

課題探究として証明することのカリキュラム開発 ー領域「関数」における証明の構成の学習レベルー

Curriculum Development of Explorative Proving: Levels of Learning to Construct a Proof in 'Functions'

岩田耕司
福岡教育大学

宮崎樹夫
信州大学

牧野智彦
宇都宮大学

藤田太郎
University of Exeter

要 約

従来、我が国の中学校数学科では、主に領域「図形」で証明の学習が本格的に扱われ、領域「数と式」でも「文字式による説明」等として顕在的に扱われてきた。これに対し、領域「関数」では、事柄が正しい理由を説明することは、実際に学習活動として展開され、評価の対象とされているにもかかわらず、その扱いは潜在的なものに留まっていると言わざるを得ない。

そこで本研究では、領域「関数」における課題探究として証明することのカリキュラム開発の枠組みを構築するために、領域「関数」における証明の構成に関する学習レベルを検討した。結果として、領域「関数」における課題探究として証明することは、数学的モデル化の過程を視点に捉えることができ、その構成の学習レベルは、定式化 (formulate)、運用 (employ)、解釈 (interpret) の3つのプロセスから具体化できることを明らかにした。

キーワード：課題探究，証明すること，中学校数学，関数，カリキュラム開発

1. はじめに

近年、認知科学研究の成果によって、思考活動はコミュニケーション活動と不可分な関係にあることが明らかになってきている（関口，2010）。平成20年に告示された中学校学習指導要領（文部科学省，2008）では、このような動向と軌を一にする形で、指導すべき数学的活動の一つに「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」が明確に位置付けられた。事柄が正しい理由を説明する「証明」は、

その代表的な活動であり、本研究では、領域「関数」における課題探究として証明することに焦点を当てる。

従来、我が国の中学校数学科では、主に領域「図形」で証明の学習が本格的に扱われ、また、領域「数と式」でも「文字式による説明」等として顕在的に扱われてきた。これに対し、領域「関数」では、事柄が正しい理由を説明することは、実際に学習活動として展開され、評価の対象とされているにもかかわらず

らず、その扱いは潜在的なものに留まっていると言わざるを得ない。そもそも、領域「関数」において生徒に求める証明として、どのような証明が望ましいのか、その規範が明確でないという現状がある（宮崎ほか, 2015）。

また、本研究では、事柄が正しい理由を説明する「証明」の形式として、特に、「書かれる」証明に注目する。というのも、「書く」という行為には、具体物の操作や口頭での説明とは大きく異なる特徴や役割があり（関口, 2010）、証明を書くことによって、これまでの活動や思考が反省、整理され、数学的活動や数学的思考に対する生徒の理解の深化が促されると考えるからである¹⁾。

数学では、書くこと（writing）もまた、生徒が自身の思考を堅固にすることの助けとなりうる。なぜなら書くことは、彼らに自身の取り組みを反省し、授業で発展したアイデアについての考え（thoughts）を明確化することを要求するからである。後に彼らは、彼ら自身の考え（thoughts）の記録を再読することが役に立つことを見いだすかもしれない（NCTM, 2000, p.61）。

このような書くことの機能を活かし、領域「関数」における学習を豊かにしていくためには、まず、授業においてどのような証明を生徒に求めるのか、領域「関数」における望ましい証明の姿を浮き彫りにする必要がある。また、領域「図形」と同様に、領域「関数」においても、証明を書くことへの理解と習得には相当の困難が伴うことが予想される。それゆえ、望ましい証明の姿をもとに、領域「関数」における証明を書くことの学習をどのように系列化し、実現していくかということについても検討する必要がある。すなわち本研究の中心的な問いは、次の2点に集約される。

1) 中学校数学科の領域「関数」における課題探究として証明することの学習では、

どのような証明が「書かれる」証明として望ましいか。

2) 中学校数学科の領域「関数」における課題探究として証明することの学習を実現するためには、どのようなカリキュラムが必要か。

本稿では、特に前者の問いに答えることを目的とする。そのためにまず、領域「関数」における課題探究として証明することの捉えを明確にする。次に、その証明の要件を考える視点を設定し、領域「関数」における望ましい証明の姿を明らかにする。最後に、カリキュラムの開発枠組みの構築へ向け、その構成に関する学習レベルを検討する。

