第２回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

数学的事象に関する課題探究を実現する学力とその可能性
－「活用する力」βへの提言 －

Potentials of Competencies Realizing Explorative Activity about Mathematical Phenomena: Suggestions for the ‘ability to utilize’ β

宮崎樹夫
信州大学学術研究院教育学系

要　約

数学的事象に関する課題探究を実現する学力には次のものがある：A:事柄を生成する/B:事柄を評価・改善・発展する/C:証明の方針を立てる/D:証明の方針に基づいて証明を構成する/E:証明の過程と結果を評価・改善・発展する/F:証明することを課題探究サイクルとして実現する。特に E には，証明の過程や結果に基づいて新たな事柄を見出す/証明の方針を立て直す/証明に循環論を見出し修正する/ 条件変えに応じ事柄や証明を再構成すること等が含まれる。また，反例による説明に関する学力として，前記の A～F に加え，反例の機能を理解すること/反例を見出すことがある。数学的事象に関する課題探究を実現する学力を，全国学力・学習状況調査における「活用」の問題作成の枠組みに位置づける方策として，事象を日常的/数学的に区別し，各々について「活用する力」βの数学的プロセスを示すことが考えられる。

キーワード：学力，数学的事象，課題探究，証明すること，活用

１．数学的事象に関する課題探究への焦点化

『持続的に発展可能な社会を築くために子ども達にどのような学力を育むべきか。』1990 年代以降，この課題に様々な国々・地域が教育界のみならず産業界の強力な牽引により対峙している。こうした国や地域では進歩的なコミュニティを発展させる基礎として，ジェネリック・スキルと総称される，特定の場面や文脈に限定されることなく適用可能な高次のスキルの育成が目指されている（清水禎文，2012）。特に，学びの自律性に着目すると，ジェネリック・スキルの共通要素である概念的/思考スキル（NCVER, 2004, p.8）として，課題探究を実現する学力の育成は喫緊の課題であるといえる。

我が国の学校教育においても，概念的/思考スキルとして課題探究を実現する力を学力の重要な側面として位置づける方向は近年一層明確にされてきている。特に，「様々な課題解決のために，構想を立て実践し評価・改善する力」

は，中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会審議経過報告（平成 18 年 2 月 13 日）において，「イ 確かな学力の育成」の「知識・技能を活用し、考え行動する力の重視」のなかで「各教科等を横断してはぐくむべき能力」として例示されている。これを受けて，全国学力・学習状況調査では，主として「活用」に関する問題作成の基本理念*[1]に課題探究を実現する力が整理され，この力を育むための授業改善が調査の活用を通じて期待されている。

課題探究は事象を考察の対象として展開される。数学教育で考察の対象とされるのは，主に日常的事象と数学的事象である。特に，数学的事象に関する課題探究は，主に算数・数学科で意図されているものである。しかし実際には，子ども自らが解決を要する問題を課題として見出し，その解決に主体的・生産的・柔軟に筋道立てて取り組むことが学校数学で具現されているとは言い難い。こうした事態に陥っているのは，教師の力量というより，数学的事象に関する課題探究を実現する学力が数学に固有なプロセスとして十分明確にされていないことによると思われる。

以上のことから，本研究は次の問いに答えることを目的とする。

学校数学において，数学的事象に関する課題探究を実現する学力として，どのようなものがあるか。

２．数学的事象に関する課題探究を実現する学力

(1) 社会的要請への数学教育の対応可能性

課題探究を実現する学力の育成という社会的要請に対し，数学教育では長年にわたる問題解決に関する研究と実践の成果として，子どもにとって解決を要する問題を課題として捉えることに加え，解決の相として「問題を理解すること/計画を立てること/計画を実行すること/ふり返ってみること」(Polya, 1957)が学校段階や内容領域を横断して重要視されており，理論及び実践の確固たる基盤となっている。また，数学教育では科学哲学における可謬主義(Lakatos, 1978)に基づく研究や実践が精力的に展開されており，この学問的意義と教育的価値が議論の余地を残しながらも広く認められている(Hanna, 2007)。可謬主義の視座によって解決での様々な間違いや誤りなどを契機として探究が更に深化・発展することが数学教育として改めて価値付けられる。

