。

生徒は，③での証明の3(n+1)や④での証明の3nに着目し，(n+1)やnが連続する3つの自然数の中央の数なので，和が中央の数の3倍になっていることに気づき，新しいことがら「連続する3つの自然数の和は，中央の数の3倍である」をつくり出す。

⑤関連の発展課題に取り組む【評価・発展（P2,D1＋CIA）】

連続した5つの自然数の和が中央の数の5倍になっていることを予想し,連続する3つの自然数の和について証明したことを参考に，予想の結論からも逆向きに考え，証明の構想を立てる。

・連続する 5 つの自然数を，最も小さい数を n として表すと，n，n+1，n+2，n+3，n+4 と表される。 ・和が中央の数の 5 倍であることを示すためには，和の計算結果を，5×(n+2)という形に表すことができればよい。

生徒は,連続する5つの自然数をn,n+1，n+2，n+3，n+4 と表し，証明を構成する。

連続する 5 つの自然数のうち最も小さい数を n とすると，連続した 5 つの自然数は，n，n+1，n+2，n+3，n+4 と表される。 したがって連続する5つの自然数の和は， n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4) ＝5n+10=5(n+2) n+2は連続する5つの自然数の中央の数だから，5(n+2)は中央の数の 5 倍である。 したがって，連続する 5 つの自然数の和は，中央の数の 5 倍である。

この証明について，「和が中央の数の 5 倍であることを簡潔に示すために，どの数を文字 n で表せばよいか」等の発問により，生徒は，5(n+2)に着目し，中央の数 n+2 を n として連続する 5 つの自然数を表し直すと証明が簡潔になることに気づき，文字の置き方を修正する。その際，最も小さい数 n-2 が 1 以上であることに着目し n が 3 以上の自然数に限られることを見出すとともに，④での証明についても，最も小さい数 n-1 が 1 以上であることから n が 2 以上の自然数に限られることを見出し書き加える。

連続する 5 つの自然数のうち，中央の数を n とすると，連続した 5 つの自然数は，n-2, n-1, n, n+1, n+2 と表される。（n は 3 以上の自然数） したがって連続する 5 つの自然数の和は， (n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)＝5n nは連続する5つの自然数のうちの中央の数だから，5n は中央の数の 5 倍である。 したがって，連続する 5 つの自然数の和は，中央の数の 5 倍である。

連続する 3 つの自然数の和の場合との類似点を考察することを通して，次の課題についてレポートを作成する。

■ 連続する 7 つの自然数や，9 つの自然数について何がいえそうか。 ■ 連続する自然数が偶数個の場合は，どのようなことがいえそうか。

６．領域「図形」」における学習の構想

「三角形や平行四辺形の性質」では，学習レベル(P2,D2)において評価・改善・発展できるようになることが意図される。評価に関する活動には，構成した証明を用いて全称命題の真であることを確立できるかどうか／異なる記号や図を用いた複数の証明を統合できるかどうかを検討する活動がある。また，評価・改善や評価・発展に関する活動には，証明やその方針の立て方を工夫する活動や，証明やその方針に基づいて新たなことがらを生成する活動がある。

以下では，特に評価・改善と評価・発展に関する活動を扱う授業の概要を例示する。

6.1 本時のねらい

平行四辺形において向かい合う辺がそれぞれ等しいことを証明し，その性質が成立することを根拠に基づいて理解する。また，その証明に基づいて，２組の対角がそれぞれ等しいことを見出す。

なお，この授業では，解析的な方法の用い方を見返し，証明とその構想を修正すること（P2,D2＋CI），並びに，修正した証明とその方針に基づいて新たなことがらを見出し，その証明の構想を行うこと（P2,D2＋CA）が意図されている。

6.2 課題探究として証明すること（本時）

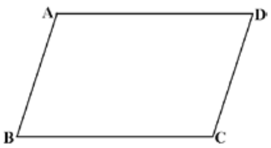
P2,D2	・「四角形 ABCD において, AB // DC, AD // BC ならば，AB＝DC である」（ことがらアとする）の証明の構想を，対角線 AC（あるいは BD）をひくことによって立てる。 ・構想に基づいて，根拠を明らかにして，証明の構成を行う。
CI	・証明において，「なぜ対角線 AC をひく必要があったのか」を見返し，「二辺が等しいことを示すためには, それらを辺にもつ合同になりそうな三角形をみつければよいが, ない場合にはつくればよい」という証明の構想の立て方を意識化する。 ・構想の立て方をわかりやすく伝えるために，証明に，「AB＝DC を

	示すためには，AB と DC を辺にもつ合同な三角形をつくればよい。そのために，対角線 AC をひき，△ABC と△CDA をつくる」と書き加える。
CA	・修正した証明を見返し，△ABC≡△CDA を用いて，平行四辺形の性質を他にも示せないかを考える。そして，そのような性質として AD＝BC に着目することにより，「向かい合う辺はそれぞれ等しい」を見出す。また，∠A＝∠C や∠B＝∠D に着目することにより，「向かい合う角はそれぞれ等しい」を見出す。 ・ことがらアの証明を一部修正することにより，見出した性質を証明できそうであることを確認する。

