

課題探究として証明することのカリキュラム開発  
－ 我が国の中学校数学科全領域における開発枠組みの構築 －

Curriculum Development of Explorative Proving:  
Proposing the frameworks to Develop Curriculum  
of All Areas of Junior High School Mathematics in Japan

宮崎樹夫  
信州大学

岩永恭雄  
信州大学

松岡 樂  
信州大学

要 約

課題探究として証明することは数学として真正な営みであり、この営みを学校数学で実現する力は資質・能力として課題探究力に該当する。本研究では、中学校数学における証明の学習が課題探究力を育成し得るものとなるよう、課題探究として証明する力に着目し、我が国の中学校数学科全領域におけるカリキュラムの開発を目的とする。本稿では、教科における資質・能力論の“紐解き”と“結びつけ”について意義と現状を指摘し、数学教育における課題探究力を位置づけ、本研究における「課題探究として証明する力」の捉えを示す。その上で、本研究全体の目的、方法、意義と現在の進捗状況を概観し、最後に本分科会における成果報告のタイトルと今後の展望について述べる。

キーワード：課題探究，証明，中学校数学，カリキュラム，資質・能力

1. 教科における資質・能力論の展開

古来より『授人以漁則可解一生之需』と語り継がれているように、ものを知り方を修め活かすことは教育の極致へ至る道であろう。その意味では、昨今の国際的な潮流である、進歩的なコミュニティを発展させる基礎としての「ジェネリックスキル」の重視(清水禎文, 2012), 及び、その共有要素である「概念的／思考スキル」(NCVER, 2004, p.8)の育成は至要であるといえる。

特に、学校教育は教科教育を主軸としているた

め、育成すべき資質・能力を各教科等の具体的な学習成果として“紐解くこと”, その上で、各教科等の内容・場面に“結びつけること”が求められることになる(Pepper, 2011)。

我が国の算数・数学科では、育成されるべき資質・能力の“紐解き”は既に始まっている。実際、全国学力・学習状況調査の「活用する力」と、広義の「数学的に考える力」、即ち「算数的活動や数学的活動を遂行する資質・能力」(清水静海, 2014, p. 44)の関係が「数学的なプロセス」(全国

学力・学習状況調査)として整理され学力論の再構築が展開されている(清水美憲, 2014)。

資質・能力論の高まり,そして,各教科での“紐解き”に続いて内容・活動との“結びつけ”が既に始まっている。実際,育成すべき資質・能力に裏打ちされた評価の姿が特定の課題に関する調査や全国学力・学習状況調査等として明確にされ,定期テストや入学試験等の問題,解答形式及び採点の在り方が見直されてきている。評価の改善に続いて,全国学力・学習状況調査に基づく「授業アイデア例」のように,国として授業改善の方向性が具体例で明示されるに伴い,先進的な学校でのカリキュラム開発(鈴木・傍士・峰野, 2014)や先鋭的な授業が全国で数多く実践されるようになってきている。こうした取組は,学校や地域全体が大規模調査の結果をエビデンスとして活かすことで組織的に展開されるようになってきている。

しかし,小学校や中学校,あるいは両者を一貫したカリキュラムは資質・能力等により全体像がデザインされている段階にあり,何を何故その順番で扱うのか,即ちスコープとシーケンスが理論的に規定される段階には至っていない状況にある。

## 2. 課題探究として証明する力

### (1) 数学教育における課題探究力の位置

資質・能力のうち,我が国では「様々な課題解決のために,構想を立て実践し評価・改善する力」\*1,「活用する力」\*2,「課題解決力」\*3等の言葉で,課題探究力の育成が重視されている。

科学での生産的な営みに目を向けると,探究は,疑い(doubt)を信念(belief)に置き換える奮闘(struggle)であり(Peirce, 1877/1982),この奮闘は,携わる者の共同体で三種類の推論(アブダクション, 演繹, 帰納)が相互に機能することにより遂行される。その際,知識の真偽は共同体による長期的な議論の収束に依存するため,知識の可謬性と探究の方向の開放性が重視されることになる(Siegel & Borasi, 1994)。科学としての探究を教育に“投影”すると,知識は協働的な集団での探究を通じて反省的に生成され,学習は目的が明