このように，数学教育は課題探究を実現する学力の育成という社会的要請に対し十分に応え得る“実力”を備えている。なお，以下では，課題探究を実現する学力について，課題探究の目的とその達成プロセスを明確にするため，「様々な課題解決のために，構想を立て実践し，評価・改善・発展をする力」と捉えることにする。

(2) 課題探究プロセスの意図的な分断

課題探究を実現する学力のうち，目的達成のための探究プロセス「構想を立て実践し，評価・改善・発展をする」は，実際の課題探究において，「構想を立てる」，「構想を実践する」，「評価・改善・発展をする」という部分に切り離すことができないものである。しかし，この学力の育成を図るには，一連のプロセスを部分に敢えて分断し，各部分の学力の姿を見定め育成の対象とする必要がある。

そこで，本研究では，目的の達成プロセスを「構想を立てること」,「構想に基づく実践」,「評価・改善・発展をすること」に敢えて分断し，数学的事象に関する各部分を実現する学力の姿を詳らかにすることを目指す。

(3) 数学的事象に関する課題探究を実現する学力の姿

①構想を立てる学力の姿

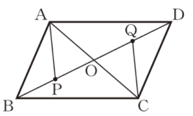
課題解決の構想を立てることは，数学教育において，狭義には問題解決の相「問題を理解すること/計画を立てること」として長年に渡り重視され，我が国における問題解決に基づく授業では「見通し」として根付いている。特に，数学的事象に関する構想を立てる学力には，証明を構想すること，即ち，事柄の前提と結論を演繹的な推論によってどのように結びつ

けるかについて探る(辻山，2012)ことがある。特に，証明を構想する目的を証明の構成に限定すると，結論から解析的に/前提から総合的に中間命題網を生成・拡充するとともに，これら二種類の命題網に共通な命題の有無を検討する(Heinze, et al, 2008)ことが必要である。これらを実現する力を本研究では，証明の方針を立てる力と呼ぶことにする。

例えば， 平成 25 年度全国学力・学習状況調査の数学 B 大問 4 (1)では，次の**問題**に対し，次の**証明の方針１**が示されている。

問題

右の図のように，平行四辺形ABCDの対角線の交点をOとし，線分OB，OD上に，BP＝DQとなる点P，Qをそれぞれとります。
このとき，AP＝CQとなることを証明しなさい。

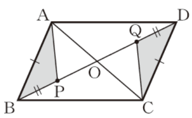


証明の方針１

① AP＝CQを証明するためには，△ABP≡△CDQを示せばよい。

② △ABPと△CDQの辺や角について，等しいことがわかるものを探せばよい。まず，平行四辺形ABCDの性質から，AB＝CDがわかるし，仮定から，BP＝DQもわかっている。

③ ②を使うと，△ABP≡△CDQが示せそうだ。



方針①では，結論の十分条件として，合同な図形の性質を用いて結論 AP=CQ を導くための十分条件が検討されている。ここでは，その例として中間命題△ABP≡△CDQ が解析的に生成されている。続いて，方針②では，三角形の合同条件を用いるために，方針①で見出した△ABP と△CDQ について辺や角の相等関係が検討されている。ここでは，その例として平行四辺形の性質及び問題の仮定から中間命題 AB=CD, BP=DQ が総合的に生成されている。最後に，方針③では，方針①及び②をもとに中間命題網を前提/結論それぞれから拡充していくと△ABP≡△CDQ が共通な命題となる可能性が示唆されている。

このように，結論から前提へ考えるための方針①によって，前提から結論へ考えるための方針②の立案が可能になり，方針①と②によって方針③の立案が可能になる。そのため，授業で証明の方針を立てる力の育成がねらわれていれば，この**問題**に対し子どもが方針①②③と関係を理解し，**証明の方針**を立てられるようになることが意図されることになる。

