第４回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

数学的事象に関する課題探究を実現する学力の特定
− 事柄／証明／体系の生成に着目して −

Specifying Competencies to Realize Explorative Activity on Mathematical Phenomena: Focusing on producing propositions/proofs/systems

宮崎樹夫
信州大学

要　約

本研究では，課題探究プロセス「構想を立て実践し，評価・改善・発展をする」に着目し，数学的事象に関する課題探究を実現する学力として，事柄／証明／体系の生成に関して各々３種類の学力を特定し，これらを統括するものとして，課題探究サイクルとしての学力を結論として特定した．この結論を導くために，数学的事象の考察に必要となる「証明すること」を，その構成要素(事柄の生成／証明の生成／体系の生成)と相互関係として捉え，課題探究力を「証明すること」で紐解くことにより「課題探究として証明すること」を捉え直した．これに基づいて数学的事象に関する課題探究を実現する学力を特定し，この学力の特徴として，事柄の構想と構成の分化／体系の生成への着目を指摘した．

キーワード：学力，数学的事象，課題探究，証明すること，体系の生成

１．課題探究を実現する学力

不安定と不確定が渦巻く社会を見据え我々は子ども達に何を遺すべきであるのか−この問いに対する一つの構えが今日のジェネリックスキル(清水禎文, 2012)や「育成されるべき質質・能力」であり，実効性のある答えが世界的に模索され続けている．特に，学びの自律性に着目すると，概念的/思考スキル(NCVER, 2004, p.8)として，課題探究を実現する学力の育成は喫緊の課題であるといえ，我が国の学校教育においても，課題探究を実現する学力を資質･能力の重要な側面として位置づける方向は近年一層明確にされてきている[*1]. 学校教育の主翼たる教科教育には，課題探究を実現する学力を各教科の学力として紐解くとともに，各教科の内容･活動として具体化すること(Pepper, 2011)が求められているといえる.

数学教育で，課題探究の対象とされるのは，主に日常的事象と数学的事象である. 特に，数学的事象に関する課題探究は，主に算数･数学

科で意図される重要なものである．それにも関わらず，課題探究として，子ども自らが解決を要する問題を課題として見出し，その解決に主体的・生産的・柔軟に取り組むことが遍く具現されているとは言い難い．こうした事態の背景には，数学的事象に関する課題探究を実現する学力が数学に固有なプロセスとして十分明確にされていないことがあると推察される．

数学的事象に関する課題探究を実現する学力については，事柄の生成と証明の生成に着目し，探究プロセス「構想を立て実践し，評価・改善・発展をする」を意図的に分断した上で統合することにより，６種類の学力が既に特定されている(宮﨑, 2014)．一方，数学的事象に関する課題探究を実現するには，事柄及び証明の生成に加え，体系の生成への着目が不可欠となる．なぜなら，事柄が何故正しいのかを明らかにするには，その証明で根拠として用いられる事柄(定義／定理等)を明らかにする必要があるとともに，証明の根拠とされる事柄の演繹的な整合性が調えられている必要があるからである．

以上のことから，本研究は次の問いに答えることを目的とする．

学校数学において事柄／証明／体系の生成に着目すると，数学的事象に関する課題探究を実現する学力として何が特定されるか．

２．「証明すること」の捉え

「証明すること」は，簡潔には，ある事柄(命題)が何故正しいかを示すために，その前提と結論を演繹的な推論で結びつけることを意味する．つまり，「証明すること」は，証明の生成それ自体で成り立つものではなく，その対象となる事柄の生成を必要とする．このように，「証明すること」は，「事柄の生成」と「証明の生成」を構成要素とし，前者は後者に考察の対象を提供し，逆に後者は前者に事柄の正しさを付与するものである．

一方，「証明すること」の簡潔な意味からすると，前提と結論を演繹的に結びつける推論として普遍例化と仮説的三段論法が用いられる．仮説的三段論法は単称命題に関する論理学的な機構であるのに対し，普遍例化には全称命題(定義・定理等)が必要とされる．公理や前提以外の如何なる命題も，その正しさがその命題自身によって確立され得ることはなく，その命題が属する体系においてのみ確立され得る．つまり，その体系の基盤となる公理や前提の正しさが仮設されることによって，その体系に属する諸命題の正しさが確立される．