6.3 本時の展開（概要）

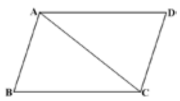
①課題の提示

平行四辺形 ABCD において，AB // DC，AD // BC ならば，AB＝DC であることを証明しよう。



②証明の構想と構成　【P2,D2】

生徒は既に学習レベル(P2,D2)に達しているため，ことがらアの証明の構想と構成は，生徒の自力解決を中心として進める。生徒は，合同な図形の性質と三角形の合同によって AB＝DC を示すために，対角線 AC（あるいは BD）をひけばよいことを見出したり，前提 AB // DC，AD // BC から錯角が等しいことを見出したりする。その上で，下のように証明を構成する。



△ABC と△CDA において，平行線の錯角は等しいので，
AB // DC から，∠BAC＝∠DCA…①
AD // BC から，∠BCA＝∠DAC…②
また，AC は共通であるので，
AC＝CA…③
①，②，③から，一組の辺とその両端の角が等しいので，
△ABC≡△CDA
合同な三角形において対応する辺は等しいので，AB＝CD が成立する。

生徒が頓挫してしまう場合には，教師は，対角線 AC（あるいは BD）をひいている生徒に対角線のみ板書させる。この時点では発表者に構想の立て方について説明を求めず，他の生徒の解決を待つ。最後に，構成した証明を生徒が発表する。

③証明の構想の評価・改善　【P2＋CI】

教師は，②で得られた証明の構想がどのように立てられたのかを検討するように促す。その際，②で証明の構想や構成を首尾よくできた生徒から「これじゃ，どうして，この三角形の合同に気づいたのかわからないよね」（宮﨑，2007，p.653）や，頓挫していた生徒から「なぜ対角線をひこうと思えたのかがわからない」などの発言を取り上げ，「なぜ対角線 AC が入用か」（清水，1994，p.229）に着目できるようにする。

生徒は，「二辺が等しいことを示すため」や「合同な三角形において対応する辺は等しいから」などの断片的な発言をすると予想される。こうした発言に基づいて，教師の問い「対角線をひくことによって何を示せたのか」を通じて，生徒は，既習であった「二辺が等しいことを示すためには，それらを辺にもつ合同な三角形をみつければよい」という証明の構想の立て方に加え，「合同な三角形がみつからない場合，そのような三角形をつくればよい」という新たな立て方を見出す。

④証明の構成の評価・改善【D2＋CI】

生徒は，③で見出した証明の構想の立て方を証明に書き加える。例えば，図２の証明の冒頭に，「AB＝DC を示すためには，AB と DC を辺にもつ合同な三角形をつくればよい。そのために，対角線 AC をひき，△ABC と△CDA をつくる」と書き加える。このように，証明がよりわかりやすくなるための書き方を工夫していく。

⑤証明を見返し新たなことがらを予想する　【P2,D2＋CA】

生徒は，①～④の活動を整理し，おおまかに言えば，ことがらアの証明が，「AB と DC を辺にもつ合同な△ABC と△CDA をつくる」ことによって得られたことを確認する。その上で，教師は，「△ABC≡△CDA を用いて，平行四辺形の他の性質を証明できないか」を問う。

この問いに対し，生徒が BC＝DA を見出すとする。このとき，結論だけでなく仮定とともに述べるように教師が促すことにより，生徒は「四角形 ABCD において，AB // DC，AD // BC ならば，BC＝DA」（ことがらイ）と述べ直すと思われる。このことにより，ことがらアとイは同じ仮定をもつことを確認した上で，ことがらアとイを合わせ，「平行四辺形において，向かい合う辺はそれぞれ等しい」と全称命題として述べることが可能になる。

さらに，前述の問いに対し，∠B＝∠D や，生徒によっては∠A＝∠C を見出すことも可能である。これら見出したことがらをどのように証明できるのかについて，②～④の活動をいかして考えるように促すことが考えられる。例えば，∠B＝∠D の証明の構想に関しては，④と同様に，「∠B＝∠D を示すためには（中略）△ABC と△CDA をつくる」ことが必要である。

最後に，これらの性質の証明を構成することや，証明の構想の立て方を整理すること，平行四辺形の他の性質を見出すこと，これらの性質が台形でも成立するかどうかを検討する等のレポート課題に取り組む。

