第３回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

課題探究として証明することのカリキュラム開発
−領域「数と式」,「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化−

Curriculum Development of Explorative Proving:
Refining the Framework to Develop Curriculum of
'Numbers and Algebraic Expressions' and 'Geometrical Figures'

茅野公穂	佐々祐之	宮﨑樹夫	宮川健	中川裕之	岩永恭雄	松岡樂
信州大学	北海道教育大学	信州大学	上越教育大学	大分大学	信州大学	信州大学

要　約

課題探究として証明するという営みは数学として真正であり，この営みを学校数学で実現する能力はジェネリックスキルとして欠かせない。そこで本研究は次の問いに答える：課題探究として証明する力を育成するために，どのようなカリキュラムの開発が可能か。この問いに対し，本稿では，中学校数学科の領域「数と式」及び「図形」に関するカリキュラム開発の旧枠組みを精緻化し，新枠組みに基づく内容の配列を設定する。枠組みの精緻化に関して，旧枠組みの理論的な課題を特定し，証明の生成と評価・改善・発展の間における学習レベルの移行原理を定め，各学年とレベル移行／移行過程の対応を明確にした。内容の配列に関して，課題探究として証明する力に着目し，各移行過程に対応する内容の配列を「内容−活動対応表」として整理し直した。

キーワード：課題探究，証明すること，中学校数学，カリキュラム開発

１. 課題探究として証明する力への着目

国際的にジェネリックスキルの育成が叫ばれ（清水禎文，2012），各教科で学力として“紐解かれる”とともに，教科の内容・活動に“結びつけられる”時代に入っている(Pepper, 2011)。我が国でも資質・能力論が高まりをみせ，「課題探究力」が，「様々な課題解決のために，構想を立て実践し評価・改善する力」[*1]，「活用する力」[*2]，「課題解決力」[*3] 等の言葉で重視されている。一方，証明するという営みを精査すると，課題探究が古来より重要な役割を担っており，この真正な営みを学校数学で具現することにより，証明の学習を通じて課題探究力を育むことができる。

そこで，本研究では，事柄の生成，証明の生成（構想／構成），評価・改善・発展という三側面の相互作用からなる，課題探究として証明する活動(宮﨑・藤田，2013)に着目し，この活動を実現する力を「課題探究として証明する力」と捉え，この力を中学校数学科で育成するカリキュラムの開発を目的とする（宮﨑・岩永・松岡，2015）。

２.目的と方法

前記の目的に関し，領域「数と式」及び「図形」では，カリキュラム開発枠組みが既に開発され，これに基づいて内容とその順序に関する「内容ー活動対応表」が作成されている(宮崎・永田・茅野，2014)。その上，「内容ー活動対応表」に基づく授業化の進展[*4] に伴い，カリキュラムの開発枠組みの更なる精緻化が必要となっている。

そこで，本稿では，次の問いに答えることを目的とする：カリキュラム開発の旧枠組みをどのように精緻化できるか／その枠組みに基づくと，内容と配列はどのように整理されるか。

この目的達成のために，はじめに，旧枠組みを概説し，その理論的な課題を整理する。次に，課題の解決に必要となる学習レベルの移行原理を定め，各学年とレベル移行／移行過程の対応を明確にする。最後に，課題探究として証明する力に着目し，各移行過程に対応する内容の配列を「内容ー活動対応表」として整理し直す。

３.カリキュラム開発の旧枠組みの課題

(1)カリキュラム開発の旧枠組み

領域「図形」では，証明の生成に焦点化し，証明の構想（横軸）と，証明の構成（縦軸）に基づいて，カリキュラム開発の枠組みを次のように設定した(宮崎・永田・茅野，2014)。

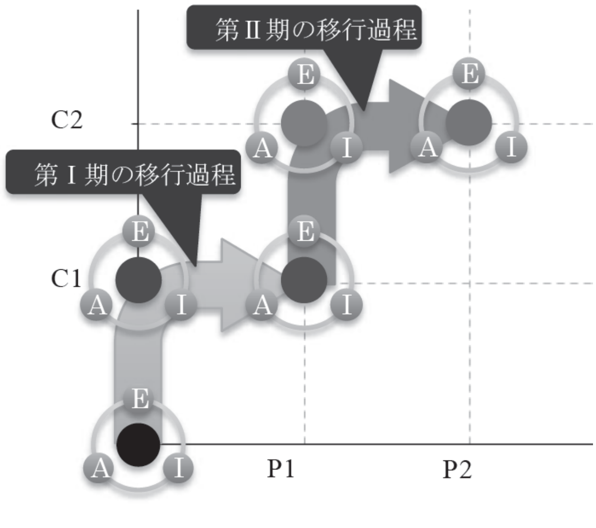

図１　カリキュラム開発の旧枠組み

証明を構想することの学習に関するレベルとして次の二つを設定する。

P1：前提と結論を結びつけるための着想，必要となる対象と方法を捉える。

P2：前提と結論を結びつけるために双方から中間命題の関係網を拡充する。

一方，証明を構成することの学習に関するレベルとして次の二つを設定する。

C1：前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する。

C2：演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化して前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する。