②構想に基づいて実践する学力の姿

課題解決のために構想に基づいて実践することは，数学教育において，狭義には問題解決の相「計画を実行すること」として長年に渡り重視され，我が国における問題解決に基づく授業では「追究」等として根付いている。特に，数学的事象に関する構想に基づいて実践する学力には，証明の方針に基づいて証明を構成することがある。これは，前提と結論の間に演繹的な連鎖をつくり出すために証明の方針では顕在化していない証明の根拠（定理）や中間命題を見出したり，証明が求められている場の規範に準じ推論の向きを例えば前提から結論に調えたりするものである。

例えば， 平成 25 年度全国学力・学習状況調査の数学 B 大問 4 (1)では，**証明の方針１**に基づく証明の構成が求められている。**証明の方針１**をみてみると，前提と結論の間が演繹的な推論で完全に結びつけられているわけではない。実際，方針①には合同な図形の性質が証明の根拠として用いられることが示されていない。また，方針②では，△ABP と△CDQ について，AB=CD と BP=DQ は示されているが，三角形の合同条件として何を使うのか/そのために更に何が必要になるのかまでは示されてない。証明の構成にあたり，子どもは，△ABP≡△CDQ を示すために更に何がわかればよいかと解析的に考えたり，△ABP と△CDQ について前提から更に何が導けるかと総合的に考えたりするとともに，見出した中間命題を基にいずれの合同条件が使えるかを判断することになる。そのため，授業で証明の方針に基づいて証明を構成する力の育成がねらわれていれば，前述の判断を通じて，子どもが

□ABCD が平行四辺形であるという前提から「∠ABP=∠CDQ」を新たに見出し，証明の根拠として「平行線の錯角は等しいこと」，「２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」などが必要となることに気づくことが意図されることになる。

なお，我が国の中学校数学科の教科書では，証明を前提から結論に向けて構成することが一般的である。これに準じるとすれば，中間命題「∠ABP=∠CDQ」及び必要となる証明の根拠を見出した後，証明を書き上げていく際，演繹的な推論の連鎖のうち，結論 AP=CQ から前提に向け解析的に推論した部分を総合的に推論し直し表現することになる。

③評価・改善・発展をする学力の姿

課題解決のために評価・改善・発展をすることは，数学教育において，問題解決の相「ふり返ってみること」として長年に渡り重視され，我が国における問題解決に基づく授業実践では「振り返り」等として根付いている。言い換えれば，問題解決の相「ふり返ってみること」において課題探究として必要な活動の“中身”を明確にしたものが「評価・改善・発展をすること」であるといえる。特に，数学的事象に関する評価・改善・発展をする学力には，事柄について，証明の過程や結果に基づいて新たな事柄を見出すこと／証明の方針について，証明の方針を立て直すこと／構成された証明について，証明に循環論を見出し修正すること/ 条件変えに応じ事柄や証明を再構成することなどある。

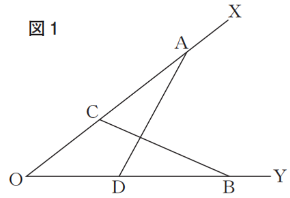
例えば，証明の過程や結果に基づいて新たな事柄を見出すことに関して，平成 20 年度全国学力・学習状況調査の数学 B 大問４では，次の**問題**に対する証明の方針(「**拓也さんのメモ**」) が提示され，小問(2)で証明の方針に基づいて結論 AD=BC を証明し，小問(3)では，証明で用いられた△AOD≡△BOC から演繹的に導けることのうち，結論 AD=BC 以外のことを見出すことが求められている。

問題

下の図１のように，∠XOYの辺OXと辺OY上に，OA＝OBとなるように点Aと点Bを，OC＝ODとなるように点Cと点Dを，それぞれとります。

点Aと点D，点Bと点Cをそれぞれ結ぶとき，AD＝BCとなることを証明しなさい。

図１



（3）拓也さんは，AD＝BCを，△AOD≡△BOCをもとにして証明しました。
△AOD≡△BOCをもとにすると，前ページの**問題**の図形について，AD＝BC以外に新しいことが分かります。それを下のアからエの中から１つ選びなさい。

