第３回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

学校数学における学力の顕在化
－「活用する力」と「数学的に考える力」の関係から －
Elucidating Competencies in School Mathematics: Focusing on the relation “Ability to utilize” with ”Ability to think mathematically” -

宮崎樹夫
信州大学学術研究院教育学系

要　約

教科教育において資質・能力の“紐解き”と“結びつけ”が進められている今日，学力のなかで資質・能力に接合するにもかかわらず教科教育の内側に潜在しているものがあるとすれば，その可能な限りの顕在化が今こそ必要である。本研究では，学校数学において資質・能力に接合する学力として次のものが新たに顕在化され得ることを特定した：命題を局所的な組織化・体系化・公理化すること／数学的事象について課題探究として方法を説明すること／日常的事象について解決の構想を立て実践すること。この結論を導くために，教科横断的な「活用する力」と「数学的に考える力」の関係を「数学的なプロセス」の作用内容，作用過程，視点・見方に着目して考察する。

キーワード：資質・能力，学力，数学的に考える力，数学的なプロセス

１．ジェネリックスキルの展開：現状と課題

国際的な潮流「ジェネリックスキル*1 の育成」を受け，「自立・協働・創造」をキーコンセプトとして生涯学習社会を構築するために*2，「育成すべき資質・能力」に注目が集まっている*3。こうした社会的要請に学校教育の主翼たる教科教育が応えるには，育成すべき資質・能力を各教科の学力として“紐解くこと”とともに，各教科の内容・活動として“結びつけること”が必要である(Pepper, 2011)。

我が国の算数・数学科では，この“紐解き”と“結びつけ”が既に始まっている。実際，全国学力・学習状況調査の教科横断的な「活用する力」が，「数学的に考える力」(清水静海, 2014, p. 44)との関係に基づいて「数学的なプロセス」(全国学力・学習状況調査中学校数学)として“紐解かれ”，学力論が再構築されようとしている(清水美憲，2014)。“結びつけ”に関しては，特定の課題に関する調査や全国学力・学習状況調査を通じ，育成すべき資質・能力に接合される形で学校数

学の学力が評価問題や解答類型として具体化されるとともに，全国学力・学習状況調査に基づく「授業アイディア例」のように，国として授業改善の方向性が具体的に明示されるようになってきている。こうした取り組みに伴い，先進的な学校によるカリキュラム開発（鈴木・傍士・峰野, 2014）や志の高い教師による先鋭的な授業が全国で数多く実践・報告されるようになっている。

学校数学の学力のうち，育成すべき資質・能力に接合するものとして既に顕在化されているものは，教育の様々なレベルと道筋で現実化されていくであろう。これに対し，資質・能力に接合するにもかかわらず潜在的なものがあるとすれば，可能な限りの顕在化が今こそ必要である。

２．目的と方法

本研究の目的は次の問いに答えることである：『学校数学の学力のうち，資質・能力に接合するものとして，何が新たに顕在化され得るか』。この目的を達成するために，「数学的に考える力」と「活用する力」の関係を「数学的なプロセス」に着目して考察する。

３．「数学的に考える力」と「数学的なプロセス」の関係の捉え方

「数学的に考える力」は，算数的活動や数学的活動を遂行する資質・能力の総称とされ（清水静海，2014，p. 44），次の３つの柱で構成されている（清水静海他，2014）。

- 算数・数学の世界で既習をもとにして発展的に考える
- 実生活や身の回りの事象の考察・説明に，算数・数学を使う
- 論理的に考える

一方，全国学力・学習状況調査では，教科横断的な「活用する力」が「数学的なプロセス」として次のように“紐解かれている”。

α1：日常的な事象等を数学化すること
α2：情報を活用すること
α3：数学的に解釈することや表現すること
β1：問題解決のための構想を立て実践すること
β2：結果を評価し改善すること
γ1：他の事象との関係を捉えること
γ2：複数の事象を統合すること
γ3：事象を多面的に見ること

