第1回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

課題探究として証明することのカリキュラム開発

－ 中学校第2学年数学科の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想 －

宮﨑樹夫　佐々祐之　辻山洋介
信州大学教育学部　熊本大学教育学部　敬愛大学国際学部

要　約

本研究は，中学校数学科第2学年の領域「数と式」及び「図形」において，課題探究として証明することの学習を実現するためのカリキュラム開発の方向性を提案することを目的とする。そのために，はじめに，課題探究として証明することの学習を実現するためのカリキュラム上の問題点を整理する。次に，これらの問題点を解消するために，学習指導要領解説の項目と，第2学年で意図される学習レベル及びその移行とを対応づけ，これによって諸課題への対処可能性を検討する。その上で，「文字を用いた式でとらえ説明できること」及び「三角形や平行四辺形の性質」の授業場面において課題探究として証明するための学習を構想し，諸課題への現実的な対応可能性を例示する。最後に，第2学年のカリキュラムについて今後の課題を指摘する。

キーワード:課題探究，証明すること，中学校数学，カリキュラム

１．新たなカリキュラム構想の必要性

我が国では，義務教育の学校数学において証明することは核となる活動として重視され続け，今日に至っている。実際，平成20年改訂学習指導要領では，小学校算数科の目標に関し「考えたことなどを表現したり，説明したりする活動」が算数的活動に含まれることが明記され，学年ごとに説明する活動が例示されている。また，中学校数学科においては，「数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動」が数学的活動とされ，領域を横断して実現されることが意図されている。

特に，中学校第２学年では領域「数と式」及び「図形」において数や図形の性質・関係について本格的に証明することが意図されており，これを考察の手段として今後の学習が進展していく。この意味で，第２学年の領域「数と式」及び「図形」における証明の学習は極めて重要である。

一方，中学校数学科における証明の学習状況が望ましくないことは各種調査研究により明らかにされている。特に全国学力・学習状況調査では，課題探究として証明することの諸側面（証明を構想すること，構想に基づいて証明すること，ことがらや証明などを評価・改善・発展すること）について科学的なエビデンスとして調査結果が得られている（例えば，国立教育政策研究所，2012）。この結果からすると，領域「数と式」及び「図形」において，課題探究として証明することの諸側面の学習状況は望ましくないことは明らかである。

こうした学習状況の主因として，カリキュラム，学習，学習指導及び評価が考えられる。従来から証明の学習の実態に基づき学習指導の改善が数多く提案・実施され，その結果が評価されてきたことからすると，中学校数学科のカリキュラムに，望ましくない学習状況の原因を求め，カリキュラムの新たな姿を構想する必要があるといえる。そこで，本研究では，中学校数学科の特に第2学年に焦点をあて，課題探究として証明することの学習の可能性についてカリキュラム開発の視点から検討する。

２．目的・方法

本研究の目的は次の問いに答えることである。

中学校数学科第２学年の領域「数と式」と「図形」において，証明することに関するカリキュラムとしての問題点は，意図される学習レベル・移行により解消され得るか。

この問いに答えるために，平成 20 年改訂学習指導要領と教科書(平成 23 年度版)の関係，課題探究として証明することに着目しカリキュラムとしての問題点を整理する。そして，課題探究として証明することとして意図された学習レベル及びその移行（宮﨑＆藤田，2013）による，整理された問題点への対処可能性について検討するとともに，学習レベル及びその移行を実現する学習を構想することにより現実的な対応の可能性があることを例示する。

３．カリキュラムとしての問題点

3.1 領域「数と式」の問題点

●第一学年における，根拠に基づいて式をよむことの充実

中学校学習指導要領「第３節数学」の第一学年では「数量の関係や法則などを文字を用いた式に表すことができることを理解し，式を用いて表したり読み取ったりすること」（A(2)エ）が意図されている。特に「式を読み取る」ことについて教科書をみてみると，第一学年において式（例えば $2(a+b)$）から意味(長方形の周りの長さ)をよみとることが扱われている。この学習において式の意味をよみとることに加え，その根拠や理由を明らかにすることが，第２学年で，ことがらの全称性を示すために，意図的に変形し得られた文字式について解釈することにつながる。そのため，第一学年において根拠に基づいて式をよむことを充実する必要がある。