7．結論及び今後の課題

本研究の結論は次の通りである。

学習指導要領解説の項目と，意図される学習レベル・移行とを対応づけることにより，第二学年の領域「数と式」において，問題点“課題探究として証明することの充実”については一定の対処が可能になるが，問題点“第三学年での学習との差異の明確化”については対処できない。一方，第二学年の領域「図形」において，問題点“第一学年で求められる説明の明確化”，“第二学年における漸進性の確立”，“課題探究として証明することの充実”について一定の対処が可能になる。また，学習レベル及びその移行を実現する学習を構想することにより現実的な対応可能性を例示した。

今後の課題は次の通りである。

- 第二学年の領域「数と式」において，第三学年での学習との差異をどのようにして明確にするか。
- 領域「図形」における，評価・改善・発展することについて，第二学年と第三学年の差異は何か。
- 各項目に対応付けられた学習レベル・移行は授業での学習として実現可能か。

参考文献

国立教育政策研究所. 2012.『平成24年度全国学力・学習状況調査【 中学校 】調査結果概要(4. 教科に関する調査の各問題の分析結果と課題)』. Retrieved from http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03chuu-gaiyou/24_chuu_kekkagaiyou-4_suugaku.pdf

宮﨑樹夫, 藤田太郎. 2013.「課題探究として証明することのカリキュラム開発：我が国の中学校数学科における必要性と, これまでの成果」. 日本数学教育学会第1回春期研究大会論文集.

宮﨑樹夫. 2007.「学校数学における証明に関する研究：証明の学習の諸相に着目して」. 日本数学教育学会 第 40 回数学教育論文発表会論文集. 649～654.

文部科学省. 2008.『中学校学習指導要領解説 数学編』. 教育出版.

清水静海. 1994.「論証」.『CRECER 中学校数学科教育実践講座 第6巻 図形と論証』(pp. 204～236). ニチブン.

【謝辞】本研究は科研費 (No. 23330255, 24243077, 24830017, 25560075)の支援を承けています。

第1回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

課題探究として証明することのカリキュラム開発
ー　中学校数学科第三学年の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想　ー

永田潤一郎　文教大学教育学部
小松孝太郎　信州大学教育学部
中川裕之　大分大学教育福祉科学部

要約

本研究は，中学校数学科第三学年の領域「数と式」及び「図形」において，課題探究として証明することの学習を実現するため，カリキュラム上の課題を整理すると共に，新たなカリキュラム開発の方向性を提案することを目的とする。具体的には，本研究で提案する学習レベルとその移行を実現することで，これらの課題を解決するという視点から，「図形の相似」や「円周角と中心角の性質」の授業場面において，課題探究として証明するための学習を構想し，課題への現実的な対応可能性を例示する。また，義務教育の最終段階である中学校第三学年段階における課題探究として証明することの学習の位置付けについても検討する。

キーワード：課題探究，論理的に考察し表現する能力，証明すること，中学校数学，カリキュラム

1．中学校第三学年のカリキュラムの見直し

平成20年に告示された新しい学習指導要領（以下,「現行学習指導要領」とする）では，中学校数学科の目標に「事象を数理的に考察し表現する能力を高める」ことが明記された。平成10年に告示された学習指導要領（以下,「前学習指導要領」とする）に表現することが追加されたことに関して，現行学習指導要領解説数学編では，「一層合理的，論理的に考えを進めることができるようになったり，より簡潔で，的確な表現に質的に高めることになったり，新たな事柄に気付いたりすることも可能になる。また，考えたり判断したりしたことを振り返って確かめることも容易になる」として，その重要性が指摘されている（文部科学省，2008）。こうした目標を実現していくためには，義務教育段階の数学教育における証明の学習が極めて重要である。

中学校第三学年においては，前学年までに学習した内容や考察に用いた手段を基に，領

域「数と式」及び「図形」において，数や図形の性質・関係について証明することの学習が一層深められる。

例えば，現行学習指導要領における各学年の目標のうち，領域「図形」に関する部分を比較してみると，いずれの学年においても，「論理的に考察し表現する能力」の育成が求められており，第一学年においては，これを「培う」こと，第二学年においては「養う」こと，第三学年においては「伸ばす」こととされている。このことは，子どもの論理的に考察し表現する能力の伸長を継続的な学習を通じて図ることを意図したものであり，中学校第三学年における証明の学習においても極めて重要である。

ところで，中学校第三学年における証明の学習の現状は，第一学年や第二学年ほど明確になっているとはいえない。例えば，国立教育政策研究所が平成19年度から実施している全国学力・学習状況調査は，調査内容を中学校第二学年までとしており，第三学年の学習の実態を捉えることができない。前学習指導要領の実施時期におけるデータになるが，平成15年度教育課程実施状況調査から，中学校第三学年の学習の実態を知ることができる。調査報告書では，中学校第三学年の証明の学習の状況に関し，「文字を使って一般的に考え，説明を組み立てていく力，合同条件などを根拠として考え，証明を組み立てていく力など，論理的に考えて，それを表現する力を問う問題の実現状況はよくなかった」として，推論の過程を的確に表現する力を高めることの必要性が指摘されている（国立教育政策研究所，2004)。既に10年前の指摘であるが，その後，こうした状況が改善されているかどうかには疑問が残る。