数学的なプロセスαは，「活用する力」のうち「知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力」を学校数学において“紐解いた”ものである。そのため，「活用する力」が学校数学で何に対しどのように作用するのか（作用内容）が詳らかにされている。これに対し，数学的なプロセスβは，「様々な課題解決のために，構想を立て実践し評価・改善する力」を同様に“紐解いた”ものである。そのため，「活用する力」が学校数学で問題解決や課題探究としてどのような過程で作用するのか（作用過程）が示されている。また，数学的なプロセスγは，前記二種類の「活用する力」の双方に関わる力とされており，「活用する力」が学校数学でどのような視点・見方から作用するのか（視点・見方）を明らかにしている。

そこで，「活用する力」と「数学的に考える力」の関係を捉えるにあたり，「数学的に考える力」の柱ごとに，作用内容，作用過程，視点・見方について考察していくことにする。

なお，「数学的に考える力」の柱「論理的に考える」は，他の２つの柱の作用を可能にする“駆動力”である。そのため，柱「論理的に考える」については考察の対象としない。

４．「発展的に考える」×数学的なプロセス

4.1「発展的に考える」×数学的なプロセスα

算数・数学の世界で既習をもとにして発展的に考える際，その作用内容に着目すると，数学的事象を数学化し（α1）[*4]，その過程や結果を解釈し表現すること（α3）が必要となる。その際，数学的事象の数学化及び解釈・表現による様々な命題を局所的な組織化・体系化・公理化(Freudenthal, 1971; Devilliers, 1990; 杉山, 1985 他)によって分類・整理し，組織や

体系に必要な命題かどうか選択し判断すること（α2）が求められる。

例えば，二等辺三角形の性質は小学校で実験や操作活動を通じて見出される。一方，この性質は中学校で，二等辺三角形の定義，角の二等分線の作図可能性,三角形の合同条件，合同な図形の性質を前提として演繹され，命題として学び直され，演繹の過程が証明として，即ち，普遍汎化及び仮言三段論法が明示される形で表現される。ここで必要とされるのが，数学的事象を数学化し，その過程や結果を解釈・評価することである。

また，局所的な組織化・体系化・公理化に関し，円周角の定理の証明では，二等辺三角形の性質に関する命題の他に，内角と外角の関係に関する命題等が必要とされ，これらの前提をさらに遡ると，三角形の合同条件，三角形の内角の和に関する命題が前提とされている。こうして調べていくと，命題間の演繹的なネットワークの構築が可能となる。ここで必要とされるのが，命題を局所的に組織化・体系化・公理化することである。

柱「算数・数学の世界で既習をもとにして発展的に考える」と，数学的なプロセスαとの関係では，数学的事象を数学化し，その過程や結果を解釈・表現することに比べ，命題を局所的に組織化・体系化・公理化することが潜在的なものに留まっている。命題の組織化・体系化・公理化は，知の調整と真理性の確立，延いては理性の錬磨として重要であり (Fawcett, 1938), 学校数学で育成すべき学力として改めて顕在化しておく必要がある。

4.2「発展的に考える」×数学的なプロセスβ

算数・数学の世界で既習をもとにして発展的に考える際，その作用過程に注目すると，解決の構想を立て実践し(β1),その過程や結果を評価･改善する(β2)ことが必要になる。これらは数学教育で問題解決として重視されてきたことに整合するとともに，PDCA サイクル及び課題探究の特徴を色濃く帯びている。

例えば，数学における証明の営みを学校数学で実現するには，課題探究として証明する活動が求められる。つまり，証明の方針を立て,それに基づいて証明を構成するとともに，そこまでの過程と結果を検討し，必要に応じ改善するとともに，証明に基づく発見など発展的に考える活動の実現が意図される。ここで必要とされるのが，課題探究として証明すること(宮崎，2015)である。

柱「算数・数学の世界で既習をもとにして発展的に考える」と，数学的なプロセスβとの関係で，数学的事象について解決の構想を立て実践し評価・改善をするには，課題探究として証明することのみならず，解決の方法を説明することが欠かせない。これについて，全国学力・学習状況調査を通じて学校数学で育成すべき学力として顕在化されているものの，構想を立て実践し評価・改善するという作用過程として顕在化されているとは言い難い。今後，数学的事象について課題探究として方法を説明することが学校数学で育成すべき学力として顕在化されることが期待される。