このように，「証明すること」の目的として，事柄が何故正しいのかを示すことに立ち返ると，「証明すること」は，「事柄の生成」，「証明の生成」，「体系の生成」を構成要素とするものである．構成要素の諸関係のうち，「事柄の生成」と「体系の生成」の関係については，前者が後者に対して考察の対象を提供し，逆に後者は前者に対して，事柄の演繹的整合性を付与し，その事柄が何に基づいているか／その事柄に何が基づいているのかを明らかにする．また，「証明の生成」と「体系の生成」の関係については，前者が後者に対して演繹的整合性の仕組みを付与し，その事柄が何にどのように基づいているか／その事柄に何がどのように基づいているのかを明らかにし，逆に「体系の生成」は「証明の生成」に対し，循環論の回避や証明の洗練などの機会を提供する．(「事柄の生成」と「証明の生成」の関係については前述の通りである．)

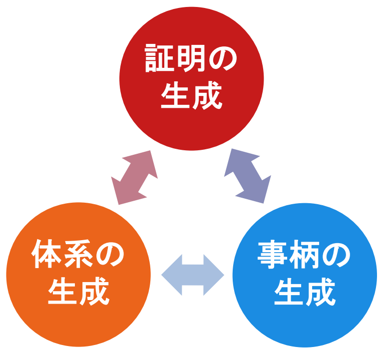

図１　「証明すること」の捉え

３．課題探究力を「証明すること」で紐解く

（1）探究プロセスの意図的な分断と統合

実際の課題探究において，目的達成のための探究プロセス「構想を立て実践し，評価･改善･発展をする」は，プロセスを構成する各部分(「構想を立てる」，「構想を実践する」，「評価・改善・発展をする」)に切り分けられないものである．一方，数学的事象に関する課題探究を実現する学力を段階的・漸進的に育成していくためには，この一連のプロセスを前述の各部分に敢えて切り分け，各々の部分について課題探究を実現する学力を見定めていく必要がある．

そこで，本研究では，学力の特定という教授学的な意図により，目的の達成のための探究プロセスを「構想を立てる」，「構想を実践する」，「評価・改善・発展をする」に敢えて分断し，各々の部分について課題探究を実現する学力の姿を詳らかにすることを目指す．

なお，探究プロセスは本来分断され得ないものであるから，各々の部分について課題探究を実現する諸学力が，課題探究サイクルとして相互に連関して機能するようになったとき，数学的事象に関する課題探究を実現する最高次の学力が形づくられたといえる．

（2）課題探究として証明すること(改)

前述のように，「証明すること」を，事柄の生成／証明の生成／体系の生成，及び三者の相互関係として捉えると，探究プロセスのうち，「構想を立てること」及び「構想を実践する」については，事柄／証明／体系が構想の対象となり得るとともに，一定の構想に基づいて事柄／証明／体系が構成可能である．一方，探究プロセスのうち，「評価・改善・発展をする」については，事柄／証明／体系の生成が対象になり得る．この際，各生成に要する構想及び構成も同様である．一方，事柄の生成／証明の生成／体系の生成の相互関係については，「評価・改善・発展をする」の直接的な対象ではなく，事柄／証明／体系の生成に関して「評価・改善・発展をする」ことに附随するものとして捉えることにする．

以上のことから，課題探究力を探究プロセスに着目して「証明すること」で紐解くと，「証明すること」の構成要素である事柄の生成／証明の生成／体系の生成に「評価・改善・発展をする」が作用し，「構想を立てること」及び「構想を実践する」が各々埋め込まれることになる(図２参照)．本研究では，課題探究力が紐解かれた「証明すること」を，「課題探究として証明すること」と呼ぶことにする．

図２　課題探究として証明すること(改)

４．数学的事象に関する課題探究を実現する学力の特定(再考)

（1）学力の特定

① 事柄の生成に関する学力

事柄の生成には，「構想を立てること」及び「構想を実践する」が組み込まれ，「評価・改善・発展をする」が作用している．これにより次の学力が顕在化する．

- 事柄を構想する．
- 事柄の構想に基づいて事柄を構成する．
- 事柄の生成を評価・改善・発展する．

例えば，「事柄を構成すること」について，我々は問題や課題を解決するために，考察すべき事象に，ある視点を向けることで事柄を生成する．つまり，事柄には，事象で視点が

向けられた対象と，その視点で捉えられた特徴が含まれることになる.その上で,事柄が，課題探究で自己の解決や他者との協働を促進するために，場面／時間／個人に依って事柄の意味が大きく変質してしまわぬよう，事柄それ自体の意味を明確に表現することが求められる．そのため，事柄を構想することにおいては，事象で視点が向けられている対象／その対象が有する特徴／表現形式『A[対象]はＢである[特徴].』について探ることになる.

具体的には，平成 25 年度全国学力・学習状況調査の数学Ｂ大問２では，予想「２けたの自然数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差は，９の倍数になる」を見出す活動が示されている(図３)．ここでは，２けたの自然数とその数の十の位と一の位の数を入れかえた数に関する事象に，視点として「差」と「倍数」を向けることで対象「両者の差」について特徴「９の倍数である」が帰納的に見出され，事柄が形式『A は B である』表現されている．この事柄を授業で構想する際，対象と特徴の特定に加え，表現形式についても明示的な模索が必要となる.