2. 領域「関数」における証明すること

本研究では、課題探究として証明することを、事柄の生成、証明の生成、評価・改善・発展およびそれら三側面の相互作用による営みとして捉える（宮崎・藤田, 2013）。

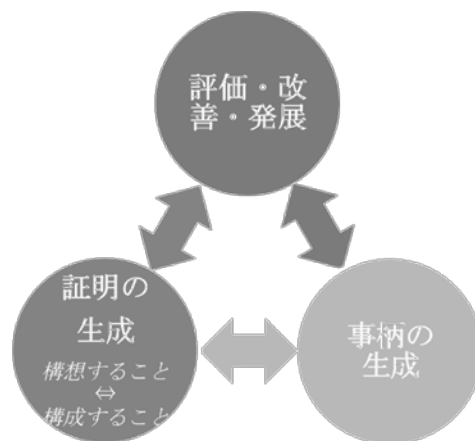


図1 課題探究として証明すること

それゆえ、領域「関数」における課題探究として証明することを考えるにあたっては、証明の対象である「事柄」や「事柄の生成」をどのように捉えるかについて明確にする必要がある。領域「図形」や「数と式」との類比で考えれば、領域「関数」における証明の対象としての「事柄」は、「関数の性質」がそ

の中心となるのかもしれない。しかしながら、小倉金之助が「数学教育の核心は函数觀念の養成にある」（小倉，1924，p.176）と主張したように、関数を指導することの一つの大きなねらいは、関数的な見方や考え方を養うことにあり、関数を活用して自然現象や社会現象を考察したり、既習の数学の内容の理解を深めたりできることに関数を指導することの意義がある（熊倉，2003；小寺，2003；文部科学省，2008）。このような関数指導の意義に鑑みれば、領域「関数」における「事柄」や「事柄の生成」は、「関数の性質に関する命題を予想すること」に留まらず、「具体的な事象に関する観察や実験の結果を関数とみなすことによって、未知の状況を予測したり、事象を解釈したりすること」もその範囲に含めて捉えるべきであろう。本研究では特に後者の活動に焦点を当てて、領域「関数」における課題探究として証明することを捉えることにする。すなわち、本研究で対象とする「証明すること」は、「関数を活用して予測したり、解釈したりした結果を正当化すること」である。

3. 領域「関数」における証明の要件を考える視点：「定式化」、「運用」、「解釈」

前述のように、領域「関数」における「証明すること」を、「関数を活用して予測したり、解釈したりした結果を正当化すること」と捉えるとき、その正当化に必要な条件、すなわち証明の要件にはどのようなものがあるだろうか。一般に、解釈した結果や予測した結果の妥当性を検証する最も単純な方法は、現実との対比によって、現実との無矛盾性や整合性を検証することであろう。しかしながら、未知の事柄について予測する場合や、高度に抽象的な対象について考察する場合など、全てが全て、現実との対比を行えるわけではなく、また、たとえある程度の範囲で現実との無矛盾性や整合性を確認できたとしても、その過程が帰納的である限りは、その正当化が

十分であるとは言い難い。数学的証明において、推論の過程の適切さが検証の対象であることと同様に、解釈や予測の正当化に関しても、その結論を導くまでの過程が適切かどうかの検証は必要不可欠である。そのような、関数を活用して予測したり、解釈したりする過程は一般に、数学的モデル化の過程とみることができる。それゆえ、領域「関数」における証明の要件は数学的モデル化の過程を視点として考えることができるであろう。この数学的モデル化の過程について池田（2010）は、Blum and Niss（1991）やPollak（1997）らの見解を中心に、次のように説明する。

出発点は、実世界の問題が生じる場面である。（中略）実世界の問題は、そのまま解決できれば問題ないが、その解決が息詰まったとき、1つの方策として数学化がなされる。すなわち、理想化・単純化等を行って仮定を設定し、そのデータ、概念、関係、仮定等を数学の世界へと翻訳するわけである。このようにして、最初の問題場面の数学的モデルができ上がる。でき上がった数学的モデルは、数学的手法を用いて処理される。（中略）数学的にみちびかれた結果は、数学の世界での結論であるため、現実場面でそれが何を意味しているのか解釈される。そして、解釈された結果を現実のデータと照合して、数学的モデルが適切であるかどうか検討される。（中略）このように実世界の問題が生じる場面から始まって、数学的モデルをつくり、妥当な結論が得られるまで数学的モデルを繰り返し修正していく一連の活動を、数学的モデル化、あるいは数学的モデリングと呼ぶ（池田，2010，p.273）。

このような数学的モデル化の過程は、例えば、我が国の数学的モデル化研究においてしばしば引用される三輪（1983）の図式（図2）やOECD/PISAの調査の枠組み（OECD，2013）