こうした学習状況の主因としては，カリキュラム，学習，学習指導及び評価が考えられる。これまでにも証明の学習の実態に基づき学習指導の改善が数多く提案・実施され，その結果が評価されてきているが，中学校数学科のカリキュラムに，望ましくない学習状況の原因を求め，カリキュラムの新たな姿を構想することも必要である。そこで，本研究では，中学校第三学年に焦点をあて，課題探究として証明することの学習の可能性についてカリキュラム開発の視点から検討する。

2. 目的・方法

本研究の目的は，次の問いに答えることである。

> 中学校数学科第三学年の領域「数と式」と「図形」において，証明することに関するカリキュラムとしての問題点は，意図される学習レベル及びその移行により解消され得るか。

この問いに答えるため，課題探究として証明することに着目して現行学習指導要領と教科書(平成23年度版)を検討し，カリキュラムとしての問題点を整理する。そして，課題探究として証明することを意図した学習レベル及びその移行（宮﨑・藤田，2013）による，問題点への対処可能性について検討する。また，領域「図形」において，学習レベル及びその移行を実現する学習を構想することにより，現実的な対応の可能性を例示する。

3. カリキュラムとしての問題点

3.1 領域「数と式」の問題点

●第二学年における学習との差異の明確化

現行学習指導要領においては，証明の学習について，第二学年で「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」（A(1)イ）と示され，第三学年で「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明すること」（A(2)ウ）と示されている。また，両学年の関連について，現行学習指導要領解説数学編においては，「これらのことは徐々に時間をかけて学習されると考えられるので，第３学年での文字を用いた式の活用の学習も見通して，漸次理解を深め

られるように指導する」とされている（文部科学省，2008）。両学年間で意図されている学習には差異が認められるにも関わらず，教科書では,両学年における証明の学習の間に,明確な差異を見出すことはできない。

●課題探究として証明することの充実

教科書のなかには，第二学年及び第三学年において，ことがらを帰納的に予想し文字式を用いて証明するという展開になっているものがある。また，第三学年においては，ことがら「連続する二つの偶数の積に１をたした数は，それら二つの偶数の間にある奇数の２乗になる」について,「偶数」を「奇数」にかえ，同じように予想し，その予想が正しいかどうかを説明するなど，ことがら及び証明の構成について発展する場面を設けているものがあり，第二学年には見られない特徴になっている。第二学年及び第三学年の教科書には，意図的に証明を構想する場面を取り上げているものもあるが，具体的な学習の場面として十分であるとはいえない。

3.2 領域「図形」の問題点

●第三学年における学習の接続性

第二学年では,「証明の必要性と意味及びその方法について理解すること」(B(2)イ)が意図されており，教科書では，証明することについて学習する内容が用意されている。ここでは，普遍特化及び仮言三段論法に基づく証明が導入される。第三学年ではこれを基盤として,「相似な図形の性質」,「円周角と中心角の関係」,「三平方の定理」が扱われる。このうち，例えば「相似な図形の性質」においては,「三角形の相似条件などを基にして図形の基本的な性質を論理的に確かめること」(B(1)イ) が意図されている。しかし，第二学年の学習が前提となっており，証明を構想したり構成したりすることについて，改めて取り上げる場面は見出せない。証明につての理解や証明することは前提とされており，学習に際してつまずきの原因になりかねない。第二学年における証明することの学習レベルの移行を第三学年の学習の初期の段階で振り返ることができるようにすること，即ち学習の接続性に配慮する必要がある。

●課題探究として証明することの充実

第三学年では，義務教育最終段階として，子どもの主体的な取り組みを一層重視していく必要がある。その意味で，第二学年において，証明に基づく発展が意図されている「図形の性質の証明を読んで新たな性質を見いだしたりすること」(B(2)ウ)は，第三学年においても重要である。教科書には，証明を基に条件をかえるなどして，新たな性質を演繹的に見出す場面を設定しているものがある。課題探究として証明することのうち，発展することの学習を充実させ，子どもの主体的な学習場面として明確に位置付ける必要がある。

また，証明することの学習が，論理的に考察し表現する能力の育成を目指すという観点から，図形の性質・関係の全称性を明らかにするだけでなく，明らかにした図形の性質・関係を基に，具体的な長さや角の大きさなどを求め，その過程を説明することの学習の意味も見直していく必要がある。将来子どもが出会う身の回りの事象については，特述のことがらについて論理的に考察し説明することが少なくない。証明することが生きて働く力となるようにする必要がある。多くの教科書では，こうした場面が学習したことの適用場面として設定されている。