それぞれのレベルの組み合わせと学習レベルの移行可能性に関する考察（宮崎・永田・茅野，2012）により，第Ⅰ期の移行（学習レベル O ➡(P1, C1)）と，第Ⅱ期の移行（学習レベル (P1, C1)➡(P2, C2)）が定まり，いずれの学習レベルでも，評価 Examine・改善 Improve・発展 Advance が意図される。学年との対応については，第Ⅰ期の移行が第１学年で，第Ⅱ期の移行が第２学年及び第３学年で達成されることにした（図１）。

なお，領域「数と式」では，我が国の中学校数学科で意図されている証明に即し，第Ⅱ期の移行過程を(P1, C1)から(P2, C1)として，学習レベルの移行過程を準用する（図２）。

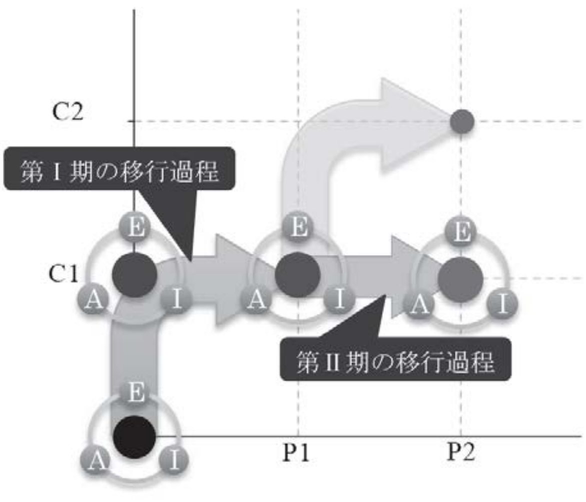

図２　領域「数と式」での準用

(2) 旧枠組みの理論的な課題の特定

前記の旧枠組みの課題は，次の点である。

A) 証明の生成（構想すること P⇔構成すること C）と，評価・改善・発展の関係の不明確さ

B) カリキュラム開発における，事柄の生成と証明の生成の関係についての考察の欠如

C) 第Ⅰ期及び第Ⅱ期の移行過程と各学年との対応関係の不明確さ

課題 A に関して，旧枠組みでは，5つの学習レベル（O, C1, (P1, C1), (P1, C2), (P2, C2)）に評価・改善・発展(EIA)が単純に組み合わされている。このままでは，第Ⅰ期及び第Ⅱ期における証明の構想と構成に関する学習レベルの移行過程は明らかであるものの，その途中で評価・改善・発展に関して如何なる学習レベルを経るのかが明らかにされているとはいえない。

課題 B に関して，旧枠組みでは，課題探究として証明する活動における，事柄の生成と証明の生成の関係について明確に言及されていない。課題探究として証明する力のカリキュラム開発として両者の関係について考察が必要である。

課題 C に関して，特に第Ⅱ期の移行過程が第２学年と第３学年に跨がっている。そのため，いずれの学年に第Ⅱ期のどの部分が該当するのかが明らかではない。

４. カリキュラム開発枠組みの精緻化

(1) レベル移行原理の顕在化（課題 A 対応）

旧枠組みの課題 A に関し，証明の生成に関する評価・改善・発展には次のものが含まれている：証明の過程や結果に基づいて新たな事柄を見出す／証明の方針を立て直す／証明に循環論を見出し修正する／条件変えに応じ事柄や証明を再構成する等 (宮﨑，2014, p.33)。これらは，証明の生成に関する各学習レベル［O, C1, (P1, C1), (P1, C2), (P2, C2) ］に到達した後に，そのレベルで実現され得る。

そこで，カリキュラムとして証明の生成と評価・改善・発展の関係を明確にするために，レベルの移行原理として【証明の生成での移行(P/C↑)⇒評価・改善・発展の実現(+EIA)】を顕在化する。即ち，はじめに，構成(C)，もしくは，構想(P)に関するレベルが向上し，その後，向上したレベルで評価・改善・発展が意図される。

