有向線分で定義されるベクトル空間の代数的構造

飯田　洋市

キーワード：幾何学的ベクトル　有向線分　集合族　ベクトル空間　アフィン空間

1．はじめに

本論文の目的は，空間内にある，向きと大きさがそれぞれ等しい有向線分を同一視することでベクトルを定義する時，2つの演算(和，実数倍)，さらに成分表示が矛盾なく定義されていることを代数的に示すことである．このことは，結果的に，空間内の点の座標とベクトルの成分表示の関係，さらには，成分表示の役割について明確にすることにもなる．

向きと大きさがそれぞれ等しい有向線分を同一視することでベクトルを定義する方法は，高校の数学Bで扱われている．2節で，数学Bでどのように定義されているかについて紹介する．これが本論文で論ずるベクトルの定義のもととなる．本論文の目的である，代数的な意味で演算が矛盾なく定義されていることを示すためには，集合族および集合族における演算が満たすべき条件を明確にする必要がある．3節で，集合族における演算が矛盾なく定義されることについて説明し，具体例として，整数から有理数を構成する方法を示す．そして，4節で，空間内にある有向線分からベクトルを定義し，さらに2つの演算(和，実数倍)，および成分表示が矛盾なく定義されることを示す．本論文は，ベクトルの向きを座標で定義するところに特徴がある．4節の最後で，応用として，空間内の点の座標とベクトルの成分表示の関係の視点から，空間におけるベクトル方程式を検討する．

ところで，ベクトルの定義に座標を利用することは本末転倒な側面もある．そこで，5節でアフィン空間を定義し，一般的なベクトル空間における数ベクトルを空間内の幾何学的ベクトルに対応させる方法を書き留めた．大学の数学教育でアフィン空間を扱う機会は少ないので有益と考える．

本論文のように，有向線分の同値類として空間のベクトルを扱う視点そのものは新しいものではない．すでに多数の線形代数学の書籍は出版されており，その中では本論文と似たような視点から論じたものもある(たとえば，(佐藤・永井，1976))．しかし，それらの書籍でも，本論文のように，空間座標を利用して有向線分からなる集合に代数的構造を組み込むところまでは立ち入っていない．

本論文を通して，実数全体からなる集合を $\mathbf{R}$，空集合を ϕ であらわす．また，条件PとQに対して，PかつQを $P \wedge Q$ で表記する．

２．数学Ｂの「空間座標とベクトル」でのベクトルの扱い

本節では，数学 B の教科書におけるベクトルの定義について紹介する．これは，まず平面上のベクトルについて有向線分を用いて直観的に定義し，それを空間に拡張するものである．たとえば，2 つの有向線分が幾何学的な意味での平行移動によりちょうど重なるとき，それらの向きと大きさが等しいとした上で，位置を問題にしないで向きと大きさだけで定まるものとして平面上のベクトルを定義している．そして，そのような直観的な理解にもとづいて，空間においても有向線分の同一視を考えられるとし，空間のベクトルを定義している．

有向線分から定義する理由は，ベクトルは速度や力など物理学から発生した考え方であることや，矢印によるベクトルの表現(幾何学的ベクトル)は応用範囲が広いことなどが考えられる．しかし，直観的に理解しやすい反面，集合族を定義していることから，初学者の理解を困難にしている側面もある．たとえば，位置ベクトルなどは理解が容易ではない．

以下，数学 B における空間のベクトルの定義などの例である[1]．

- 有向線分によるベクトルの定義：空間においても，平面の場合と同様に，ベクトルが考えられる．空間のベクトルは，空間内の有向線分で，その位置を問題にしないで，向きと大きさだけを考えたものであり，有向線分 AB で表されるベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で書き表す．
- ベクトルの成分の定義：空間座標の原点を O とし，ベクトル $\vec{a}$ に対して $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A をとり，A の座標を (a_1,a_2,a_3) とする．また，3 つの点 E(1,0,0)，F(0,1,0)，G(0,0,1) をとり，$\vec{e}_1=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\vec{e}_2=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$，$\vec{e}_3=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とすると，$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$ と 1 通りに表すことができる．このベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ を，座標軸に関する基本ベクトルという．また，3 つの実数をベクトルの成分といい，a_1 を x 成分，a_2 を y 成分，a_3 を z 成分という．
- 成分と座標の関係：ベクトルは，その成分を用いて，$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ のようにも書き表す．ベクトルを，原点 O を始点とする有向線分を用いて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表すと，$\vec{a}$ の成分の組 (a_1,a_2,a_3) は，終点 A の座標と一致する．
- ベクトルの演算の定義：ベクトルの和，実数倍は，平面の場合と同様に，次のように表される．

  和　：　$(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.