ア　OC＝OD

イ　OC＝BD

ウ　∠OAD＝∠OBC

エ　∠OAD＝∠BOC

小問(3)の選択肢から，図の見た目に惑わされないのはもちろんのこと，前提 OC=OD(選択肢ア) を選んでしまい循環論に陥ることなく，正答「∠OAD=∠OBC」(選択肢ウ) を選ぶことが意図されていることがわかる。特に，三角形の合同条件には，合同を示すために六組の辺や角の相等関係のうち適切な三組のみが用いられるという特徴がある。この特徴と合同な図形の性質によって正答「∠OAD=∠OBC」が新たに演繹可能となる。

もちろん証明から新たに演繹可能なことには∠OAD=∠OBC 以外にも数多くある。実際，AD と BC の交点を E とすれば，**問題**の証明に基づいて△AEC≡△BED が演繹可能であり，これを基にすると半直線 OF が∠XOY の角の二等分線であることも演繹可能である。このことから，この**問題**における図形の構成手順をもとにすると，同心円によって角の二等分線が作図可能であることを見出すことができる。

課題解決のために評価・改善・発展をする学力について，全国学力･学習状況調査では，数や図形に関する事柄を説明/証明する場面において，この学力の姿が調査問題の解決に

求められる力として具現されている。例えば，事柄を対象として，数に関する事柄を予想し文字式を用いて説明することに基づいて新たな事柄を見出す問題が出題されている（平成20/21/22/24/25 年度数学 B 大問２）。また，証明の方針を対象として，証明の方針を立て直す問題（平成 21/ 25 年度数学 B 大問４）が出題されている。さらに，構成された証明を対象として,循環論を見出し修正する問題(平成 19 年度数学 B 大問４)，条件変えに応じ説明や証明を再構成する問題（平成 19/23 年度数学 B 大問２，平成 22 年度数学 B 大問４）が出題されている。

(4)更なる可能性

①反例による説明に関する学力の位置づけ

我が国の中学校数学では，事柄が正しいことを明らかにするという課題が学習の中心に据えられことが多い。一方，実生活で我々は正しい事柄のみならず，正しいとはいえない事柄にも対処しなくてはならない。そのため，将来に向け適切な意志決定をするためには，事柄が正しくないことをも明らかにできるようになることが欠かせない（茅野，2010）。こうした社会的要請に数学教育が応えるために，課題探究を実現する学力として，反例による説明に関する学力を明確に位置づけておくことが必要である。

ある事柄が全称命題であるとき，その事柄が正しくないことを示すには，反例をただ一つ示せばよい。言い換えれば，反例にはただ一つで事柄の全称性を打ち砕くことができるという機能がある。反例を用いて説明するには，子どもが反例に固有な機能を理解し，適切な反例を見出すことが必要である。さらに，より明確な説明を構成するために，反例による説明の方針を立てること，立てた方針に基づいて説明することが必要になる。

例えば，平成 22 年度全国学力・学習状況調査の数学 B 大問２では，健太さんが課題「連続する３つの奇数の和がどんな数になるか」を探究していく場面において，はじめに次のように３つの場合を調べたところ，いずれの和も９の倍数になったことが示されている。

7，　9，11	のとき	7 ＋ 9 ＋11 = 27
13，15，17	のとき	13 + 15 + 17 = 45
31，33，35	のとき	31 + 33 + 35 = 99

これらの結果から，健太さんは「連続する３つの奇数の和は９の倍数になる」と予想したが，小問(1)において，この予想が正しくないことが宣言され，その説明を完成するために反例を見出すことが求められている。

（1）健太さんは，これらの結果から，**連続する３つの奇数の和は，９の倍数になると予想しました。**

しかし，よく調べてみると，**この予想は正しくない**ことが分かります。このことは，次のように説明できます。

説明

連続する３つの奇数が $\boxed{①}$ ，$\boxed{②}$ ，$\boxed{③}$ のとき，それらの和は，$\boxed{④}$ で，９の倍数ではない。