4．内容と学習レベル･移行の対応

4.1 領域「数と式」における対応

本研究では，カリキュラムの実現性・実効性を考慮し，内容の系統や配列を現行のものに暫定的に固定している(宮﨑･藤田,2013)。現行学習指導要領解説において第三学年の領域「数と式」の項目として示されているもののうち，証明することが考察の対象や方法として位置づけられているのは「文字を用いた式でとらえ説明すること」(A(2)ウ) である。

領域「数と式」については，第二学年において学習レベル(P1，D1)から(P2，D1)への移行が意図されるようにし，(P2，D1)での評価・改善・発展が意図されるようにしているが，第三学年では，学習内容が式の展開や因数分解に変わることから,接続性の観点を重視し,第二学年の学習レベルを再度体験することが必要であると考え,表１のように構成した(なお,「(P1，D1)」等の記号の意味については,宮﨑・藤田（2013）参照)。

項目	学習レベル・移行
文字を用いた式でとらえ説明すること	(P1,D1) →(P2,D1)＋CIA

表１ 項目と学習レベル・移行の対応：「数と式」

項目と学習レベル・移行との対応により，領域「数と式」に関する前述の「カリキュラムとしての課題」のうち，「課題探究として証明することの充実」については，具体的な課題の設定などによって一定の対処が可能になる。一方，「第二学年における学習との差異の明確化」については対処できていない。

4.2 領域「図形」における対応

現行学習指導要領解説における，第三学年の領域「図形」の項目は以下の通りである。

ア．相似の意味
イ．三角形の相似条件
ウ．平行線と線分の比についての性質
エ．相似比と面積比及び体積比の関係
オ．相似な図形の性質の活用
カ．円周角と中心角の関係の意味
キ．円周角と中心角の関係が証明できることを知ること
ク．円周角と中心角の関係の活用
ケ．三平方の定理の意味
コ．三平方の定理が証明できることを知ること
サ．三平方の定理の活用

教科書では，ア～オ，カ～ク，ケ～サでそれぞれ単元を構成している。このうち，ア，エ，カ，ケは，証明することの学習と関連が弱いと判断し，表２のように，各項目と学習レベル・移行を対応付けることとした。

項目	学習レベル・移行
三角形の相似条件	(P1,D2)→(P2,D2)
平行線と線分の比についての性質	(P2,D2)＋CIA
相似な図形の性質の活用	
円周角と中心角の関係が証明できることを知ること	(P2,D2)＋CIA
円周角と中心角の関係の活用	
三平方の定理が証明できることを知ること	(P2,D2)＋CIA
三平方の定理の活用	

表２ 項目と学習レベル・移行の対応：「図形」

先ず，項目「三角形の相似条件」において(P1，D2)から(P2，D2)への移行が意図されるようにし，続く二つの項目「平行線と線分の比についての性質」及び「相似な図形の性質の活用」において(P2，D2)での評価・改善・発展が意図されるようにする。実際には，第二学年の項目「三角形や平行四辺形の性質」において，(P2，D2)での評価・改善・発展が意図されるように学習が進められているが，この間，１年程度の時間が経過していることや，学習内容が図形の合同から相似に変わっていることなどに配慮して，学習レベルの移行を再体験する場面を設定する。

その上で，項目「円周角と中心角の関係が証明できることを知ること」,「円周角と中心角の関係の活用」,「三平方の定理の活用」において(P2，D2)の評価・改善・発展を中心とした主体的な学習ができるようにする。

このように，項目と学習レベル及びその移行の対応により，領域「図形」に関する前述の問題点，即ち「第三学年における学習の接続性」及び「課題探究として証明することの充実」について，一定の対処が可能になる。

5．領域「図形」における項目「平行線と線分の比についての性質」の学習の構想

第三学年の項目「平行線と線分の比につい

ての性質」においては，学習レベル(P2,D2)において，評価・改善・発展できるようになることが意図されている。この学習レベルは，第二学年において既に経験しているが，学習内容が合同から相似に変わったことに鑑み，再度学習できる場面を設定している。以下では，「平行線と線分の比」に関する学習を前提として「平行線にはさまれた線分の比」の証明の学習における評価・改善と評価・発展に関する活動を扱う授業の概要を示す。

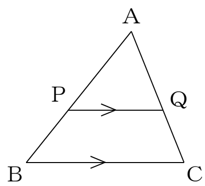
平行線と線分の比の性質

△ＡＢＣで，辺ＡＢ，ＡＣ上に，それぞれ，点Ｐ，Ｑがあるとき，次の(1)，(2)が成り立つ。

ＰＱ//ＢＣならば，

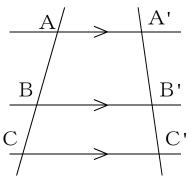
(1) ＡＰ：ＡＢ
＝ＡＱ：ＡＣ
＝ＰＱ：ＢＣ

(2) ＡＰ：ＰＢ
＝ＡＱ：ＱＣ



平行線にはさまれた線分の比の性質

２つの直線が，３つの平行な直線と，右の図のように交わっているとき，
ＡＢ：ＢＣ
＝A'B'：B'C'