●第３学年での学習との差異の明確化

第３学年では「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明すること」(A(2)ウ）とされ，第２学年では「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」(A(1)イ）とされ，意図されている学習の差異が明確にされている。一方，教科書では，意図されている証明の学習に明確な差異を両学年の間に見出すのは困難である。

●課題探究として証明することの充実

教科書のなかには，第２学年及び第３学年において，ことがらを帰納的に予想し文字式を用いて証明するという場面の展開が設けられているものがある。また，ことがら「奇数の和は偶数である」等について文字の用い方が誤っている証明を修正する場面が設けられているものもある。これらは，

課題探究として証明することのうち，ことがらの生成と証明の生成の相互作用，評価・改善することに該当する。一方，証明を構想すること，ことがら及び証明の生成について評価・発展することに該当する場面や展開が明確に設けられているのを見出すことはできない。

3.2 領域「図形」の問題点

●第一学年で意図される証明の明確化

第一学年では「論理的に考察し表現する能力を培う」(B(1))ことが，作図，移動，空間における直線や平面の位置関係，空間図形の構成・表現などにおいて意図されており，第２学年における証明の学習の素地形成となる。一方，図形の性質について証明する場面が設けられている教科書もあるが，第２学年における証明の学習との接続のために，第一学年においてどの程度の証明が意図されるのかは明らかではない。中学校数学科における証明の学習が累積的になるためには，第一学年で意図される証明の“姿”が明確にされる必要がある。

●第２学年における学習の漸進性の設定

第２学年では，「証明の必要性と意味及びその方法について理解すること」(B(2)イ)が意図されており，教科書には，第２学年内において，証明することについて学習する部分が用意されている。この部分では普遍特化及び仮言三段論法に基づく証明が導入される。一方，第２学年では，この部分までに「平行線と角の性質」/「多角形の角についての性質」/「合同の意味と三角形の合同条件」が扱われている。これらの部分では，証明することについて学習する部分の準備として考察及び表現の深まりや高まりについて一定の配慮がなされており，学習指導でも証明の根拠の使用を意識付けるなど様々な工夫が見受けられる。一方，第２学年の領域「図形」全体を通して，証明することについて学習する部分に向け，証明することがどのように深まり高まっていくのかが明らかではない。そのため，証明することについて学習する部分までに証明することの質をどのように上げていくか，即ち学習の漸進性を設定する必要がある。

●課題探究として証明することの充実

第２学年では，証明に基づく発展が意図されている：「三角形の合同条件などを基にして三角形や平行四辺形の基本的な性質を論理的に確かめたり，図形の性質の証明を読んで新たな性質を見いだしたりすること」(B(2)ウ)。教科書のなかには，ある証明を基に新たな性質を演繹的に見出す場面が設定されているものがある。また，作図などを基に図形の性質を予想し証明するという展開になっているものがある。これらは，課題探究として証明することのうち，発展すること，ことがらの生成と証明の生成の相互作用に該当する。一方，証明を構想すること，ことがら及び証明の生成について評価・改善することに該当する場面が全ての教科書に設けられているわけではない。そのため，証明について学習する際，証明を構想し構成することついて扱うとともに，三角形や四角形の性質について証明することを基に考察していく際，ことがら及び証明の生成について評価・改善することを扱う必要がある。

４．内容と学習レベル・移行の対応

4.1 領域「数と式」における対応

本研究では，カリキュラムの実現性・実効性を考慮し，内容の系統や配列を現行のものに暫定的に固定することにした(宮崎・藤田，2013)。中学校学習指導要領解説数学編において第2学年の領域「数と式」の項目として示されているもののうち，証明することが考察の対象や方法として位置づけられているのは次の二つである。

c.　文字を用いた式でとらえ説明できること
d.　目的に応じた式の変形

このうち，項目 d は数の性質などについて文字式で証明するために手段として必要となる。そこで，これらの項目を一つとし，第一学年で到達される学習レベル(P1, D1)から(P2, D1)への移行，続いて(P2, D1)での評価・改善・発展(CIA)が意図されるようにする（表1：記号については，宮崎・藤田（2013）を参照）。

項目	学習レベル・移行
文字を用いた式でとらえ説明できること 目的に応じた式の変形	(P1, D1) → (P2, D1)
	(P2, D1) + CIA

表1　項目と学習レベル・移行の対応:「数と式」

項目と学習レベル・移行との対応により，領域「数と式」に関する前述の「カリキュラムとしての課題」のうち，“課題探究として証明することの充実”については一定の対処が可能になる。一方，課題“第３学年での学習との差異の明確化”については対処できていない。