確な場面での個人及び社会的な相互作用による意味形成という生産的な過程であり,指導は探究の豊かな環境と学習者の共同体を支援する営みとなる(Siegel, Borasi & Fonzi, 1998)。

数学教育では,問題解決(Polya, 1957)が学校段階や内容領域を横断して研究と実践において長きに渡り重視されている。資質・能力として課題探究力が数学教育で“紐解かれる”ことによって,問題解決の“姿”が先鋭化され得る。実際,探究における疑いの発生に着目すると,子ども自らが解決の必要を感じる問題を「課題」として捉える価値が再確認される。他方,疑いの解消による信念の獲得に着目すると,解決の計画における見通し・構想の充実と精緻化が一層重要視されることが期待できる。

また,知識の可謬性と探究の方向の開放性に着目すると,数学教育研究では科学哲学における可謬主義(Lakatos, 1978)が研究や実践の基盤とされており,この学問的意義と教育的価値が議論の余地を残しながらも広く認められている(Hanna, 2007)。こうした“土壌”において,問題解決の振り返りを,信念獲得のために解決の過程や結果を評価・改善等することとして詳らかにすることにより,解決での間違いや誤りを更なる課題探究の原動力とするダイナミックな過程が一層顕在化されるようになる。その上で,共同体による長期的な議論の収束に着目すると,研究や実践が形だけの「学び合い」に陥ることなく,漸進的な真理観のもと探究が実現され得るよう,即ち,疑いが一定の信念に確実に置き換えられるよう,個人追究や他者との共同追究の在り方が見直され,必要に応じ再生・更新されることが期待できる。

### (2) 証明の学習・指導の苦悩

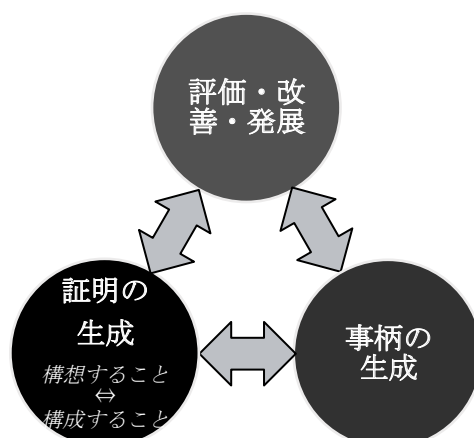
我が国の数学教育において証明の学習は,1800年後半から時代の要請に応じてその形を変えながらも,正しさについて論理的に考えるという証明の本性によって日本人の考え方を“ととのえる”ものとして大切にされ続けてきた(清水静海, 1994)。この重要性を真摯に受け,証明の学習指導は弛まず改善され続けており,先達による智恵

と勇気により一定の成果を収めてきたのは明らかである(例えば小関他, 1987 等)。しかし, 全国学力・学習状況調査によると証明について中学生の学習状況は決して望ましいとはいえない。また, 多くの子ども達にとって証明の学習は学校で一種の“通過儀礼”に成り下がってしまい, ある目的や状況において何故証明が求められるのか, その目的や状況に応じ何をどのように証明すればよいのか, 証明を通じて何が新たに得られるのか等について主体的に思考し表現することが疎かにされているのではないかと懸念される。

### (3) 課題探究として証明する活動

数学において証明する活動は, 相対的な真理観(Fawcett, 1938), 発見学(Polya, 1962), 可謬主義(Lakatos, 1976)に支えられ, ダイナミックで生産的な諸側面を有し, それらが互いに共鳴し合い, 知的な“息吹”を形づくっている。即ち, 証明する活動には, その側面として, 日常的／数学的事象に関する事柄を帰納的／演繹的／類比的に生成すること, そして, 生成された事柄の証明を生成することがある。また, 事柄と証明の生成で立ち止まることなく, 現実世界や数学世界における事柄や証明の不確かさを契機に, 事柄や証明のみならず知識や概念までも精選する, さらに, 事柄(命題)について組織化・公理化・体系化(Freudenthal, 1971; 杉山吉茂, 1985; Devilliers, 1990 他)という現実や数学の数学化の諸側面が展開されていく。言うまでもなく, これらの諸側面が相互に作用し合うことで「数学的活動」(島田茂, 1995)が進展していく。