したがって，連続する３つの奇数の和は，９の倍数であるとは限らない。

上の**説明**の $\boxed{①}$ から $\boxed{④}$ までに当てはまる**自然数**をそれぞれ書きなさい。

反例による説明に関する学力を育むためには,小問(1)の**説明**を子どもが構成できるようにすることが最終的に意図される。そのためには，子どもが予想「連続する３つの奇数の和は９の倍数になる」が正しくないことを示すには，反例をただ一つ示せばよいと理解していることが求められる。続いてこの理解に従って，子どもは，説明の方針「この予想が正しくないことを示すは，連続する３つの奇数であるが，和が９の倍数にならない場合をみつければよい」を立てることが考えられる。そして，説明の方針に基づいて，「(5，7，9) の和は 21 となり９の倍数にならない」などの反例を見出し，これを用いて上記の**説明**を構成できるようになることが期待される。

②証明することを課題探究サイクルとして実現する力

ここまでの考察では，課題探究を実現する学力を育むために，探究プロセス「構想を立

て実践し，評価・改善・発展をする」を「構想を立てる」，「構想を実践する」，「評価・改善・発展をする」という部分に敢えて分断してきた。しかし，本来，探究プロセスは，これらの部分からなるサイクルであり，より高次な課題の解決に向けスパイラル的に絶えず進展していくべきものである。このことから，前記の各部分に関する学力を“総動員”することによって課題探究をサイクルとして実現する力の育成が必要である。

実際，全国学力・学習状況調査数学Ｂの各大問では，課題探究プロセスにそって小問が設定されているとみることができる。例えば，平成 20 年度全国学力・学習状況調査の数学Ｂ大問４では，証明の方針として**拓也さんのメモ**が示され，これに基づく証明の構成が求められ（小問(2)），最後に証明に基づく新たな事柄の発見が求められている（小問(3)）。こうした小問の設定によって課題探究プロセス「構想を立て実践し，評価・改善・発展をする」が具体的な学習として象られている。また，平成 25 年度全国学力・学習状況調査の数学Ｂ大問４では，はじめに**証明の方針１**が示され，次に小問(1)では**証明の方針１**に基づく証明の構成が求められ，最後に小問(2)では，平行四辺形の性質による**証明の方針２**の完成が求められている。課題探究プロセスの眼でみると，「構想に基づく実践」に該当する学習として**証明の方針２**に基づいて証明を構成すること，さらに「評価・改善・発展」に該当する学習として証明に基づいて新たな性質を発見することが学習活動として立ち現れてくる。

このように，課題探究プロセスに基づいて全国学力・学習状況調査数学Ｂの大問における小問の設定及び更なる設問の可能性を検討すると，課題探究を，通り一遍のプロセスとしてではなく，スパイラル的に進展するサイクルとして実現する力が数学的事象に関する考察を通じて育成可能であり，この方向へ授業が改善されるよう促されていることが伺われる。

③学校数学における証明することの再考

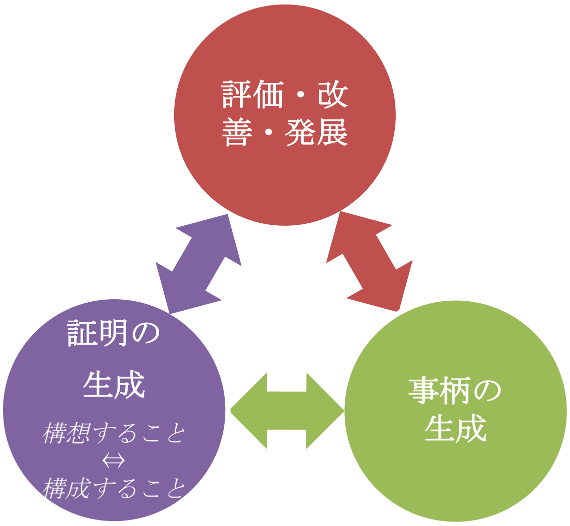
証明することは，数学界において問題解決や可謬主義などに基づいてダイナミックな営みとして展開されている。このことから証明することの本性は課題探究として真正であるといえる。これに対し，学校数学における学習指導では，証明の記述が過度に重視され，その結果として，証明することが多くの子どもにとって入試等の社会的フィルター以外では意味のない通過儀礼に成り下がっている。