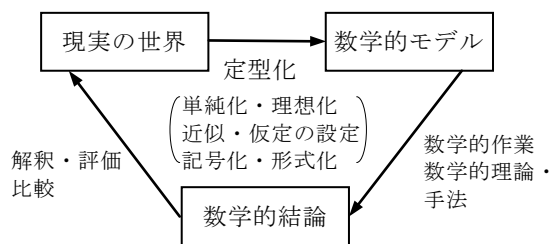


図2 数学的モデル化過程（三輪, 1983）

に示されるように、大きく、「定式化」や「数学的処理」、「解釈・評価」といった3つのプロセスで捉えられることがある。

数学的リテラシーの定義は、個人の、数学を定式化し (formulate)、運用し (employ)、解釈する (interpret) 能力に関連する。これら、定式化、運用、解釈という3つの語は、問題の文脈を数学に関連付け、問題を解決するために個人が為すことを記述する数学的プロセスを組織化するための有益で意義深い構造を与える (OECD, 2013, p.9)。

それゆえ本研究では、領域「関数」における証明の要件を、定式化 (formulate)、運用 (employ)、解釈 (interpret) という3つのプロセスを視点として具体化していくことにする。

4. 領域「関数」における証明の要件

要件の具体化にあたって、一つ明確にしておかなければならないことがある。それは、求める正当化の度合いである。当然のことながら、中学校数学科で扱うことのできる数学的モデルは限定的であり、漸近的なモデルである。それゆえ、そのモデルを用いて導かれた予測や解釈は必ずしも現実を正確に反映するわけではない。つまり、その予測や解釈が正しいとは言い切れない。それゆえ、何をもって正当化が完了したとみるか、その基準を証明の厳密さ（疑いのなさ）に求めることは

できないであろう。このことはすなわち、中学校数学科の領域「関数」における証明では、予測や解釈の正しさ自体に意味があるというよりはむしろ、予測や解釈を正当化することを通して、それらを導く思考過程を顕在化させることに意味があると理解することができる。またそのことは、本研究が証明の形式として「書かれる」証明に着目する理由でもある。そこで本研究では、何をもって正当化が完了したとみるか、その基準を証明の厳密さに求めるのではなく、証明の中で予測や解釈を導く思考過程がどの程度まで明らかにされているかという基準でみることにする。

(1) 定式化 (formulate) の正当化

数学的モデル化の過程における定式化は、実世界の問題が生じる場面から、数学的モデルを作成したり、実世界の問題を数学の問題へと翻訳したりする一連のプロセスと捉えられる。領域「関数」における証明では、このプロセスについてどのようなことが書かれるべきであろうか。三輪 (1983) は、数学的モデル化の過程で、最も困難かつ重要な段階は定式化であるとし、次のように述べている。

この段階では、熟慮した上で関係のうすい細部を無視ないし省略することが必要であるし、それにもとづいた適切な仮定を設定することが必要になる。

数式を使ったモデルでは、このことは、具体的には、変数の生成、変数の選択、関係の生成、関係の選択ということによって表されよう。変数の生成というのは、事象において意味ありとされる諸変数を見つけ出すことである (p.121)。

関数を活用して予測したり、解釈したりする上では、実世界の問題が生じる場面からどのような変数に着目し、それら変数間の関係をどのように捉えるかについて熟慮する必要がある。そして、そのプロセスを正当化し、

予測や解釈を正当化するためには、それら変数間の関係をなぜそのように捉えたのか、その思考過程を記述する必要があるであろう。

一般に、関数判断の根拠には、関数の定義や性質など、いわばその関数になるための条件（例えば、式の形やグラフの特徴など）を示す必要がある。しかしながら、実世界の問題を数学の問題に翻訳する際には、理想化・単純化等を行って仮定を設定し、実世界のデータや概念、関係等を数学の世界へ持ち込む必要がある。それゆえ、実世界の問題が生じる場面から、変数を見だし、それらの関係を捉える過程を正当化するには、関数判断の数学的根拠だけでなく、どのような理想化や単純化を行ったのかを明示する必要があると言える。以上のことから、領域「関数」における定式化 (formulate) の正当化の要件は、「用いた関数」、「関数判断の数学的根拠」、「理想化・単純化した事柄」それぞれを明示することと捉えられ、その学習に関するレベルとして、次の3つを設定する。

- F1. 課題解決に用いる関数を示す。
- F2. 課題解決にその関数を用いることの妥当性を、数学的根拠に基づいて示す。
- F3. 課題解決にその関数を用いることの妥当性を、理想化・単純化等に言及し、数学的根拠に基づいて示す。

(2) 運用 (employ) の正当化

数学的モデル化の過程における運用は、定式化によって得られた数学的モデルを処理し、数学的結果（結論）を得るプロセスであり、運用の正当化は、その数学的処理の過程を記述することによって為されると捉えられる。つまり、運用 (employ) の正当化の要件は、所定のデータを処理して数学的結果（結論）を得る際に用いた「数学的モデル」とその「数学的処理の過程」をそれぞれ明示することと捉えられ、その学習に関するレベルとして、次の2つを設定する。