  実数倍：　$k(a_1,a_2,a_3)=(ka_1,ka_2,ka_3)$，ただし k は実数.
- 幾何学的ベクトルの成分表示と大きさ：座標空間の 2 点 A(a_1,a_2,a_3)，B(b_1,b_2,b_3) と原点 O について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,b_2,b_3)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(b_1,b_2,b_3)-(a_1,a_2,a_3)=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$．したがって，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさは次のようになる．

  成分表示：$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$,

  大きさ　：$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$.

位置を問題にしないで向きと大きさだけを考えたものとしてベクトルを定義すると，ベクトルは集合族として定義される．このとき，ベクトル空間における２つの演算(和，実数倍)が矛盾なく定義されていることを示す必要がある．

３．準備

集合を要素とする集合，いわゆる集合族として集合を定義する場合，いくつか注意すべき問題が発生する．特に，集合族に演算や写像を定義する場合は特別な考察が必要となる．次節でのベクトルの議論を念頭に，この問題を明確にする．

集合 S の任意の２元 a, b に対して $a \sim b$ となるか，そうでないかが明確に定められているとする．このとき，集合 S に関係～が定義されているという．この関係～が次の(E1)から(E3)を満たすとき，関係～は同値関係であるという．

(E1) (反射律)任意の $a \in \mathrm{S}$ に対して，$a \sim a$.

(E2) (対称律)任意の $a, b \in \mathrm{S}$ に対して，$a \sim b$ ならば $b \sim a$.

(E3) (推移律)任意の $a, b, c \in \mathrm{S}$ に対して，$a \sim b$，$b \sim c$ ならば $a \sim c$.

$a \sim b$ のとき，a と b は同値であるといい，a と同値な全ての元からなる集合を C_a とかき，a を含む同値類という：$\mathrm{C}_a = \left\{ b \in \mathrm{S} \mid a \sim b \right\}$. このとき，次が示される．

(C1) 任意の $a \in \mathrm{S}$ に対して，$a \in \mathrm{C}_a$.

(C2) 任意の $a, b \in \mathrm{S}$ に対して，$b \in \mathrm{C}_a$ ならば $\mathrm{C}_a = \mathrm{C}_b$.

(C3) 任意の $a, b, c \in \mathrm{S}$ に対して，$b, c \in \mathrm{C}_a$ ならば $b \sim c$.

(C4) 任意の $a, b \in \mathrm{S}$ に対して，$\mathrm{C}_a \neq \mathrm{C}_b$ ならば $\mathrm{C}_a \cap \mathrm{C}_b = \phi$.

集合 S の異なる同値類の全体 C_λ からなる集合を S/～とかき，$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathrm{S} \mid \mathrm{C}_\lambda \in \mathrm{S}/\sim \right\}$ とおく：$\mathrm{S}/\sim = \left\{ \mathrm{C}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \right\}$. このとき，次が示される：

$$(1)\ \mathrm{S} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{C}_\lambda,\quad (2)\ \lambda \neq \mu \text{ ならば } \mathrm{C}_\lambda \cap \mathrm{C}_\mu = \phi.$$

これらの性質は重要で，これより S は互いに共通元を持たない $\mathrm{C}_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ に完全に分類されることになる．このような分類を類別という．

次に，集合族 S/～に(2 項)演算を定義する．ここでは，集合 S にあらかじめ演算∘が定義されているものとする．すなわち，$a, b \in \mathrm{S}$ に対して，ある $c \in \mathrm{S}$ が対応し，$c = a \circ b$ となるものとする．