このように, 数学における証明する活動を見つめ直すと, そこに課題探究としての本性が内在しているといえる。実際, 知識の可謬性のもと, 事柄や証明の正誤は疑いを発生させ, 事柄及び証明の生成は共同体による長期的な議論の収束を通じて疑いの解消による信念を獲得させる。そこで, 本研究では, 課題探究として証明する活動を, 事柄の生成, 証明の生成(構想／構成), 評価・改善・発展及び三側面の相互作用による営みとして捉える(宮崎・藤田, 2013)。



### (4) 課題探究として証明する力とその育成

証明学習を通じ課題探究力を育むには, 課題探究として証明する活動が学習として展開されるに留まらず, その活動を実現する力の習得が目指されなくてはならない。そこで, 本研究では, 課題探究として証明する活動を実現する力を, 「課題探究として証明する力」と捉えることにする。

課題探究として証明する力を育むためには, 適切な内容・活動を系列化するカリキュラムが欠かせない。とはいえ, 課題探究として証明する活動が包括的であるため, このままでは, 内容・活動の系列化は難しい。そこで, 課題探究として証明する活動について探究の対象と方法に目を向けてみると, 証明の生成そのものについて探究が展開されるものと, 事柄や証明の生成を通して探究が展開されるものを見出すことができる。前者は, 証明の生成に限定された課題の探究であり, 後者は, 証明の生成に限定されない課題の探究といえる。もちろん, 両者は深く結びつき合っているものであり安易に切り離されるものではない。

一方, カリキュラム開発では, 学習が漸進的に高まるよう, この両者を敢えて区別し, いずれかを基軸とすることが必要となる。証明の学習状況を鑑みれば, 喫緊の課題は証明の生成そのものである。そこで, 本研究では, 証明の生成についての探究を主軸として据え, 課題探究として証明する力を育むカリキュラムを開発し, 事柄や証明の生成を通して探究が展開される活動の実現をも適材適所で考慮していくことにする。

### 3. 「内容-活動対応表」と能力の対応

#### (1) 「内容-活動対応表」の意味・役割

本研究では、カリキュラムの内容とその順序に関して「内容-活動対応表」を作成してきた。この表は、中学校学習指導要領解説数学編の「第2章目標及び内容 第3節 各学年の内容」に基づき、各内容で意図される学習レベル及び移行を整理したものである。

従来の「内容-活動対応表」では、学習指導要領の内容に基づいて各内容で実現可能な活動が整理されていた。この整理は本研究によるカリキュラムが現学習指導要領を逸脱することなく、課題探究として証明する学習を実現し得るための工夫であった。

#### (2) 内容・活動から能力への“結びつけ”

一般に、ある汎用的な能力が僅かな個別の内容や活動で十分に育成できるということはありません。能力の高い汎用性を保証するには、多様な内容や活動と豊富な時間が可能な限り必要であろう。

このように考えるならば、カリキュラムの目的を課題探究として証明する活動の実現から、課題探究として証明する力の育成へと先鋭化するとしても、それによって、課題探究として証明する力の育成に必要な内容・活動が精選されるのではなく、十分な内容・活動が充当されるべきである。つまり、資質・能力の“結びつけ”にあたり、「能力⇒内容・活動」ではなく、「内容・活動⇒能力」という方向を明確にすることが必要となる。

この方向性により、今後の学習指導要領改訂に伴う内容の変更に対し柔軟な対応が可能となる。それに加え、課題探究として証明する力を「数学的に考える力」及び「数学的なプロセス」に位置づけることが可能になるとともに、数学教育の外からの“声”「中学校数学科での証明学習によって何ができるようになるのか」に対し一定の答えをカリキュラムの仕組みとして発することが可能になる。