なお，ある学習レベルでの評価・改善・発展が完了すると，証明の生成に関する次の学習レベルに向けて移行が始まる。例えば，第Ⅰ期の移行過程において，学習レベル C1＋EIA に達すると，証明の生成に関して C1 から(P1, C1)へレベルが移行する。続いて，第Ⅱ期の移行過程において，上記の原理により(P1, C1)から(P1, C1)+EIA に移行する。次に，証明の生成に関して(P1, C1)から(P1, C2)へレベルが移行する。

(2) 主軸としての証明の生成（課題 B 対応）

課題探究として証明する活動について，その探究の対象と方法に着目してみると，証明の生成そのものについての探究と，事柄や証明の生成を通しての探究に大きく分かれる。課題の差異でみれば，前者は，証明の生成に直結する課題についての探究であり，後者は，証明の生成に直結しない課題についての探究である。

数学において前記二種類の探究は渾然一体となっているのが自然であるが，学校数学のカリキュラム開発では，子どもの学習が無理なく向上するように，これら二種類の探究を一端切り離し，内容・活動の系列を通じてそれぞれが高まっていくように設える必要がある。特に，全国学力・学習状況調査等で浮き彫りにされた証明の学習状況を鑑みるならば，証明の生成に関する学習状況の改善が急務であるといえる。

そこで，本研究では，証明の生成についての探究を主軸として据え，課題探究として証明する力を育むカリキュラムを開発する。なお，事柄の生成と証明の生成のいずれも課題探究として証明する力の育成に欠かせない。そのため，事柄や証明の生成を通して探究が展開される活動の実現をも適材適所で考慮していくものとする。

(3) 各期の移行と学年の対応（課題 C 対応）

課題 C「第Ⅰ期及び第Ⅱ期の移行過程と各学年との対応関係の不明確さ」に関して，旧枠組み

では，証明の生成に関する学習レベルの移行のみに基づいて次の二つの移行を定めていた。

第Ⅰ期の移行：O+EIA➡ (P1, C1)

第Ⅱ期の移行：(P1, C1) ➡ (P2, C2)+EIA

一方，学習指導要領解説等を勘案すると，中学校第2学年の領域「図形」では，学習レベル(P2, C2)+EIA への到達が意図されている。そこで，学年との対応について従来通り，第Ⅰ期の移行が第1学年，第Ⅱ期の移行が第2学年とする。その上で，第3学年では，証明の生成に関して第2学年で既にレベルが(P2, C2)に到達していることから，(P2, C2)及び評価・改善・発展(+EIA)を強化することにする。

(4)各期における移行の構成

レベルの移行原理に従うと，領域「図形」における各期の移行過程は次のように構成されることになる。(表1及び表2において，「➡」は移行の始点と終点，「⇒」は証明の生成における移行，「↑」は評価･改善･発展への移行を意味する。)

表1　各期の移行過程（領域「図形」）

期	移行	移行過程
Ⅰ	O+EIA ➡(P1, C1)	O ⇒ C1 C1 ↑ C1+EIA C1 ⇒ (P1, C1)
Ⅱ	(P1,C1) ➡ (P2,C2)+EIA	(P1,C1)↑(P1, C1) +EIA (P1,C1)⇒ (P1,C2) (P1,C2)↑(P1,C2) +EIA (P1,C2)⇒(P2,C2) (P2, C2)↑(P2, C2)+EIA

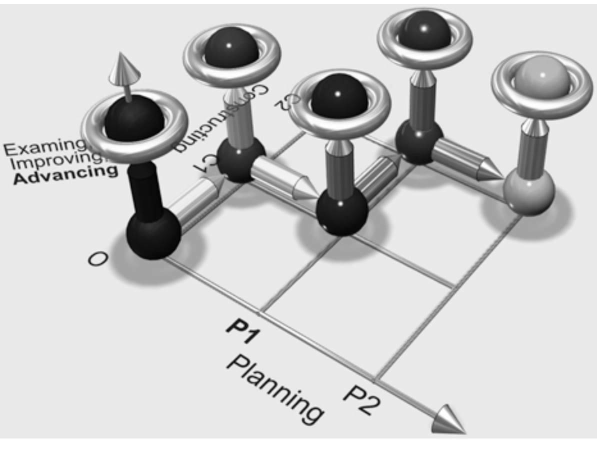

図3　領域「図形」での移行過程全体

一方，領域「数と式」における各期の移行過程は前述の枠組み準用により次の構成となる。

表2　各期の移行過程（領域「数と式」）

期	移行	移行過程
Ⅰ	O+EIA ➡(P1, C1)	O ⇒ C1 C1 ↑ C1+EIA C1 ⇒ (P1, C1)
Ⅱ	(P1,C1) ➡ (P2,C1)+EIA	(P1,C1)↑(P1, C1) +EIA (P1,C1)⇒ (P2,C1) (P2, C1)↑(P2, C1)+EIA