5.1 本時のねらい

本時のねらいは，平行線にはさまれた線分の比の性質が成立することを証明し，別の線分の比が等しいことを見出すことである。

なお，この授業では，解析的な方法の用い方を振り返り，証明とその構想を修正すること（P2,D2＋CI)，並びに，修正した証明とその方針に基づいて新たなことがらを見出し，その証明の構想を行うこと（P2,D2＋CA)が意図されている。

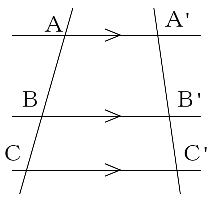
5.2 本時における，課題探究として証明すること

P 2 D 2	・上述した平行線にはさまれた線分の比の性質の証明の構想を，点Ａを通り，直線A'C'に平行な直線（あるいは，点A'を通り，直線ＡＣに平行な直線）をひくことによって立てる。 ・構想に基づいて，根拠を明らかにして，証明を構成する。
C I	・証明を見返し，「なぜ点Ａを通り，直線A'C'に平行な直線をひく必要があったのか」を振り返り，「線分の比が等しいことを示すためには，既習の平行線と線分の比の性質(2)を適用できるように，相似な三角形をみつければよい。またそれがない場合にはつくればよい」という証明の構想の立て方を意識化する。 ・構想の立て方をよりわかりやすく伝えるために，証明の冒頭に，「ＡＢ：ＢＣ＝A'B'：B'C'を示すためには，平行線と線分の比の性質を適用できるように，点Ａを通り，直線A'C'に平行な直線をひき，相似な三角形をつくる」と書き加える。
C A	・修正した証明を見返し，平行線と線分の比の性質を用いて，平行線にはさまれた線分の比の性質を他にも示せないかを考える。 ・そのような性質として，平行線と線分の比の性質(1)に着目することにより，「ＡＢ：ＡＣ＝A'B'：A'C'」を見出す。

5.3 本時の展開（概要）

①課題の提示

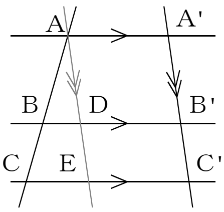
２つの直線が，３つの平行な直線と，右の図のように交わっているとき，
ＡＢ：ＢＣ
＝A'B'：B'C'
が成り立つことを証明しよう。



②証明の構想と構成【P2,D2】

子どもは前の項目「三角形の相似条件」で既に学習レベル(P2,D2)に達しているため，①の課題の証明の構想と構成は，自力解決を中心に進める。子どもは，既習の平行線と線分の比の性質を基に，ＡＢ：ＢＣ＝A'B'：B'C'が成り立つことを示すために，点Ａを通って直線A'C'に平行な直線をひけばよいことを見出したり，その結果できる四角形の向かい合う二組の辺がそれぞれ平行であることから，平行四辺形であることを見出したりする。その上で，次のように根拠を明らかにして証明する。

点Ａを通り直線Ａ'Ｃ'に平行な直線をひき，直線ＢＢ'，ＣＣ'との交点を，それぞれＤ，Ｅとする。
△ＡＣＥで，
ＢＤ//ＣＥ
だから，
ＡＢ：ＢＣ
＝ＡＤ：ＤＥ



四角形ＡＤＢ'Ａ'，四角形ＤＥＣ'Ｂ'は，ともに平行四辺形だから，
ＡＤ＝Ａ'Ｂ'，ＤＥ＝Ｂ'Ｃ'
したがって，
ＡＢ：ＢＣ＝Ａ'Ｂ'：Ｂ'Ｃ'

証明できない子どもが多い場合には，証明できている子どもを指名し，直線ＡＥのみ板書させ，構想の立て方を説明させず，他の子どもの解決を待つ。

③証明の構想の評価・改善【P2＋CI】

教師は，②の証明について，その構想がどのように立てられたのか検討するように促す。その際，「なぜ点Ａを通り直線Ａ'Ｃ'に平行な直線をひいたのか」に着目できるようにする。そして，教師の問い「何を示そうとして直線を引いたのか」や「この直線をひくことによって何を示すことができたのか」を通じて，子どもは，既習の平行線と線分の比の性質や平行四辺形の定義と性質が用いられていることを見出す。また，「新しい性質が正しいことを示すためには，既習の性質を適用することができないか考えればよい」ことや「既習の性質をそのまま適用できない場合でも，適用できる図をつくれないか考えてみる」という証明の構想の立て方を見出す。