さて，各 C_λ から元 a_λ を一つずつ選ぶとき，それら全体からなる集合を類別の完全代表系という．本論文では，便宜上，この集合を $\overline{\mathrm{S}}$ とかく：$\overline{\mathrm{S}} = \left\{ a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \right\}$. 各 a_λ を C_λ の代表元という．任意の $a_\lambda, a_\mu \in \overline{\mathrm{S}}$ に対して $a_\lambda \circ a_\mu = b \in \mathrm{C}_\gamma$ となる $\gamma \in \Lambda$ が存在することがわかる(演算∘は S における演算子)．このとき，(C1)と(C3)より $b \sim a_\gamma$ である．これを $a_\lambda * a_\mu = a_\gamma$ と表すと定義すると，完全代表系 $\overline{S}$ に演算∗が定義される．

ところで，代表元a_λは各同値類から任意に選んだ元だから，このように定義した演算$*$は，一般に代表元の取り方に依存する．そこで，代表元をどのように選んでも，演算結果が変わらないことを保証する必要がある．つまり，上で定義した演算が，演算として矛盾なく機能するには，

$$a_\lambda \sim a'_\lambda,\quad a_\mu \sim a'_\mu \text{ならば},\quad a_\lambda * a_\mu \sim a'_\lambda * a'_\mu$$

という性質が成り立つ必要がある．この性質を満たす演算を,「よく定義された演算」という．「矛盾なく定義された演算」などともよばれる．通常は，演算子$\circ$と$*$を同じ記号$\circ$で書くが，混乱の原因にもなる(例 1 を参照のこと)．このように，集合族に演算を定義する時は，その演算がよく定義された演算であることを確認する必要がある．本論文の目的は，有向線分から定義されるベクトルによる集合族における，和と実数倍が，よく定義された演算となっていることを示すことといえる(定理 3)．成分表示についても同様の配慮が必要となる(定理 4)．

集合族は数学の各所で現れるが，たとえば，有理数はそのようなものになっている．以下，集合族における演算の視点から，整数から有理数を構成する例を示す．

例 1. (整数と有理数)整数の集合を$\mathbf{Z}$とし，集合$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{Z}, x\neq 0\}$を考える．この集合に関係$\sim$を定義する：$(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$．この関係$\sim$は，同値関係である．そこで，集合族$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/\sim$を考え，次の 2 つの演算を定義する：

和：$(a,b)+(c,d)=(ac,bc+ad)$，積：$(a,b)\times(c,d)=(ac,bd)$.

このとき，$(a,b)\sim(a',b')$，$(c,d)\sim(c',d')$に対して，$(a,b)+(c,d)=(a',b')+(c',d')$，$(a,b)\times(c,d)=(a',b')\times(c',d')$が，同値関係の定義(E1)，(E2)，(E3)から示される．よって，この演算は，よく定義された演算である．

一般に，$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/\sim$を Q とかき有理数の集合，$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$の元$(a,b)$を$\dfrac{b}{a}$とかき有理数とよび，$(a,b)\sim(c,d)$を$\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$とかく．これより，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}=\dfrac{bc+ad}{ac}$，$\dfrac{b}{a}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{bd}{ac}$となる．特に，$(1,b)$と整数$b$を同一視することで，整数は有理数の部分集合となる．各同値類の代表元として，既約分数を取ることは周知の通りである．有向線分からなるベクトルの集合では，位置ベクトルがこの役割を果たすと解釈できる(4.2 節の図 1)．

4．空間座標を利用した有向線分によるベクトルの定義

ベクトルの定義に先立ち，空間座標により，有向線分の向きと大きさを定義することから始める．2 つの有向線分について，幾何学的な意味での平行移動による同一視を，空間座標を適用することで代数学的な言葉に置き換えることもできる．これについては，4.1 節の終わりで説明する．本節では空間ベクトルを扱うが，平面上のベクトルや一般的な幾何学的ベクトルについても同様に扱える．

4．1．空間座標による有向線分の向きと大きさの定義

空間の 2 点 A と B について，順序のついた組 AB を考え，それを有向線分といい AB と書く．点 A を始点といい，点 B を終点という．AA も一つの有向線分とみなす．ここで，この空間にある直交座標系が与えられているとし，$\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$，

$B(x_2, y_2, z_2)$ とする．このとき，有向線分 AB に $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^6$ を対応させる写像を考える[2]．この写像は全単射であり，空間内の有向線分と $\mathbf{R}^6$ が同一視できる．この同一視を利用して，有向線分全体の集合に 2 つの演算，和と実数倍を定義する．なお，この定義に幾何学的な意義は期待できない．