4.2 領域「図形」における対応

中学校学習指導要領解説数学編での第2学年領域「図形」の項目は次の通りである。

ｱ. 平行線と角の性質
ｲ. 多角形の角についての性質
ｳ. 合同の意味と三角形の合同条件
ｴ. 数学的な推論
ｵ. 証明の必要性と意味及び方法
ｶ. 三角形や平行四辺形の性質
ｷ. 証明を読んで新たな性質を見いだすこと

このうち，エとキ以外の5項目とその順序は教科書における内容及びその系列に概ね該当している。そこで，表2にあるように，各項目と学習レベル・移行を対応付ける。

項目	学習レベル・移行
平行線と角の性質	(P1, D1) → (P1, D2)
多角形の角についての性質	(P1, D2) + CIA
合同の意味と三角形の合同条件	
証明の必要性と意味及び方法	(P1, D2) → (P2, D2)
三角形や平行四辺形の性質	(P2, D2) + CIA

表2　項目と学習レベル・移行の対応:「図形」

先ず，項目「平行線と角の性質」において(P1, D1)から(P1, D2)への移行が意図され，続く二つの項目「多角形の角についての性質」及び「合同の意味と三角形の合同条件」において (P1, D2)での評価・改善・発展が意図されるようにする。その上で，項目「証明の必要性と意味及び方法」において (P2, D2)が意図されることから，この項目で (P1, D2)からの移行が意図され，続く項目「三角形や平行四辺形の性質」において(P2, D2)での評価・改善・発展が意図されるようにする。

項目と学習レベル・移行との対応により，カリキュラムとしての領域「図形」の問題点(3.2)，即ち“第一学年で意図される証明の明確化”，“第２学年における漸進性の設定”，“課題探究として証明することの充実”に一定の対処が可能になる。

５．領域「数と式」における学習の構想

第２学年の「文字を用いた式でとらえ説明できること」，「目的に応じた式の変形」に関する学習は，通常４ないし５単位時間をもって構成される。ここでは，学習レベル(P1, D1)から(P2, D1)への移行，及び「ことがらの生成と証明・説明の生成の相互作用」「評価・改善すること」に関する２単位時間分の学習を例示する。

5.1 本時のねらい

連続する３つの自然数の和について成り立つ性質を予想し，それが成り立つ理由を，文字式で説明する。その際，式の意図的な変形の仕方について，結論を示すためによりよく表現したり，文字の用い方を工夫したりするなどして証明することを評価・改善していく。また，連続する５つの自然数の和について発展的に考察し，連続する自然数の和に共通する性質を統合的に見出す。

なお，この授業では，課題探究として証明することのうち，文字を用いた説明を振り返る活動を通して，「証明の構想」のための視点を見出すことに力点を置く。

5.2 課題探究として証明すること（本時）

P1,D1	連続する3つの自然数の和について予想したことがらを証明するために，連続する3つの自然数を文字で表し，その和を計算する。
CI	証明を振り返って，3の倍数であることを示すために,式を3×(自然数)の形に意図的に変形する必要があることに気づき，証明を修正する。
CIA	連続する3つの自然数をn-1, n, n+1と表しておくと,式変形の結果が3nとなり，3の倍数であることが示しやすくなることに気づく。また，得られた式から，単に3の倍数であるだけではなく連続する3つの自然数の中央の数の3倍であることを見出し，新たなことがらをつくり出す。
P2,D1	連続する3つの自然数の場合を参考にして，連続する5つの自然数の和について成り立つことがらを予想し，文字の用い方，式の表し方等を考慮して証明を構想する。
CA	連続する3つの自然数の和や連続する5つの自然数の和について成り立つ性質を統合し，連続する自然数の和に共通して成り立つ性質を見出そうとする。

5.3 本時の展開（概要）

①連続する3つの自然数の和について成り立つ性質を予想する

連続する3つの自然数の和について，いくつかの具体例から帰納的に推論し，「連続する3つの自然数の和は，3の倍数になる。」という予想を立てる。

②予想した性質が成り立つことを証明するための構想を立てる【構想P1】

「連続する3つの自然数は，一般にどのように表されるだろうか。」という教師の問いかけをもとに，生徒は，「連続する3つの自然数を文字で表し，それらの和を計算する」という証明の構想を立てる。