④証明の構成の評価・改善【D2＋CI】

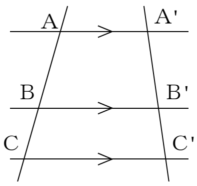
子どもは，③で見出した証明の構想の立て方を証明に書き加える。例えば，②の証明の冒頭部分に「線分の比が等しいことを示すために，平行線と線分の比の性質を用いることができるように」と書き加える。また，平行四辺形の定義と性質が用いられている部分を，「四角形ＡＤＢ'Ａ'，四角形ＤＥＣ'Ｂ'は，２組の向かい合う辺がそれぞれ平行なので，ともに平行四辺形である。平行四辺形の向かい合う辺の長さは等しいから，」のように書き改める。このように証明を改め，分かりやすくなるように工夫していく。

⑤証明を見返し，新たなことがらを予想する

【P2,D2＋CA】

子どもは，①から④までの活動を振り返り，②の証明が，主に既習の平行線と線分の比の性質(2)によって得られたことを確認する。その上で，教師は「平行線と線分の比の性質を用い，平行線にはさまれた線分の比の性質として，これとは別のもの」を問う。この問いに対し，子どもは証明の根拠となった平行線と線分の比の性質には(1)があったことを基に，線分の位置関係に注目し，次のように予想する。

２つの直線が，３つの平行な直線と，右の図のように交わっているとき，
ＡＢ：ＡＣ
＝Ａ'Ｂ'：Ａ'Ｃ'
が成り立つ。



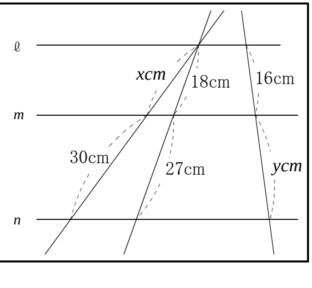
教師は，これまでの学習を基に，この予想が正しいことの証明の構想と構成に子どもが取り組むように促す。

5.4 線分の長さを求める場面における説明

【P2,D2】

5.3までの学習が終了した段階で，平行線と線分の比の性質及び平行線にはさまれた線分の比の性質を基にして，次のような問題の解決に取り組む場面を設定する。

下の図で，直線ℓ, m, n が平行であるとき，x, y の値の求め方を説明しなさい。



教科書では，この場面で「x, y の値を求めなさい」と問うことが一般的であるが，こ

こでは課題探究として証明することの学習の一環として，その求め方を根拠を明らかにして筋道立てて説明することを学習する。そのために，例えば x の値を求める場合は，

・図のどの部分に，平行線と線分の比の性質や平行線にはさまれた線分の比の性質を適用できるか考える。

・x の値を求めるためには，どの線分の比に着目すればよいか考える。

という点から説明の構想を立て(P2)，

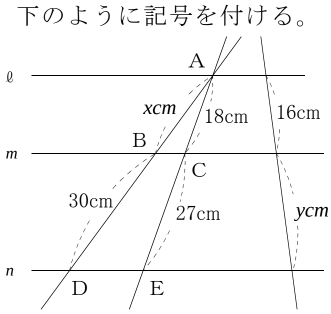
・例えば，下の図のように直線の交点に記号をつけて，平行線と線分の比の性質の適用の仕方を明らかにする。

・記号を用いて線分の比の関係を式で示し，x の値を求める。

という点に注意して，下のように説明する(D2)。

平行線と線分の比の性質の証明自体を構想したり構成したりすることができなかった子どもについても，それを根拠にして線分の長さを求める場面で，論理的に考察し表現する能力を育成することは可能である。

図の直線の交点に，下のように記号を付ける。
直線ℓ，m，n が平行であることから，平行線と線分の比の性質により，
ＡＢ：ＢＤ＝ＡＣ：ＣＥ
が成り立つ。したがって，
x：30＝18：27
この比例式を解いて，
x＝20