2 つの有向線分 $\mathrm{AB} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ と $\mathrm{CD} = (x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4)$ に対して，次のように和と実数倍を定義する：

$$\text{和} \quad : \mathrm{AB} + \mathrm{CD} = (x_1 + x_3, y_1 + y_3, z_1 + z_3, x_2 + x_4, y_2 + y_4, z_2 + z_4),$$

$$\text{実数倍}: k \cdot \mathrm{AB} = (x_1, y_1, z_1, x_1 + k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1), z_1 + k(z_2 - z_1)), \quad k \in \mathbf{R}.$$

たとえば，$0 \cdot \mathrm{AB} = \mathrm{AA}$，$1 \cdot \mathrm{AB} = \mathrm{AB}$．次に，有向線分 AB の大きさ $|\mathrm{AB}|$ を定義する：

$$\text{大きさ}: |\mathrm{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

さらに，有向線分 AB(点A ≠ 点B)の向き (α, β, γ) を次のように定義する：

$$\text{向き}^3 \quad : \quad \begin{aligned} \alpha &= \cos^{-1} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \beta &= \cos^{-1} \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \gamma &= \cos^{-1} \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}. \end{aligned}$$

向き (α, β, γ) は $0 \le \alpha \le \pi$，$0 \le \beta \le \pi$，$0 \le \lambda \le \pi$ で一意的に決まる．空間座標の値から向きが定まっていることに注意．始点と終点が等しい有向線分 AA には向きを定義しないものとする．このとき，次が成り立つ．

定理 1　空間の 4 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$，$\mathrm{A}'(x_1', y_1', z_1')$，$\mathrm{B}'(x_2', y_2', z_2')$ をとる．このとき，2 つの有向線分 AB と A′B′ の向きと大きさがそれぞれ等しいための必要十分条件は，$(x_2 - x_1 = x_2' - x_1') \wedge (y_2 - y_1 = y_2' - y_1') \wedge (z_2 - z_1 = z_2' - z_1')$ である．なお，始点と終点が等しい有向線分 AA と BB については，向きが定義されていないという意味で，同じ向きを持つと解釈する．

証明．必要条件を示す．有向線分 AB と A′B′ の向きと大きさが等しいことから，たとえば，次の 2 式が成り立つ：

$$\text{向き}: \cos^{-1} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} = \cos^{-1} \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}},$$

$$\text{大きさ}: \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}.$$

逆余弦関数($y = \cos^{-1} x$)は単射であるから，上の 2 式より，$x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$ を得る．

同様に，$y_2 - y_1 = y_2' - y_1'$，$z_2 - z_1 = z_2' - z_1'$．逆は明らか．(証明終)

ところで，幾何学的な意味での平行移動による 2 つの有向線分の一致を，座標を用いて記述すると次のようになる．すなわち，2 つの有向線分 $\mathrm{AB}=(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)$ と $\mathrm{A'B'}=(x_1',y_1',z_1',x_2',y_2',z_2')$ に対して，AB と A′B′ が幾何学的な意味で平行移動により一致することと，次を満たす実数 a，b，c が存在することは同値である：

$$(x_1'=x_1+a)\wedge(y_1'=y_1+b)\wedge(z_1'=z_1+c)\wedge(x_2'=x_2+a)\wedge(y_2'=y_2+b)\wedge(z_2'=z_2+c).$$

また，これは以下と同値である：

$$(x_1'-x_1=x_2'-x_2)\wedge(y_1'-y_1=y_2'-y_2)\wedge(z_1'-z_1=z_2'-z_2).$$

これと定理 1 より，2 つの有向線分が同じ向きと大きさをもつことと，幾何学的な意味で平行移動により一致することは同値であることが容易にわかる．この議論から，2 つの有向線分が平行移動により一致することと，向きと大きさが等しいことは，代数的な表現では異なることがわかる．

４．２．集合族としてのベクトルと代表元としての位置ベクトル

3 節で準備した内容を用いて，有向線分全体からなる集合から類別を作る．まず，空間内の有向線分全体からなる集合を S とする．そして，2 つの有向線分 $\mathrm{AB}=(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)$ と $\mathrm{A'B'}=(x_1',y_1',z_1',x_2',y_2',z_2')$ に対し，次の関係～を定義する：

$$\mathrm{AB}\sim\mathrm{A'B'}\Leftrightarrow(x_2-x_1=x_2'-x_1')\wedge(y_2-y_1=y_2'-y_1')\wedge(z_2-z_1=z_2'-z_1').$$