③予想が成り立つことを証明し評価・改善する【構成D1＋評価・改善CI】

連続する3つの自然数について，最も小さな数を文字nとして「n，n+1，n+2」と表して，和を計算し，予想を説明する。

> 連続する3つの自然数のうち，最も小さい数をnとすると，連続した3つの自然数は，n，n+1，n+2と表される。
> したがって連続する3つの自然数の和は，
> n+(n+1)+(n+2)＝3n+3

3n+3という式の意味を問う教師の発問から，生徒は，3の倍数であることを示すには3×（自然数）という形に表す必要があることを見出し，3n+3を3(n+1)に変形し直す。また，結論を示すために意図的に式を変形したことを基に，3(n+1)の解釈に関する記述の仕方について理解する。

> n+1は自然数だから，3(n+1)は3の倍数である。
> したがって，連続する自然数の和は，3の倍数である。

④証明の構想及び構成を修正する【評価・改善・発展（CIA）】

和が3の倍数であることをより簡潔に式で示せないかという教師の発問から，3つの連続する自然数をn-1, n, n+1と表わすと，式変形による式が3nとなり，和が3倍であることをより簡潔に示せることに気づく。

> 連続する3つの自然数のうち，真ん中の数をnとすると，連続した3つの自然数は，n-1，n，n+1と表される。
> したがって連続する3つの自然数の和は，
> (n-1)+n+(n+1)＝3n
> nは自然数だから，3nは3の倍数である。
> したがって，連続する3つの自然数の和は，3の倍数である。

生徒は，③での証明の3(n+1)や④での証明の3nに着目し，(n+1)やnが連続する3つの自然数の中央の数なので，和が中央の数の3倍になっていることに気づき，新しいことがら「連続する3つの自然数の和は，中央の数の3倍である」をつくり出す。

⑤関連の発展課題に取り組む【評価・発展（P2,D1＋CIA）】

連続した5つの自然数の和が中央の数の5倍になっていることを予想し,連続する3つの自然数の和について証明したことを参考に，予想の結論からも逆向きに考え，証明の構想を立てる。

・連続する 5 つの自然数を，最も小さい数を n として表すと，n，n+1，n+2，n+3，n+4 と表される。
・和が中央の数の 5 倍であることを示すためには，和の計算結果を，5×(n+2)という形に表すことができればよい。

生徒は,連続する5つの自然数をn,n+1，n+2，n+3，n+4 と表し，証明を構成する。

連続する 5 つの自然数のうち最も小さい数を n とすると，連続した 5 つの自然数は，n，n+1，n+2，n+3，n+4 と表される。
したがって連続する5つの自然数の和は，
$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)$
$=5n+10=5(n+2)$
n+2は連続する5つの自然数の中央の数だから，5(n+2)は中央の数の 5 倍である。
したがって，連続する 5 つの自然数の和は，中央の数の 5 倍である。

この証明について，「和が中央の数の 5 倍であることを簡潔に示すために，どの数を文字 n で表せばよいか」等の発問により，生徒は，5(n+2)に着目し，中央の数 n+2 を n として連続する 5 つの自然数を表し直すと証明が簡潔になることに気づき，文字の置き方を修正する。その際，最も小さい数 n-2 が 1 以上であることに着目し n が 3 以上の自然数に限られることを見出すとともに，④での証明についても，最も小さい数 n-1 が 1 以上であることから n が 2 以上の自然数に限られることを見出し書き加える。

連続する 5 つの自然数のうち，中央の数を n とすると，連続した 5 つの自然数は，n-2, n-1, n, n+1, n+2 と表される。（n は 3 以上の自然数）
したがって連続する 5 つの自然数の和は，
$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=5n$
nは連続する5つの自然数のうちの中央の数だから，5n は中央の数の 5 倍である。
したがって，連続する 5 つの自然数の和は，中央の数の 5 倍である。

連続する 3 つの自然数の和の場合との類似点を考察することを通して，次の課題についてレポートを作成する。

■ 連続する 7 つの自然数や，9 つの自然数について何がいえそうか。
■ 連続する自然数が偶数個の場合は，どのようなことがいえそうか。

６．領域「図形」」における学習の構想

「三角形や平行四辺形の性質」では，学習レベル(P2,D2)において評価・改善・発展できるようになることが意図される。評価に関する活動には，構成した証明を用いて全称命題の真であることを確立できるかどうか／異なる記号や図を用いた複数の証明を統合できるかどうかを検討する活動がある。また，評価・改善や評価・発展に関する活動には，証明やその方針の立て方を工夫する活動や，証明やその方針に基づいて新たなことがらを生成する活動がある。