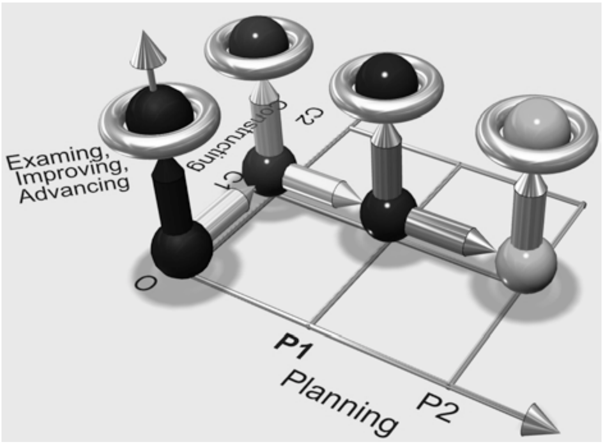

図4　領域「数と式」での移行過程全体

5．内容−活動対応表：領域「数と式」「図形」

(1)領域「数と式」[内容−活動]対応表

表3　第1学年(数と式)内容−活動対応表

内容	活動
式を用いて表したり読み取ったりすること	O ⇒ C1
	C1↑C1+EIA
	C1 ⇒(P1, C1)

表4　第2学年(数と式)内容−活動対応表

内容	活動
文字を用いた式でとらえ説明できること 目的に応じた式の変形	(P1, C1) ↑(P1,C1)+EIA
	(P1,C1)⇒(P2,C1)
	(P2,C1)↑(P2, C1)+EIA

表5　第3学年(数と式)内容−活動対応表

内容	活動
文字を用いた式でとらえ説明すること	(P2, C1) (P2, C1)↑(P2,C1)+EIA

(2) 領域「図形」内容–活動対応表

表６　第１学年（図形）内容–活動対応表

内容	活動
平行移動，対称移動及び回転移動 基本的な作図とその活用	O ⇒ C1
平面図形の運動による空間図形の構成	C1↑C1+EIA
空間図形の平面上への表現と読み取り	C1 ⇒(P1, C1)

表７　第２学年（図形）内容–活動対応表

内容	活動
平行線と角の性質	(P1, C1)↑(P1,C1)+EIA
	(P1,C1)⇒(P1,C2)
多角形の角についての性質 合同の意味と三角形の合同条件	(P1, C2) ↑(P1,C2)+EIA
証明の必要性と意味及び方法 三角形や平行四辺形の性質	(P1,C2)⇒(P2,C2) (P2, C2) ↑ (P2, C2) +EIA

表８　第３学年（図形）内容–活動対応表

内容	活動
三角形の相似条件	(P2, C2)
平行線と線分の比についての性質 相似な図形の性質の活用 円周角と中心角の関係が証明できることを知ること 円周角と中心角の関係の活用 三平方の定理が証明できることを知ること 三平方の定理の活用	(P2, C2) ↑(P2,C2)+EIA

６．結論・意義・今後の課題

本稿では，課題探究として証明する力を育成するために，中学校数学科の領域「数と式」及び「図形」に関するカリキュラム開発の旧枠組みの理論的な課題を特定した上で，証明の生成と評価・改善・発展の間における学習レベルの移行原理を定め，各学年とレベル移行／移行過程の対応を明確にした。また，内容の配列については，課題探究として証明する力に着目し，各移行過程に対応する内容の配列を内容–活動対応表として整理した。

枠組みの精緻化により，証明の生成と評価・改善・発展との関係の不明確さ，第Ⅰ期及び第Ⅱ期の移行過程と各学年との対応関係の不明確さが解消された。また，課題探究として証明する力への着目により，本研究が，ジェネリックスキル等の資質・能力論の“紐解き”“結びつけ”として位置づくとともに，「数学的に考える力」及び「数学的なプロセス」の一翼としても明確に位置づくことになる（宮崎，2015）。 こうした位置づけにより，授業において課題探究として証明する活動を実現する指導に留まらず，本活動の自立性／協働性を高める指導の触発につながるであろう。さらに，内容–活動対応表により，領域「数と式」と「図形」間で活動の整合性が顕在化され，学習指導要領改訂への対応可能性が強化されるとともに，必要に応じ活動の実現に必要となる新たな内容の考案が啓発される。