社会的要請として課題探究を実現する学力の育成が求められていることを契機として，数学界における証明の過程や活動の本性を見直してみると，そこには前述のような社会的要請に十分応えうるだけの“賜物”が眠っていることがわかる。この潜在力を十分いかすことで数学としての真正さを学校数学における証明の学習に取り戻し社会的要請に応えることが可能になる。具体的には，学習指導において，証明の構成と同等に，証明の方針を立てること，証明の過程や結果を評価・改善・発展することが重視されるようにすることが必要である。また，授業と評価が表裏一体であることを鑑みれば，従来の評価法に縛られることなく，授業改善に応え得る新たな評価法に挑戦していくことが求められる。

さらに，課題探究がある事象に関して解決を要する課題について展開されることに立ち返るならば，課題の中核となる事柄を明らかにすることが欠かせない。証明の方法については，これまで述べてきたように，証明の方針を立て（構想を立て），証明を構成し，その過程や結果を評価・改善・発展することが重視されることが必要である。これに加え，証明することの対象である事柄についても，帰納的な活動から事柄を予想し適確に表現するなど，事柄を生成し評価・改善することも重視されなくてはならない。

このように，課題探究を実現する学力を育成するという視点から，証明することの対象

と方法を見つめ直すと，学校数学において課題探究として証明することを，事柄の生成/証明の生成（構想と構成）/評価・改善・発展の互恵的な関係として次のように捉え直すことができる(宮崎・藤田，2013; Chino et al., 2010)。この捉え直しにより，今後重視すべき学習及び指導が明らかとなり，新たな教材や評価の開発が促進されるであろう。



４． 結語

(1) 本研究の結論

学校数学において，数学的事象に関する課題探究を実現する学力として次のものがある。

A:事柄を生成する。

B:事柄を評価・改善・発展する。

C:証明の方針を立てる。

D:証明の方針に基づいて証明を構成する。

E:証明の過程と結果を評価･改善･発展する。

F:証明することを課題探究サイクルとして実現する。

特に，E には，証明の過程や結果に基づいて新たな事柄を見出す/証明の方針を立て直す/証明に循環論を見出し修正する/条件変えに応じ事柄や証明を再構成する等が含まれている。また，事柄が正しくないことの説明については，反例による説明に関する学力として，A～F に加え，反例の機能を理解すること/反例を見出すことがある。

(2)「活用する力」β：日常/数学的事象の区別

全国学力・学習状況調査中学校数学における「活用」の問題作成の枠組み(国立教育政策研究所，2013)は，「活用する力」αβγと，数学的な知識・技能などが「活用される文脈や状況」,「活用される数学科の内容（領域）」,「用いられる数学的なプロセス」という３つの視点で主に構成されている。特に「活用する力」αとβは調査問題作成の基本理念*1に基づいて次のように定められている：α「知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力」,β「様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力」。このうち，課題探究を実現する学力にあたる「活用する力」βの「数学的プロセス」はβ1とβ2に大別され次のように示されている。

β1:問題解決のための構想を立て実践すること

β1(1)：筋道を立てて考えること

β1(2)：解決の方針を立てること

β1(3)：方針に基づいて解決すること

β2：結果を評価し改善すること

β2(1)：結果を振り返って考えること

β2(2)：結果を改善すること

β2(3)：発展的に考えること

「解決」や「結果」という言葉を用いることにより，日常的/数学的事象の双方に「活用する力」βが適用できるよう工夫されていることが伺える。これにより，平成 19 年度数学 B 大問３「サッカー大会」では，日常的事象における数学的プロセス「β2(2)：結果を改善すること」が問題として具現されている。