6．領域「図形」における項目「円周角と中心角の関係の活用」の学習の構想

第三学年の項目「円周角と中心角の関係の活用」において，これまでに学習したことを基に，課題探究として証明することに子どもが主体的に取り組む授業の概要を示す。

6.1 本時のねらい

本時のねらいは，２点で交わる円の一つの交点を通る２直線と弦がつくる二つの三角形が相似になることを，円周角と中心角の関係を用いて証明することである。

なお，この授業では，発展の場面を中心に，証明の構想，構成，評価・発展の一連の過程に取り組むこと（P2,D2＋CA）が意図されている。

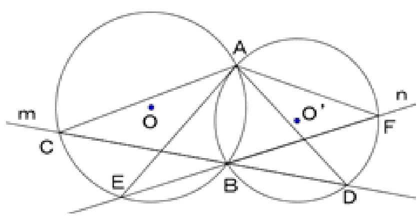
6.2 本時における，課題探究として証明すること

P2D2	・三角形の相似条件から，２組の角が等しいことを示せば，二つの三角形が相似であることを導くことができる。 ・また，三角形の各頂点が円周上にあることから，円周角の定理を用いれば，等しい大きさの角を見出すことができる。 ・以上の点から証明を構想する。 ・構想に基づいて，根拠を明らかにして，証明を構成する。
CA	・直線 n の位置を変えたとき，証明したことは,そのまま成り立つかどうか考える。 ・円周角の定理から∠ＡＤＣ＝∠ＡＦＥを導くことはできるが，∠ＡＥＦは弧ＡＢに対する円周角でなくなるため，∠ＡＣＤ＝∠ＡＥＦを円周角の定理から導くことはできないことを見出す。 ・円に内接する四角形において，一つの内角はそれに向かい合う内角の隣にある外角に等しくなることから，∠ＡＣＤ＝∠ＡＥＦを導き，△ＡＣＤ∽△ＡＥＦであることの証明を構成する。

6.3 本時の展開（概要）

①課題の提示

２点Ａ，Ｂで交わる２つの円Ｏ，Ｏ'がある。
点Ｂを通る２直線 m，n が，右図のように，円Ｏ，Ｏ'とそれぞれ点Ｃ，Ｄ及び点Ｅ，Ｆで交わっているとき，
△ＡＣＤ∽△ＡＥＦであることを証明しなさい。



②証明の構想と構成【P2,D2】

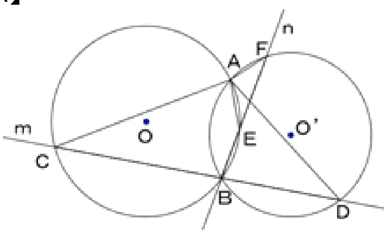
子どもは既に学習レベル(P2,D2)に達しているため，①の課題の証明の構想と構成は，自力解決を中心に進める。証明の構想につい

て，子どもは△ＡＣＤ∽△ＡＥＦを導くためには何を示したらよいか，三角形の相似条件を基に考える。また，点ＡからＦまでが円周上にあることから，既習事項を基に何が分かるかを考える。そして，結論を導くために必要なことがらと問題の条件からわかることがらを相互に接続させて考え，次のように根拠を明らかにして証明する。

△ＡＣＤと△ＡＥＦについて，
円周角の定理より，
∠ACD＝∠AEF，∠ADC＝∠ＡＦＥ
よって，二組の角がそれぞれ等しいので，
△ＡＣＤ∽△ＡＥＦ

③評価・発展【CA】

①の課題で，直線 *n* の位置を右図のように変えたときも，△ＡＣＤ∽△ＡＥＦが成り立つかどうか，またそのために，②の証明をそのまま適用することができるかどうかを検討する。



その結果，②の証明のうち，∠ＡＤＣ＝∠ＡＦＥであることは，円周角の定理より導くことができるが，∠ＡＣＤ＝∠ＡＥＦであることは導くことができなくなっていることを見出す。教師は，この場合でも，∠ＡＣＤ＝∠ＡＥＦであることを示すことができれば，②の証明を活かすことができることを指摘して，新たな証明の構想を促す。ここで，「円に内接する四角形において，一つの内角はそれに向かい合う内角の隣にある外角に等しくなる」ことを既習事項にしておくことで，∠ＡＣＤ＝∠ＡＥＦを導くことができる。

こうした経験を通して，証明したことがらについて，条件をかえて発展的に考察する際に，既存の証明がそのまま適用できなくなった場合でも，その一部を利用し，新たな証明を構想し構成することができることを理解できるようにする。

7. 結論及び今後の課題と展望

本研究の結論は次の通りである。

・第三学年の領域「数と式」では，問題点のうち，課題探究として証明することの充実については，一定の対処が可能である。

・第三学年の領域「図形」では，二つの問題点について一定の対処が可能である。また，そのための学習を例示することができた。

また，今後の課題は次の通りである。

・第三学年の領域「数と式」において，第二学年の学習との差異をどのようにして明確にするか。

・証明した図形の性質などを基に，図形の辺の長さなどを求め，その過程を説明する学習をどのように位置付けていくべきか。

・証明の構成が精緻化の方向に進められていないか。証明することの社会性という側面から簡素化を図る必要はないか。

参考文献

国立教育政策研究所. 2004.『平成１５年度小・中学校教育課程実施状況調査　教科別分析と改善点』. http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h15/H15/03001030130007004.pdf. p.9

国立教育政策研究所. 2012.『平成２４年度　全国学力・学習状況調査【 中学校 】報告書』. http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/04chuu-gaiyou/24_chuu_houkokusyo_ikkatsu.pdf

宮﨑樹夫，藤田太郎 (2013).「課題探究として証明することのカリキュラム開発：我が国の中学校数学科における必要性と，これまでの成果」. 日本数学教育学会第１回春期研究大会論文集.

文部科学省.2008.『中学校学習指導要領解説　数学編』.教育出版.

【謝辞】本研究は科学研究費補助金(No. 23330255, 24243077)の支援を承けています。