以下では，特に評価・改善と評価・発展に関する活動を扱う授業の概要を例示する。

6.1 本時のねらい

平行四辺形において向かい合う辺がそれぞれ等しいことを証明し，その性質が成立することを根拠に基づいて理解する。また，その証明に基づいて，２組の対角がそれぞれ等しいことを見出す。

なお，この授業では，解析的な方法の用い方を見返し，証明とその構想を修正すること（P2,D2＋CI），並びに，修正した証明とその方針に基づいて新たなことがらを見出し，その証明の構想を行うこと（P2,D2＋CA）が意図されている。

6.2 課題探究として証明すること（本時）

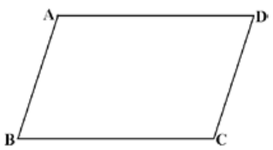
P2,D2	・「四角形 ABCD において，AB // DC，AD // BC ならば，AB＝DC である」（ことがらアとする）の証明の構想を，対角線 AC（あるいは BD）をひくことによって立てる。 ・構想に基づいて，根拠を明らかにして，証明の構成を行う。
CI	・証明において，「なぜ対角線 AC をひく必要があったのか」を見返し，「二辺が等しいことを示すためには，それらを辺にもつ合同になりそうな三角形をみつければよいが，ない場合にはつくればよい」という証明の構想の立て方を意識化する。 ・構想の立て方をわかりやすく伝えるために，証明に，「AB＝DC を

	示すためには，AB と DC を辺にもつ合同な三角形をつくればよい。そのために，対角線 AC をひき，△ABC と△CDA をつくる」と書き加える。
CA	・修正した証明を見返し，△ABC≡△CDA を用いて，平行四辺形の性質を他にも示せないかを考える。そして，そのような性質として AD＝BC に着目することにより，「向かい合う辺はそれぞれ等しい」を見出す。また，∠A＝∠C や∠B＝∠D に着目することにより，「向かい合う角はそれぞれ等しい」を見出す。 ・ことがらアの証明を一部修正することにより，見出した性質を証明できそうであることを確認する。

6.3 本時の展開（概要）

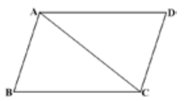
①課題の提示

平行四辺形 ABCD において，AB // DC，AD // BC ならば，AB＝DC であることを証明しよう。



②証明の構想と構成　【P2,D2】

生徒は既に学習レベル(P2,D2)に達しているため，ことがらアの証明の構想と構成は，生徒の自力解決を中心として進める。生徒は，合同な図形の性質と三角形の合同によって AB＝DC を示すために，対角線 AC（あるいは BD）をひけばよいことを見出したり，前提 AB // DC，AD // BC から錯角が等しいことを見出したりする。その上で，下のように証明を構成する。



△ABC と△CDA において，平行線の錯角は等しいので，
　AB // DC から，∠BAC＝∠DCA…①
　AD // BC から，∠BCA＝∠DAC…②
また，AC は共通であるので，
　AC＝CA…③
①，②，③から，一組の辺とその両端の角が等しいので，
　△ABC≡△CDA
　合同な三角形において対応する辺は等しいので，AB＝CD が成立する。

生徒が頓挫してしまう場合には，教師は，対角線 AC（あるいは BD）をひいている生徒に対角線のみ板書させる。この時点では発表者に構想の立て方について説明を求めず，他の生徒の解決を待つ。最後に，構成した証明を生徒が発表する。

③証明の構想の評価・改善　【P2＋CI】

教師は，②で得られた証明の構想がどのように立てられたのかを検討するように促す。その際，②で証明の構想や構成を首尾よくできた生徒から「これじゃ，どうして，この三角形の合同に気づいたのかわからないよね」（宮﨑，2007，p.653）や，頓挫していた生徒から「なぜ対角線をひこうと思えたのかがわからない」などの発言を取り上げ，「なぜ対角線 AC が入用か」（清水，1994，p.229）に着目できるようにする。