２　大輝さんは，２けたの自然数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差がどんな数になるかを調べています。

調べたこと

41　のとき　41 − 14 = 　27 = 9 ×　3
53　のとき　53 − 35 = 　18 = 9 ×　2
28　のとき　28 − 82 = −54 = 9 ×(− 6)

上の調べたことで，２つの数の差が９と整数の積になっていることから，大輝さんは，次のことを予想しました。

予想

２けたの自然数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差は，９の倍数になる。

図３　事柄の対象，特徴，表現形式

事柄が一般的な性質や関係についてである場合，一定の条件のもとで，その帰結として対象の特徴が保証される．この関係を捉え明確に表現するには，条件と帰結それぞれが『A[対象]は B である[特徴].』という形をとるため，事柄は，全体として『条件節ならば帰結節』，即ち「P は Q である(条件)ならば，R は S である(帰結).」という表現形式をとることになる．そのため，条件と帰結の関係を明らかにするためには，事柄を構想するにあたり，対象／特徴／表現形式に加え，条件と帰結の分化と表現についても探ることになる.

例えば，中学校第２学年の「平行線と角の性質」では，条件「２つの直線に１つの直線が交わり，２つの直線が平行である」が満たされるとき，帰結「同位角／錯角は等しい」が成り立つことが学習される．この性質について授業で「平行線と角の性質」として構想する際，前記の条件と帰結の分化に加え,『条件節ならば帰結節』という表現形式についても明示的に模索することが必要となる.

②　証明の生成に関する学力

証明の生成には,「構想を立てること」及び「構想を実践する」が組み込まれ,「評価・改善・発展をする」が作用している．これにより次の学力が顕在化する.

- 証明を構想する.
- 証明の構想に基づいて証明を構成する.
- 証明の生成を評価・改善・発展する.

これらの学力については，全国学力・学習状況調査を通じて具体的な姿が描き出され，数学的事象に関する課題探究を実現する学力として考察されている(宮﨑，2014)ので，ここでは詳細には触れないことにする.

③　体系の生成に関する学力

体系の生成には,「構想を立てること」及び「構想を実践する」が組み込まれ,「評価・改善・発展をする」が作用している．これにより次の学力が顕在化する.

- 体系を構想する.
- 体系の構想に基づいて体系を構成する.
- 体系の生成を評価・改善・発展する.

例えば,「体系の生成」については，数学の相対的真理観が数学教育に取り入れられ

(Fawcett, 1938), 現代化運動で現代数学の構造が数学教育に強く反映され，活動としての数学の立場から，命題の公理化(例えば，Krygowska, 1971; 杉山, 1986)・体系化(例えば，Bell, 1976; 礒田, 1987; 宮崎, 2002)・組織化(Freudenthal, 1971 他)が重視されてきた．これまでの研究や取組には，体系の構想／構成に関する学力の育成に活用できるものが数多くある．実際，杉山(1986)による公理的方法の考え「原理(根拠)を探る(明らかにする)」及び「仮設(原理，根拠)をおいて考える」は体系を構想する視点に該当する．

また,「体系の生成を評価・改善・発展すること」についても，前記の諸成果を振り返るとともに，中学校数学科で多くの子どもが学習可能な諸場面で学年進行に伴って漸進的に高めていくことが必要である. 具体的には，第 2 学年で対頂角の性質，平行線と同位角／錯角の性質を学び，これらの性質を用いて三角形の内角の和を証明する．この証明で既習の諸性質がどのように用いられているかに加え，用いられた各々の性質はどのように証明されてきたのかを明らかにしていくと，これらの諸性質の演繹的な整合性が整理され局所的に組織化される．このとき，これらの諸性質を証明するために最小限必要なものはどれかと探っていくと,「平角は 180°」のように証明されていない性質や証明を要しない事柄が顕在化し局所的な体系化が進む.

④ 課題探究サイクルとしての学力

前記の①②③にある 9 つの学力は探究プロセスの意図的な分断により特定されたものである．本来，探究プロセスは，事柄／証明／体系の生成からなるサイクルであり，より高次な課題の解決に向けスパイラル的に弛まなく進展していくべきものである．この進展には，①②③の学力のみならず，これらを相互に連関させ機能させる力が必要である.

(2) 特定された学力の特徴

数学的事象に関する課題探究を実現する学力は，事柄の生成と証明の生成に着目して次のように既に特定されている(宮崎, 2014).

A:事柄を生成する.

B:事柄を評価・改善・発展する.

C:証明の方針を立てる.