定理 1 より，この関係～は，向きと大きさがそれぞれ等しい 2 つの有向線分を同一視することを，代数的に言い換えたものになっている．この関係～は同値関係となる．実際，(E1) AB～AB，(E2) AB～CD ならば CD～AB，(E3) AB～CD かつ CD～EF ならば AB～EF が成り立つ．

今，この同値関係～による類別として得られる集合族 S/～を V と書く．ある有向線分 AB に同値な有向線分全体からなる集合，すなわち，同値類 C_{AB} を“ベクトル AB”とよび，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す：$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathrm{C}_{\mathrm{AB}}=\{\mathrm{CD}\in\mathrm{S}\mid\mathrm{AB}\sim\mathrm{CD}\}$．(C1)から(C4)より，集合族 $\{\mathrm{C}_{\mathrm{AB}}\}_{\mathrm{AB}\in\Lambda}=\{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\}_{\mathrm{AB}\in\Lambda}$ について次が成り立つ(Λ はある完全代表系とする)：

(C′1) 任意の $\mathrm{AB}\in\mathrm{S}$ に対して，$\mathrm{AB}\in\overrightarrow{\mathrm{AB}}$．

(C′2) 任意の $\mathrm{AB},\mathrm{CD}\in\mathrm{S}$ に対して，$\mathrm{CD}\in\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$．

(C′3) 任意の $\mathrm{AB},\mathrm{CD},\mathrm{EF}\in\mathrm{S}$ に対して，$\mathrm{CD},\mathrm{EF}\in\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ならば $\mathrm{CD}\sim\mathrm{EF}$．

(C′4) 任意の $\mathrm{AB},\mathrm{CD}\in\mathrm{S}$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cap\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\phi$．

これらは，有向線分とベクトルの関係をよく表している．ところで，ベクトルの代表元として，原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ を始点とする有向線分を選べることが，次よりわかる．

定理 2　任意のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ を始点とする有向線分を含む．特に，原点 O を始点とする有向線分全体からなる集合は，ベクトル全体の集合 V の完全代表系 $\overline{\mathrm{V}}$ を与える．すなわち，$\overline{\mathrm{V}}=\{\mathrm{OP}=(0,0,0,p_1,p_2,p_3)\mid\mathrm{P}(p_1,p_2,p_3)\in\mathbf{R}^3\}$．

証明．任意の有向線分 $\mathrm{AB}=(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)$ に対して，$(0,0,0,x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

$\in\overrightarrow{\mathrm{AB}}$であることから，任意のベクトルは原点 O を始点にする有向線分を含む．また，空間の座標として，$\mathrm{P}(p_1,p_2,p_3)\neq\mathrm{Q}(q_1,q_2,q_3)$であれば，OP と OQ は同値ではないから，後半が示される．(証明終)

原点 O を始点とする有向線分を代表元と考えたベクトルを，簡単に，原点 O を始点とするベクトルといい，その代表元を，原点 O に関する位置ベクトルという[4]．同様の議論により，空間内の任意の 1 点 P に対しても，それを始点として固定することで，点 P に関する位置ベクトルが定義できる(図 1 を参照のこと).

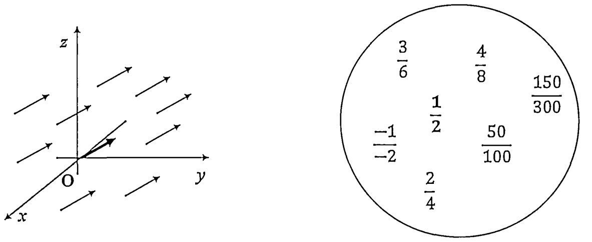

図 1 ベクトルの集合族 S/∼としての位置ベクトルと
有理数の集合族 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/\sim$ における既約分数

4．3．ベクトルの演算(和，実数倍)の整合性

ベクトル全体の集合 V に 2 つの演算，和と実数倍を定義する．2 つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$をとる． $\mathrm{AB}=(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)$，$\mathrm{CD}=(x_3,y_3,z_3,x_4,y_4,z_4)$とする．このとき，有向線分における和と実数倍を利用して，次のように定義する：

和　　：$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overline{(x_1+x_3,y_1+y_3,z_1+z_3,x_2+x_4,y_2+y_4,z_2+z_4)}$,

実数倍： $k\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overline{(x_1,y_1,z_1,x_1+k(x_2-x_1),y_1+k(y_2-y_1),z_1+k(z_2-z_1))}$,　$k\in\mathbf{R}$.