### 4. 研究の全体像

#### (1) 研究全体の目的

本研究では、学校数学における証明の学習が数学における真正な営みを裏打ちされるとともに、課題探究力を育成し得るものとなるよう、課題探究として証明する力に着目し、特に我が国の中学校数学科において、課題探究として証明する力を育むカリキュラムの開発を目的とする。

#### (2) 目的達成の方法（概要）

目的達成のために、次のように進める。

- A) 中学校数学科の各領域における証明の特性に応じカリキュラムの開発枠組みを定め、これに基づいてカリキュラムの範囲とシーケンスを定める。
- B) 現行の中学校学習指導要領解説数学編の「第2章目標及び内容 第3節 各学年の内容」を対応させ、この対応に基づいてカリキュラムの授業化(宮崎・永田・茅野, 2014)を進める。
- C) 開発されたカリキュラムと、その授業化に基づいて評価(評価問題と趣旨, 解答類型等)を開発し実施する。

カリキュラム開発研究として、方法Bはカリキュラムの実行可能性の判断に不可欠であり、方法Cはカリキュラムの達成可能性の見極めに不可欠である。なお、方法B及びCいずれの成果も、方法Aとしてカリキュラムの再考にいかされる。

#### (3) カリキュラムの領域横断的な開発の意義

課題探究として証明する力に着目し、中学校数学科全領域でカリキュラム開発を進めることには少なくとも次の3つの意義がある。

第一に、中学校数学科として、資質・能力論へのカリキュラムレベルでの対応可能性が証明の学習で例証される。前述の通り、資質・能力論への対応は、各教科で評価改善、授業改善として既に進行している。本研究において、中学校数学科全領域で課題探究として証明する力を育むカリキュラム開発が一部でも達成されることは、中学校数学科で資質・能力論をカリキュラムとして紐解き内容・活動に結びつけることが可能であるこ

との例を生み出すことを意味する。

第二に、課題探究として証明する力を育み得る潜在的な学習をカリキュラムとして充実できる。従来、我が国の中学校数学科では、主に領域「図形」で“論証”として証明の学習が本格的に扱われてきた。また、領域「数と式」でも“文字式による説明”等として顕在的に扱われてきた。これに対し、領域「関数」や「資料の活用」においても“事柄が正しい理由を説明する”ことは、実際に学習活動として展開され、評価の対象とされているにもかかわらず、その扱いは解決や考察の方法に過ぎず、領域「図形」に比べると潜在的なものに留まっていると言わざるを得ない。しかし、こうした潜在的な学習が資質・能力として課題探究力の育成に込められるのであれば、その学習の充実がカリキュラムとして図られるべきである。

第三に、各領域における証明する力の役割と関係が鮮明にされることにより、全領域で証明する力を育む意義が明確にされる。実際、領域「数と式」及び「図形」では、数学世界の中で証明が進められる。両者の証明には簡潔さ・緻密さ等に関して差異があるが、ともに数学世界を考察・堪能する“メガネ”として重要である。一方、領域「関数」では、前二領域と同様に数学世界での証明の他に、数学的モデル化過程として現実世界と数学世界の間で証明が進められる場合がある。この場合、証明には数学世界での展開に加え、現実世界から数学世界への定式化、逆に数学世界から現実世界への解釈・評価が含まれることになる。また、領域「資料の活用」では、領域「関数」と同様に、現実世界と数学世界の間で証明が進められるとともに、数学世界での論理的な判断に加え、現実世界での因果や慣習等による判断が重要になる。こうしてみると、数学世界と現実世界における証明の意味・役割が領域によって異なることが鮮明になるとともに、考察の“メガネ”として各領域での存在理由が明らかになる。このことは、中学校数学科の全領域でそれぞれの特性に応じ、課題探究として証明する力を育む意義といえるだろう。

## 5. カリキュラム開発の進捗状況

領域「数と式」及び「図形」については、カリキュラムの開発枠組みを定め、これに基づいてカリキュラムの範囲とシーケンスが「活動-内容対応表」として定め終えている。既に研究者と実践者の協働により「企画・立案→実践→評価・改善」という循環・発展的なプロセスを経て複数の授業化が進展し、これを承けている。なお、授業化の進展に伴い、カリキュラムの開発枠組みの精緻化が進められている。