4.3「発展的に考える」×数学的なプロセスγ

算数・数学の世界で既習をもとにして発展的に考える際,その視点･見方に注目すると，他の数学的事象との関係を捉えること(γ1)，複数の数学的事象をある視点・見方で統合すること(γ2),一つの数学的事象を多面的に考察すること(γ3)などが必要になる。

例えば，比例と反比例に関して小学校では，各々の性質を学ぶのに対し，中学校では，関数の定義を学び，その例として比例と反比例を学び直し，関数であるが比例や反比例でないものや，関数ではないものについて学習する。ここで必要とされるのが，複数の事象をある視点・見方で統合することである。

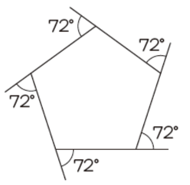
また，次の問題場面のように（平成 24 年度全国学力・学習状況調査)，多角形の外角に関する事象について，和が 360°であるという図形としての性質に加え，関数の視点・見

方を持ち込むことにより，頂点の数 n が変わっても和 360°が一定であり，外角の和は頂点の数の定数関数になっていることがわかる。さらに，正多角形の場合，一つの外角の大きさは頂点の数と反比例の関係にあることから，頂点の数が大きくなると一つの外角の大きさが 0°に漸近し形状が円に近づくことが明らかになる。ここで必要とされるのが，複数の事象をある視点･見方で統合することである。

正多角形の外角の大きさはどれも等しいから，正五角形の１つの外角の大きさは，外角の和 360° を頂点の数５でわって求められます。

360° ÷ 5 = 72°

だから，正五角形の１つの外角の大きさは 72° です。



七海さんは，正五角形以外の正多角形でも，同じように１つの外角の大きさを求められることに気づきました。

たとえば正三角形のときは，頂点の数が３だから，外角の和 360° を３でわって，１つの外角の大きさを 120° と求められるね。

５．「実生活で使う」×数学的なプロセス

5.1「実生活で使う」×数学的なプロセス α

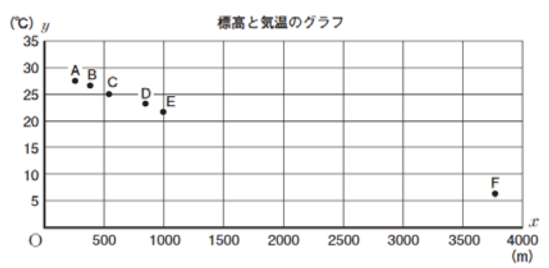
実生活や身の回りの事象の考察・説明に，算数・数学を使う際，その作用内容に着目すると，日常的事象を数学化すること（α1），その過程や結果を解釈し表現すること（α3）が必要となる。前者は数学的モデリング過程として現実世界から数学世界への定型化に該当し，後者は数学世界から現実世界への解釈・評価に該当する。現実世界と数学世界を行き来する際，数学化や解釈・表現に必要な情報を選択し分類整理するとともに，その正誤を判断すること（α2）が必要とされる。

例えば，課題「遠足でいく富士山の６合目(2500m)の気温はどのくらいか」を解決するために，富士山の標高に応じ気温が変わるという日常的な事象について考察するとしよう（平成 20 年度全国学力･学習状況調査数学Ｂ大問⑤）。鉛直方向に対し地上から１万 m 程度までは気温がほぼ一定の割合で下がることが気象学で知られている。もちろん観測所は同一の鉛直方向にはない。そのため一定の制約のもとで気温と標高の間に一次関数の関係を敢えて持ち込み，その結果として測りにくい気温を，測ることのできる標高に置き換えることができる。ここで必要とされるのが，日常的事象を数学化することである。

観測所の標高と平均気温のデータから，仮にＤ（河口湖）とＦ（富士山頂上）を選び，**標高と気温のグラフ**の点ＤとＦを通る直線をひき，x = 2500 に対応する y= 13.8 をグラフで得たとする。このとき，連立方程式を計算すれば数学の結果 y=13.79193825042881…を正確に求めることができる。このことから，数学の結果 y= 13.8 には，**グラフ**という“道具”の限界のみならず，理想化・単純化による制約が伴うことを認め，こうした意味を込めて課題の答えを「およそ 13.8℃」と表現する。たとえ誤差が多少生じたとしても，この答えは実際に登って寒さに凍えないように服装を調えるには十分役立つ。ここで必要とされるのが，日常的事象の数学化の過程や結果を解釈し表現することである。