演算子は有向線分の演算子と同じ記号とした一方，関係∼で同一視されたものを示唆するために，演算結果の方を$(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)$ではなく$\overline{(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)}$とした．

さて，3 節で説明したように，このように定義した演算が，よく定義された演算であることを確認する必要がある．次の定理より，これらの演算が，各ベクトルからの代表元としての有向線分の取り方に依らず一意に定まることがわかる(図 2).

定理 3 上のように定義したベクトルの和と実数倍は，代表元としての有向線分の取り方に依らない．

証明．2 つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{A'B'}},\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$について， $\mathrm{AB}=(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)$，$\mathrm{A'B'}=(x_1',y_1',z_1',x_2',y_2',z_2')$，$\mathrm{CD}=(x_3,y_3,z_3,x_4,y_4,z_4)$，$\mathrm{C'D'}=(x_3',y_3',z_3',x_4',y_4',z_4')$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}+\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$， $k\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\cdot\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$を示せばよい．まず，定義より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overline{(x_1+x_3,y_1+y_3,z_1+z_3,x_2+x_4,y_2+y_4,z_2+z_4)},$$

$$\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{(x_1'+x_3',y_1'+y_3',z_1'+z_3',x_2'+x_4',y_2'+y_4',z_2'+z_4')}$$

である．このとき，同値関係$AB \sim A'B'$， $CD \sim C'D'$より，

$$(x_2+x_4)-(x_1+x_3)=(x_2-x_1)+(x_4-x_3)\sim(x_2'-x_1')+(x_4'-x_3')=(x_2'+x_4')-(x_1'+x_3').$$

同様に，$(y_2+y_4)-(y_1+y_3)\sim(y_2'+y_4')-(y_1'+y_3'),(z_2+z_4)-(z_1+z_3)\sim(z_2'+z_4')-(z_1'+z_3')$.

よって，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{C'D'}$となる．実数倍についても同様に示される．(証明終)

上で定義した 2 つの演算は代表元の取り方に依らないので，原点$O(0,0,0)$に関する位置ベクトルを利用すれば，その代表元となる有向線分の終点の座標だけで決まる．実際，ベクトル$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{(0,0,0,p_1,p_2,p_3)}$， $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{(0,0,0,q_1,q_2,q_3)}$とすれば，和と実数倍は次のように計算できる：

和　　：$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{(0,0,0,p_1+q_1,p_2+q_2,p_3+q_3)}$,

実数倍：$k\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{(0,0,0,kp_1,kp_2,kp_3)}$， $k\in\mathbf{R}$.

記号としては，完全代表系として原点 O に関する位置ベクトルを選べば，点 P の座標で$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{(p_1,p_2,p_3)}$とかけることになる．$(p_1,p_2,p_3)$でなく，$\overrightarrow{(p_1,p_2,p_3)}$であることに注意すると，成分表示とは異なる視点であることがわかる．