その反面，数学的事象に固有な「活用する力」βは,「数学的プロセス」として暗示され，読み手の見識に委ねられる形となっている。例えば，β1(2)の「解決の方針」には恐らく立式や説明・証明の方針が含意されていると思われるが，このままでは「解決の方針」が曖昧に意味づけられ,内容に固有な方針の「数学的プロセス」が学習指導や評価に十分いかされなくなる可能性がある。

数学的事象に固有な「活用する力」βの「数学的プロセス」を明確にする方策として，事象を日常的/数学的に区別し，各々について「活用する力」βの数学的プロセスを示すことが考えられる。例えば，β2(1)「結果を振り返って考えること」であれば,「証明の過程や結果に基づいて新たな事柄や証明を見出すこと」を「数学的プロセス」として例示することが考えられる。これにより,「振り返って考える」ことの意味が明確になり学習指導の改善が進めやすくなることが期待される。

(3)今後の課題

数学的事象に関する学力には数学化に関するものがあり, 全国学力・学習状況調査（中学校数学）では「活用する力」αとして位置づけられている。実際,「数学的なプロセス」α1 として「日常的な事象等を数学化すること」とされていることから，日常的事象の数学化に加え，数学的事象の数学化が“射程”に収められていることが伺える。数学的事象の数学化には,「特殊化−一般化」,「公理化，組織化・体系化」など，日常的事象の数学化にはあまりみかけられない側面がある。そのため，数学的事象の数学化を実現する学力を特定し,「活用する力」αについても，事象を日常的/数学的に区別し, それぞれについて数学的プロセスを明示することが必要である。

さらに数学教育では，数学化や課題探究等を支える高次の学力として，事象の関係を捉える/複数の事象を統合する/多面的にものごとをみるなどの育成が意図されてきた。これらの学力は全国学力・学習状況調査では「活用する力」γとして位置づけられているが，ジェネリック･スキル育成の観点から再考し，今日的意義を一層明確にしておく必要がある。

註

＊1:全国的な学力調査の実施方法等に関する専門家検討会議による報告書『全国的な学力調査の具体的な実施方法等について（報告)』（平成18年4月）

引用・参考文献

茅野公穂 (2010). 学校数学での理由の説明･証明を捉える枠組み. *日本科学教育学会年会論文集 34,* 87-88.

Chino, K., Fujita, T., Komatsu, K., Makino, T., Miyakawa, T., Miyazaki, M., Tsujiyama, Y. (2010). An assessment framework for students' abilities/competencies in proving. *Proceedings of EARCOME5* (Vol. 2, pp.416-423). Tsukuba: Inamoto Printig Co. Ltd.

Hanna, G. (2007), The ongoing value of proof, In Boero, P. (Ed.) *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice,* (pp. 3-16). Rotterdam: Sense publisher.

Heinze, A., Cheng, Y. H., Ufer, S., Lin, F. L., & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM, 40(3)*, 443-453.

国立教育政策研究所 (2013).『*平成25年度　全国学力・学習状況調査解説資料*【*中学校数学*】. Retrieved from http://www.nier.go.jp/13chousa/pdf/13kaisetsu_chuu_suugaku.pdf

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

宮﨑樹夫, 藤田太郎(2013). 課題探究として証明することのカリキュラム開発:我が国の中学校数学科における必要性と, これまでの成果, *日本数学教育学会　第1回春期研究大会論文集,* pp.　1−8.

NCVER (2004). *Generic skills in vocational education and training: Research readings* (Edited by Jennifer Gibb). Retrieved from http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED493988.pdf

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. NJ: Princeton University Press.

清水禎文 (2012). ジェネリック・スキル論の展開とその政策的背景, *東北大学大学院教育学研究科研究年報*, 61(1), 275-287.

辻山洋介 (2012). 学校数学における証明の構想の意義に関する研究. *数学教育学論究 95.* 29-44.

＊本研究は科研費(No. 23330255, 23330251, 24243077, 26282039)の支援を受けています。