- E1. 所定のデータから数学的結果（結論）を導く数学的処理の過程を記述する。
- E2. 所定のデータから数学的結果（結論）を導く数学的処理の過程を、用いた数学的モデルを明示して記述する。

(3) 解釈 (interpret) の正当化

数学的モデル化の過程における解釈は、運用によって得られた数学的結果（結論）が実世界の場面で何を意味するかを考えたり、現実のデータと照合して数学的モデルが適切であるかどうかを検討したりするプロセスである。前述したように、中学校数学科で扱うモデルは漸近的なモデルであり、そのモデルを用いて導かれた予測や解釈は必ずしも現実を正確に反映するわけではない。それゆえ、このプロセスでは、その予測や解釈が正しいことを主張するというよりはむしろ、その予測や解釈には一定の制約が生じることに言及することの方が重要である。また、単に制約が生じるだけでなく、なぜそのような制約が生じたかを明示することで、このプロセスに対する意識はより高められる。そのような制約が生じる背景には、理想化・単純化等を行うことによる影響だけではなく、例えば、グラフをよむ過程など、数学的処理の過程で生じる場合もあるであろう。以上のことから、解釈 (interpret) の正当化の要件は、「解釈には制約が伴うこと」や「制約が生じた要因」を明示することと捉えられ、その学習に関するレベルとして、次の2つを設定する。

- I1. 解釈した結果には、制約が伴うことに言及する。
- I2. 解釈した結果に伴う制約が生じた要因に言及する。

5. おわりに

本稿では、領域「関数」における課題探究として証明することのカリキュラム開発の枠組みの構築へ向けて、特に、領域「関数」に

おける「書かれる」証明としてどのような証明が望ましいかを検討し、その構成に関する学習レベルを検討した。結果として、領域「関数」における課題探究として証明することは、数学的モデル化の過程を視点に捉えることができ、その学習レベルは、定式化、運用、解釈という3つのプロセスから具体化できることを明らかにした。その一方で、課題探究として証明することの全体像から見たときに、領域「関数」における「証明の構想」や「評価・改善・発展」をどのように捉えるかなど、本研究に残された課題も多い。課題探究として証明することの学習の実現へ向けて、カリキュラム開発の枠組みを構築し、内容に位置づけていくことが今後の主要な課題である。

注

1) 例えば、斎藤・藤田(1998)は、中学校第二学年「一次関数」の学習内容について、記述表現力と口述表現力の関係を調査・分析し、数学学習においては、書いたり話したりすることを通して学習内容の理解が深まることを示唆している。

謝辞 本研究は科研費(No. 23330255, 24243077, 26282039, 26381219)の助成を受けている。

引用・参考文献

池田敏和.(2010). 数学的モデル化. 日本数学教育学会編『数学教育学研究ハンドブック』, 東洋館出版社, pp.271-281.
小倉金之助.(1924).『算学教育の根本問題』, イデア書院.
熊倉啓之.(2003). 学ぶ意義を実感させる関数の指導に関する研究, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第85巻, 第1号, pp.40-49.
小寺隆幸.(2003). 事象の変化を差分でとらえる力を育てる中学校の関数指導—生物の個体数の変化を素材として—. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第85巻, 第11号, pp.3-14.

齋藤昇・藤田彰子.(1998). 数学学習における記述表現力と口述表現力の関係—中学数学2年「一次関数」の調査を通して—. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第4巻, pp.197-207.

関口靖広.(2010). ジャンルとしての数学的証明: 社会記号論的視座から. 日本数学教育学会『第43回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録』, pp. 51-56.

宮崎樹夫・岩永恭雄・松岡樂.(2015). 課題探究として証明することのカリキュラム開発—我が国の中学校数学科全領域における開発枠組みの構築—. 日本数学教育学会『第3回春期研究大会論文集』.

宮崎樹夫・藤田太郎.(2013). 課題探究として証明することのカリキュラム開発—我が国の中学校数学科における必要性和、これまでの成果—. 日本数学教育学会『第1回春期研究大会論文集』, pp. 1-8.

三輪辰郎.(1983). 数学教育におけるモデル化についての一考察. 『筑波数学教育研究』, 第2号, pp. 117-125.

文部科学省.(2008).『中学校学習指導要領解説数学編』(平成20年9月), 教育出版.

Blum, W. and Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects: State, Trends and Issues in Mathematics Instruction, *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), pp. 37-68.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.

OECD. (2013). *PISA 2015 draft mathematics framework*. Retrieved from http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft_PISA_2015_Mathematics_Framework.pdf

Pollak, H. O. (1997). Solving Problems in the Real World, In Lynn Arthur Steen (Ed.), *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America* (pp. 91-105). New York: College Entrance Examination Board.