カリキュラム開発研究の方法として，本研究では，資質・能力「課題探究力」を教科の特性に基づいて「課題探究として証明する力」として“紐解き”，教科の内容・活動に“結びつけ”，カリキュラム開発の枠組みを開発し，その枠組みに基づいて内容・活動を特定・系列化し，証明の学習による資質・能力「課題探究力」の高まりを具現している。この開発方法は，資質・能力の“紐解き”方・“結びつけ”方として他教科等及び数学教育の領域横断的な能力（例えば，数学的モデリング能力）についても援用可能であることが見込まれ，ジェネリックスキルを育成するカリキュラム研究に対し方法論の提供という貢献に値する。

今後の課題は次の通りである。

- 領域「数と式」，「図形」での授業化の拡充
- 評価法の開発，実施及び評価・改善
- カリキュラムの有効性と限界の特定
- 授業実践に必要な資料（指導案等）の公開

註

*1:中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会審議経過報告 H18/2/13

*2:全国的な学力調査の実施方法等に関する専門家検討会議 H18/4

*3:育成すべき資質・能力を踏まえた教育目標・内容と 評価の在り方に関する検討会 ―論点整理―(3/31/2014)

*4:参考文献(宮川・初谷, 2014; 茅野・嶋田・荻原, 2014; 岩田, 2014; 佐々・大塚, 2014; 小松・牧野, 2014; 辻山・油井, 2014; 中川・油井, 2014)を参照のこと

謝辞 本研究は科研費(No. 23330255, 23330251, 24243077, 26282039, 15K12375)の支援を受けています。

引用・参考文献

茅野公穂, 嶋田和美, 荻原啓一 (2014).「基本的な作図」において課題探究として証明することの授業化, *日本数学教育学会学会誌『数学教育』, 68*(5), pp. 10-13.

岩田耕司 (2014).「空間図形の平面上への表現と読み取り」において課題探究として証明することの授業化, *日本数学教育学会学会誌『数学教育』, 68*(5), pp. 14-17.

小松孝太郎, 牧野圭介 (2014).「円周角と中心角の関係の活用」において課題探究として証明することの授業化, *日本数学教育学会学会誌『数学教育』, 68*(5), pp. 26-29.

宮川健, 初谷淳 (2014).「平行移動, 対称移動及び回転移動」において課題探究として証明することの授業化, *日本数学教育学会学会誌『数学教育』, 68*(5), pp. 6-9.

宮﨑樹夫, 永田潤一郎, 茅野公穂(2012). 中学校数学における課題探究としての証明学習カリキュラムに関する研究:カリキュラム開発のための枠組みの構築, *日本数学教育学会 第45回数学教育論文発表会論文集*, pp. 887-892.

宮﨑樹夫, 藤田太郎(2013). 課題探究として証明することのカリキュラム開発:我が国の中学校数学科における必要性と, これまでの成果, *日本数学教育学会 第1回春期研究大会論文集*, pp. 1-8.

宮﨑樹夫 (2014). 数学的事象に関する課題探究を実現する学力とその可能性:「活用する力βへの提言, *日本数学教育学会 第2回春期研究大会論文集*, pp. 27-34.

宮﨑樹夫, 永田潤一郎, 茅野公穂 (2014). 中学校数学における課題探究として証明することのカリキュラム開発:進行状況と授業化の意味・役割, *日本数学教育学会学会誌『数学教育』, 68*(5), pp. 2-5.

宮﨑樹夫 (2015). 学校数学における学力の顕在化:「数学的に考える力」と「数学的なプロセス」の関係から, *日本数学教育学会 第3回春期研究大会論文集*

宮﨑樹夫, 岩永恭雄, 松岡樂(2015). 課題探究として証明することのカリキュラム開発:我が国の中学校数学科全領域における開発枠組みの構築, *日本数学教育学会 第3回春期研究大会論文集*

中川裕之・油井幸樹 (2014).「三平方の定理とその証明」において課題探究として証明することの授業化, *日本数学教育学会学会誌『数学教育』, 68*(5), 27-30.

Pepper, D. (2011). Assessing key competences across the Curriculum - and Europe, *European Journal of Education, 46*(3), 335-353.

佐々祐之, 大塚武秀 (2014).「連続する自然数の和」において課題探究として証明することの綬業化, *日本数学教育学会学会誌『数学教育』, 68*(5), pp. 18-21.

清水禎文 (2012). ジェネリック・スキル論の展開とその政策的背景, *東北大学大学院教育学研究科研究年報*, 61(1), 275-287.

辻山洋介・油井幸樹 (2014).「平行四辺形の性質」において課題探究として証明することの授業化, *日本数学教育学会学会誌『数学教育』, 68*(5), 22-25.