観測所の標高と 2007 年８月の平均気温　（気象庁調べ）

観測所	標高(m)	平均気温(℃)	観測所	標高(m)	平均気温(℃)
A（甲　府）	273	27.7	D（河口湖）	860	23.3
B（勝　沼）	394	26.7	E（山　中）	992	21.7
C（古　関）	552	24.9	F（富士山）	3775	6.4



柱「実生活や身の回りの事象の考察・説明に，算数・数学を使う」と，数学的なプロセス α との関係では，日常的事象を数学化することも，その過程や結果を解釈し表現することも数学的モデリング過程を実現するために

欠かせないものとして重視され続けている。また，全国学力・学習状況調査にみられるように，評価の焦点が数学的モデルや現実世界での答えと同等に，日常的な事象の数学化やその解釈・表現に向けられている。同様な傾向が教科書や授業でも高まり，日常的事象の数学化，その解釈・表現がカリキュラムや学習指導として現実化されることが期待される。

5.2「実生活で使う」×数学的なプロセスβ

実生活や身の回りの事象の考察・説明に，算数・数学を使う際，その作用過程に注目すると，解決の構想を立て実践すること（β1），その過程や結果を評価・改善すること（β2）が必要になる。その上で，数学的モデリング過程で「スパイラル的発展」（三輪，1986）を実現するには，解決の構想を立て実践し評価・改善をするという課題探究をサイクルとして進展させることが必要となる。

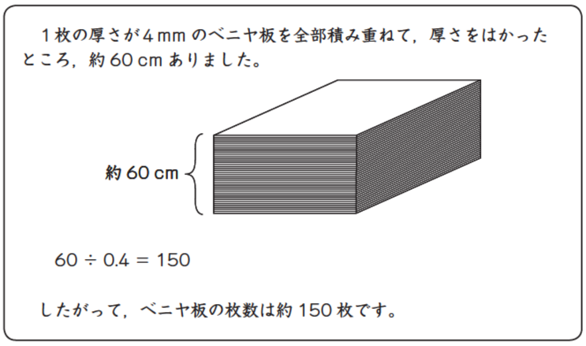
例えば，前述の**グラフ**の２点ＤとＦを通る直線による答え「およそ 13.8℃」の検討を契機として，ＡからＦまでのうち，他の２点を通る直線の可能性を模索するとしよう。このとき，子ども達は，採用された直線によって６合目の気温が異なってくることに気づき，その中から何らかの根拠に基づいて理にかなう直線を選ぼうとするであろう。もしかすると，全てのデータを考慮しようとして，グラフ上の５点が直線のまわりにバランスよく散らばるように直線をひき直そうとするかもしれない。さらに，「その直線を使うと標高 1500 *m* の気温は何度ってことになるだろう？」／「富士山の高さは 3776 *m* だけど，もしエベレストのように高さが 8848 *m* だったら，頂上の気温は何度ってことになるかな？」と新たな課題が生じていく。こうした営みで必要とされるのが，日常的事象について課題探究をサイクルとして進展させることである。

柱「実生活や身の回りの事象の考察・説明に，算数・数学を使う」と，数学的なプロセスβとの関係では，数学的モデリング過程を実現するために，日常的事象について課題探究をサイクルとして進展させることは，カリキュラム，学習指導及び評価で既に重視されており，学力として顕在化されているといえる。これに対し，日常的事象について解決の構想を立て実践することについて，近年では，全国学力・学習状況調査で方法の説明として「用いるもの」と「その用い方」の明示が求められている。一方，学習指導では，解決の構想は，見通しを立てる際に扱われてはきたが，実際の解決が重視されがちである。今後，日常的事象についても解決の構想を立て実践することが重視されるとともに，この学力が，評価・改善と相まって育成され得るカリキュラムの開発が期待される。