D:証明の方針に基づいて証明を構成する.

E:証明の過程と結果を評価･改善･発展する.

F:証明することを課題探究サイクルとして実現する.

本研究で特定された学力と対比すると，学力 A が，探究プロセス「構想を立てる」と「構想を実践する」を事柄の生成で紐解くことにより,「事柄を構想する.」と「事柄の構想に基づいて事柄を構成する.」に分化されている. また,「証明すること」の構成要素として「体系の生成」に新たに着目することにより「体系を構想する」,「体系の構想に基づいて体系を構成する」,「体系の生成を評価・改善・発展する」が新たに特定されている.

５．結語

本研究の結論は次の通りである.

学校数学において事柄／証明／体系の生成に着目すると，数学的事象に関する課題探究を実現する学力として次のものが特定される.

■ **事柄の生成に関する学力**

- ●事柄を構想する.
- ●事柄の構想に基づいて事柄を構成する.
- ●事柄の生成を評価・改善・発展する.

■ **証明の生成に関する学力**

- ●証明を構想する.
- ●証明の構想に基づいて証明を構成する.
- ●証明の生成を評価・改善・発展する.

■ **体系の生成に関する学力**

- ●体系を構想する.
- ●体系の構想に基づいて体系を構成する.
- ●体系の生成を評価・改善・発展する.

■ **課題探究サイクルとしての学力**

本研究の結論により,「証明の生成」及び「体系の生成」の基盤として，事柄の生成に関する学力の充実が不可欠であり，カリキュ

ラム／授業／評価において，特に事柄の構想とそれに基づく構成に関する学習，事柄の生成を評価・改善・発展する学習の重要性が示唆される．また，「体系の生成」は，「証明すること」の必須要素としてのみならず，人類の智恵“知の整理法”として情報化社会で重大な意義を有することから，カリキュラムでの明確かつ不動な位置の確立が渇望される．

さらに，上記の諸学力は資質・能力としての課題探究力が数学教育で紐解かれた結果であり，課題探究力の外延“中身”である．他教科・領域でも課題探究力の外延が同様に定まるとすれば，数学教育の存在意義は外延の差異とその特質に見出されることになる．例えば，事柄や証明の生成に関する学力は他教科･領域でも或る程度育み得るかもしれない．しかし，体系の生成に関する学力が育成可能であるのは,数学の本性として体系を重視し，公理化／体系化／組織化として古来より根付かせてきた数学教育においてのみであろう．

今後の課題は次の通りである．

- 数学的事象に関する課題探究を実現する学力を育むカリキュラム／指導法／評価法開発
- 「課題探究として証明すること」の教科横断的学習としての実現(特に，体系の生成)

注

＊1:全国的な学力調査の実施方法等に関する専門家検討会議による報告書『全国的な学力調査の具体的な実施方法等について(報告)』(平成 18 年 4 月)

謝辞

本研究は科研費(No. 24243077，26282039, 16H02068, 16H03057, 16H03792)を受けている．

引用・参考文献

Bell,A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Fawcett H. P. (1938). *The nature of proof*. NCTM Year Book. New York: Columbia University Teachers College.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*(1), 1, 413-435.

礒田正美 (1987). 体系化の立場から見た中２の図形指導, *日本数学教育学会『数学教育』, 69*，323－332.

Krygowska, A.Z. (1971). Treatment of the axiomatic method in class. In Servais, W. & Varga, T. *Teaching school mathematics* (pp.124-150). Penguin-Unesco: London.

Miyazaki, M. and Fujita, T. (2015). Proving as an explorative activity in mathematics education: new trends in Japanese research into proof. In Sriraman, B. (Eds.), *First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India (International Sourcebooks in Mathematics and Science Education)* (pp. 1375–1407), Charlotte, NC: Information Age Publishing.

宮﨑樹夫 (2014). 数学的事象に関する課題探究を実現する学力とその可能性:「活用する力」βへの提言，*日本数学教育学会　第２回春期研究大会論文集*，27-34.

宮﨑樹夫 (2002). 局所的準体系で演繹の基になる命題の正しさを探る活動:中学校数学の図形領域における活動の諸相，*筑波数学教育研究, 21*, 21-30.

NCVER (2004). *Generic skills in vocational education and training: Research readings* (Edited by Jennifer Gibb). Retrieved from http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED493988.pdf

Pepper, D. (2011). Assessing key competences across the Curriculum - and Europe, *European Journal of Education, 46*(3), 335-353.

清水禎文 (2012). ジェネリック・スキル論の展開とその政策的背景，*東北大学大学院教育学研究科研究年報*, *61*(1), 275-287.

杉山吉茂 (1986). *公理的方法に基づく算数・数学の学習指導*. 東京：東洋館.