生徒は，「二辺が等しいことを示すため」や「合同な三角形において対応する辺は等しいから」などの断片的な発言をすると予想される。こうした発言に基づいて，教師の問い「対角線をひくことによって何を示せたのか」を通じて，生徒は，既習であった「二辺が等しいことを示すためには，それらを辺にもつ合同な三角形をみつければよい」という証明の構想の立て方に加え，「合同な三角形がみつからない場合，そのような三角形をつくればよい」という新たな立て方を見出す。

④証明の構成の評価・改善【D2＋CI】

生徒は，③で見出した証明の構想の立て方を証明に書き加える。例えば，図 2 の証明の冒頭に，「AB＝DC を示すためには，AB と DC を辺にもつ合同な三角形をつくればよい。そのために，対角線 AC をひき，△ABC と△CDA をつくる」と書き加える。このように，証明がよりわかりやすくなるための書き方を工夫していく。

⑤証明を見返し新たなことがらを予想する　【P2,D2＋CA】

生徒は，①～④の活動を整理し，おおまかに言えば，ことがらアの証明が，「AB と DC を辺にもつ合同な△ABC と△CDA をつくる」ことによって得られたことを確認する。その上で，教師は，「△ABC≡△CDA を用いて，平行四辺形の他の性質を証明できないか」を問う。

この問いに対し，生徒が BC＝DA を見出すとする。このとき，結論だけでなく仮定とともに述べるように教師が促すことにより，生徒は「四角形 ABCD において，AB // DC，AD // BC ならば，BC＝DA」（ことがらイ）と述べ直すと思われる。このことにより，ことがらアとイは同じ仮定をもつことを確認した上で，ことがらアとイを合わせ，「平行四辺形において，向かい合う辺はそれぞれ等しい」と全称命題として述べることが可能になる。

さらに，前述の問いに対し，∠B＝∠D や，生徒によっては∠A＝∠C を見出すことも可能である。これら見出したことがらをどのように証明できるのかについて，②～④の活動をいかして考えるように促すことが考えられる。例えば，∠B＝∠D の証明の構想に関しては，④と同様に，「∠B＝∠D を示すためには（中略）△ABC と△CDA をつくる」ことが必要である。

最後に，これらの性質の証明を構成することや，証明の構想の立て方を整理すること，平行四辺形の他の性質を見出すこと，これらの性質が台形でも成立するかどうかを検討する等のレポート課題に取り組む。

７．結論及び今後の課題

本研究の結論は次の通りである。

学習指導要領解説の項目と，意図される学習レベル・移行とを対応づけることにより，第２学年の領域「数と式」において，問題点“課題探究として証明することの充実”については一定の対処が可能になるが，問題点“第３学年での学習との差異の明確化”については対処できない。一方，第２学年の領域「図形」において，問題点“第一学年で求められる説明の明確化”，“第２学年における漸進性の確立”,“課題探究として証明することの充実”について一定の対処が可能になる。また，学習レベル及びその移行を実現する学習を構想することにより現実的な対応可能性を例示した。

今後の課題は次の通りである。

- 第２学年の領域「数と式」において，第３学年での学習との差異をどのようにして明確にするか。
- 領域「図形」における，評価・改善・発展することについて，第２学年と第３学年の差異は何か。
- 各項目に対応付けられた学習レベル・移行は授業での学習として実現可能か。

参考文献

国立教育政策研究所. 2012.『平成24年度 全国学力･学習状況調査【 中学校 】調査結果概要(4. 教科に関する調査の各問題の分析結果と課題)』. Retrieved from http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03chuu-gaiyou/24_chuu_kekkagaiyou-4_suugaku.pdf

宮﨑樹夫, 藤田太郎. 2013.「課題探究として証明することのカリキュラム開発：我が国の中学校数学科における必要性と, これまでの成果」. 日本数学教育学会第1回春期研究大会論文集.

宮﨑樹夫. 2007.「学校数学における証明に関する研究：証明の学習の諸相に着目して」. 日本数学教育学会 第 40 回数学教育論文発表会論文集. 649～654.

文部科学省. 2008.『中学校学習指導要領解説 数学編』. 教育出版.

清水静海. 1994.「論証」.『CRECER 中学校数学科教育実践講座 第6巻 図形と論証』(pp. 204～236). ニチブン.

【謝辞】本研究は科研費 (No. 23330255, 24243077, 24830017, 25560075)の支援を承けています。