5.3「実生活で使う」×数学的なプロセスγ

実生活や身の回りの事象の考察・説明に，算数・数学を使う際，その視点・見方に注目すると，他の日常的事象との関係を捉えること（γ1），複数の日常的事象をある視点・見方で統合すること（γ2），一つの日常的事象を多面的に考察すること（γ3）などが必要になる。

例えば，複数の日常的事象をある視点・見方で統合することに関し，積み重ねられたベニヤ板の枚数を求める場面では，その厚さと枚数の間に比例関係を敢えて持ち込み，次のようにしておよその枚数を求める。



一方，容器に入った釘の本数を求める場面では，その重さと本数の間に比例関係を敢えて持ち込み，およその本数を求める。これら二つの事象は，視点「測りにくい量と測りやす

い量の間に比例関係を敢えて持ち込み，前者を後者に置き換える」で統合可能であり（平成 20 年度全国学力･学習状況調査数学 B 大問３)，ここで必要とされるのが，複数の日常的事象をある視点･見方で統合することである。

柱「実生活や身の回りの事象の考察・説明に，算数・数学を使う」と，数学的なプロセスγとの関係では，全国学力・学習状況調査で具体的な場面と評価のポイントが明示され，日常的な事象の多面的・統合的な考察への共通認識が高まってきている。一方，カリキュラムとして，これらをどのような内容系列で高めていくのかが明らかではなく，評価についても恒常的になされるには至ってはいない。

６．結論，今後の課題

本研究の結論は次の通りである。

学校数学において，資質･能力に接合する学力として, 次のものが顕在化され得る。

- 命題を局所的な組織化・体系化・公理化すること
- 数学的事象について課題探究として方法を説明すること
- 日常的事象について解決の構想を立て実践すること

今後の課題は次の通りである。

- ■ 資質･能力に接合する他の学力の顕在化
- ■ 「数学的に考える力」を育むカリキュラム，学習指導，評価法の開発・充実

註

＊1 :「特定の文脈を越えて，さまざまな状況のもとでも適用できる高次のスキル」(川島太津夫，2010)

＊2 : 第 2 期教育振興基本計画 （文科省)

＊3 : 育成すべき資質・能力を踏まえた教育目標・内容と評価の在り方に関する検討会－論点整理－

*4 : 数学的なプロセスα1 の表記「日常的な事象等を数学化する」には，数学的事象の数学化が含意されていると考えられる。

謝辞 本研究は，科研費(No. 23330255, 23330251, 24243077，26282039)の支援を受けています。

引用・参考文献

Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof (NCTM, The Thirteenth Yearbook).* NY: AMS PRESS.

川嶋太津夫 (2010). ジェネリック･スキルとアセスメントに関する国際動向学士課程教育のアウトカム評価とジェネリックスキルの育成に関する国際比較研究，*科学研究費補助金基盤研究(B)研究成果報告書.*

宮﨑樹夫 (2015). 課題探究として証明することのカリキュラム開発:我が国の中学校数学科全領域における開発枠組みの構築，*日本数学教育学会 第3回春期研究大会論文集.*

三輪辰郎. (1983).数学教育におけるモデル化についての一考察.*『筑波数学教育研究』, 第 2 号*， pp. 117･125.

Pepper, D. (2011). Assessing key competences across the Curriculum - and Europe, *European Journal of Education, 46*(3), 335-353.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. NJ: Princeton University Press.

清水静海 (2014). 数学的に考える力とは，*新しい算数研究, 523*, 41-44.

清水静海他 (2014). 特別企画 : 提案と討議 : 算数科の授業改善 :「数学的に考える力」の育成に焦点、を当てて，*新しい算数研究, 518*， 67-90.

清水美憲 (2014). 数学教育における学力論の再構築に向けて，*日本数学教育学会 第2回春期研究大会論文集*, 1-4.

鈴木誠，傍士輝彦，峰野宏祐 (2014). 興味・関心を高め，数学的に考える力を育む指導：数学を見いだす活動を促す教材開発を中心として，*東京学芸大学附属世田谷中学校公開研究会資料*, 40-44.