一方、領域「関数」及び「資料の活用」については、他の二領域に比べ証明が事象を考察する方法とされてはいるものの、探究において発見と正当化の文脈を切り分けるのが難しく、如何なる証明が望ましいのかについて規範が明確ではない。そのため、カリキュラムの開発枠組みに先立ち、各領域における望ましい証明の姿を浮き彫りにする取り組みが必要とされ、その成果を基に開発枠組みの構築が進められている。

## 6. 成果報告と今後の展望

本分科会では、各領域で課題探究として証明する力を育成するカリキュラムについて開発枠組みに関する成果を報告する。なお、領域「数と式」については領域「図形」の枠組みを準用しているため、まとめて報告する。

- ・ 領域「数と式」、「図形」の開発枠組みの精緻化
- ・ 領域「関数」での証明の学習レベル設定
- ・ 領域「資料の活用」の開発枠組みの構築

今後、領域「数と式」、「図形」については、授業化に加え評価の開発に進み、領域「関数」、「資料の活用」については、開発枠組みに基づくカリキュラムの構築及び授業化を進めていく予定である。特に評価の開発にあたっては、数学科での学習成果が教科横断的に活用されることを視野に入れていくものとする。

## 注

\*1:中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会審議経過報告 H18/2/13

\*2:全国的な学力調査の実施方法等に関する専門家検討会議 H18/4

\*3:育成すべき資質・能力を踏まえた教育目標・内容と評価の在り方に関する検討会 ―論点整理―(3/31/2014)

謝辞 本研究は科研費(No. 23330255,23330251, 24243077, 26282039, 15K12375)の支援を受けています。

## 引用・参考文献

茅野公穂, 佐々裕之, 宮崎樹夫, 岩永恭雄, 松岡樂(2015). 課題探究として証明することのカリキュラム開発:領域「数と式」,「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化. 日本数学教育学会 第3回春期研究大会論文集.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof*. AMS PRESS.

Freudenthal, H. (1971). *Geometry between the devil and the deep sea*. *ESM*, 3(1), 413-435.

小関熙純. (1987). 図形の論証指導. 明治図書.

NCVER. (2004). *Generic skills in vocational education and training: Research readings* (Edited by Jennifer Gibb). Retrieved from <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED493988.pdf>

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

宮崎樹夫, 藤田太郎(2013). 課題探究として証明することのカリキュラム開発:我が国の中学校数学科における必要性和,これまでの成果. 日本数学教育学会 第1回春期研究大会論文集, 1-8.

Perce, C.S. (1877/1982). The fixation of belief, in Thayer, H.S. (Ed) *Pragmatism: The Classic*

*Writings*, Indianapolis, Indiana, Hackett, pp. 61-78.

Pepper, D. (2011). Assessing key competences across the Curriculum - and Europe, *European Journal of Education*, 46(3), 335-353.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: John Wiley.

島田茂 (1995). 算数・数学科のオープンエンドアプローチ:授業改善への新しい提案. 東京: 東洋館.

清水静海. 1994. 「論証」. 『CRECER 中学校数学科教育実践講座 第6巻 図形と論証』(pp. 204-236). ニチブン.

清水静海 (2014). 数学的に考える力とは, 新しい算数研究, 523, 41-44.

清水禎文 (2012). ジェネリック・スキル論の展開とその政策的背景, 東北大学大学院教育学研究科研究年報, 61(1), 275-287.

清水美憲 (2014). 数学教育における学力論の再構築に向けて, 日本数学教育学会 第2回春期研究大会論文集, 1-4.

Siegel, M., & Borasi, R. (1994). Demystifying mathematics education through inquiry. In P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematics education* (pp. 201-214). London: Falmer.

Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading, *JRME*, 29(4), 378-413

杉山吉茂. 1986. 『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』. 東洋館.

鈴木誠, 傍士輝彦, 峰野宏祐 (2014). 興味・関心を高め, 数学的に考える力を育む指導: 数学を見いだす活動を促す教材開発を中心として, 東京学芸大学附属世田谷中学校公開研究会資料, 40-44.