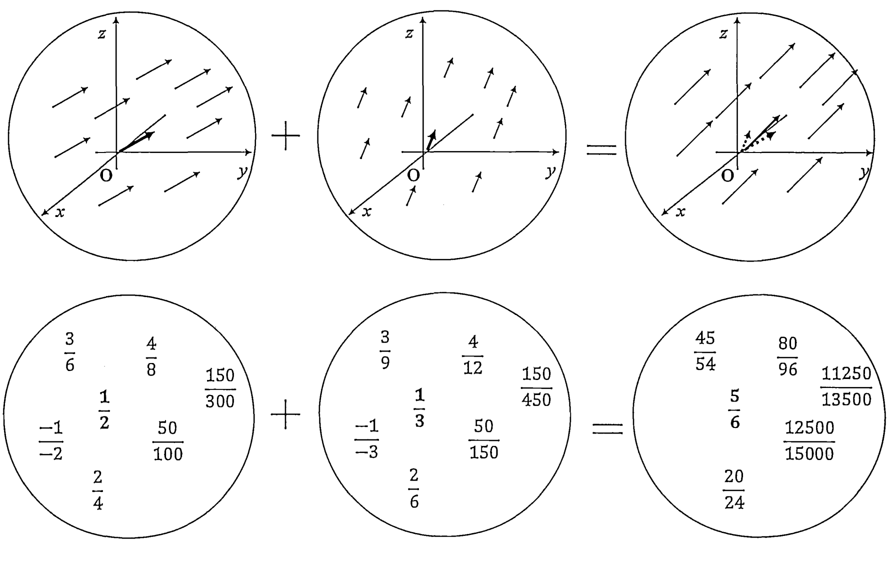

図 2　ベクトルと有理数の和(集合族の和)のイメージ

４．４．ベクトルの成分表示の定義

ベクトルの成分を定義する．ベクトル全体の集合 V から任意にベクトル$\overrightarrow{AB}$を取る．このとき，$AB=(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)$とすると，次を$\overrightarrow{AB}$の成分表示という：

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

本論文では，座標と区別するため，ベクトルの成分表示は縦書きを採用したが，これは本質的なことではない．前節で注意したように，ベクトルに関して座標(のようなもの)を指す場合，関係～で同一視したものになっている．集合族からの写像を考える場合も，代表元の取り方に依らず行き先が決まるか配慮する必要がある．ちなみに，行き先は通常の元からなる集合である．

次の定理より，ベクトルの成分表示は，代表元としての有向線分の取り方に依らず一意に定まることがわかる．

定理 4 次の対応 f は，ベクトルの集合 V から成分表示の集合 $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$ へ

の全単射な写像を作る： $f : \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$.

ただし， $\mathrm{AB} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ とする．

証明．まず，この対応は代表元の取り方に依らないことを示す． $\mathrm{A'B'} \in \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\mathrm{A'B'} = (x_1', y_1', z_1', x_2', y_2', z_2')$ のとき， $\mathrm{AB} \sim \mathrm{A'B'}$ の定義から， $(x_2' - x_1' = x_2 - x_1) \wedge (y_2' - y_1' = y_2 - y_1) \wedge (z_2' - z_1' = z_2 - z_1)$ より $f(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = f(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}})$ である．単射は同値関係の定義より明らか．全射については，任意の $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ に対して， $\mathrm{OP} = (0,0,0, p_1, p_2, p_3)$ を選べば，

$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})$ であることから示される．(証明終)

成分表示は原点 O を始点とする有向線分の終点の座標と一致することが，定理 4 の証明からわかる．よって，任意のベクトルは，原点 O を始点とする有向線分の終点を用いて， $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ のように成分表示できる．このとき，p_1 を x 成分，p_2 を y 成分，p_3 を z 成分という．

このことと 4.3 節の最後の 2 式より，次のように表記できることもわかる：

$$和：\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + q_1 \\ p_2 + q_2 \\ p_3 + q_3 \end{pmatrix}, \quad 実数倍：k \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kp_1 \\ kp_2 \\ kp_3 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{R}.$$

この表記と 4.3 節の最後の注意と比較すると，座標と成分の違いが明確になる．これより，原点 O に関する位置ベクトルの終点を，そのベクトルを代表元とする同値類としてのベクトルの成分と同一視できる．ただし，位置ベクトルは任意の点 P に関して定義できるので，終点にこだわると混乱する．

４．５．空間図形（直線，平面）の方程式

4.4 節までの議論の応用として，空間座標とベクトルの成分表示が混在する，空間におけるベクトル方程式について吟味する[5]．

点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}=\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線 ℓ を考える．直線 ℓ 上の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ は，実数 t を用いて，次のベクトル方程式で表される：

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d} \text{ あるいは } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}.$$

ここで，方向ベクトル $\vec{d}=\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ について吟味する．$\vec{d}$ は原点 O を始点とする時，終点の座標を D とすると，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる．すなわち，点 (l, m, n) は，一般に，直線 ℓ とは関係のない位置にある(図 3)．もし，直線 ℓ 上にある点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ と方向ベクトル $\vec{d}$ を結び付けるなら，点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ を始点とし，点 $\mathrm{B}(a_1+l, a_2+m, a_3+n)$ を終点とする有向線分，すなわち，有向線分 $(a_1, a_2, a_3, a_1+l, a_2+m, a_3+n)$ を考えることになる．点 A と点 P は，座標の値と対応する成分がそれぞれ一致する．

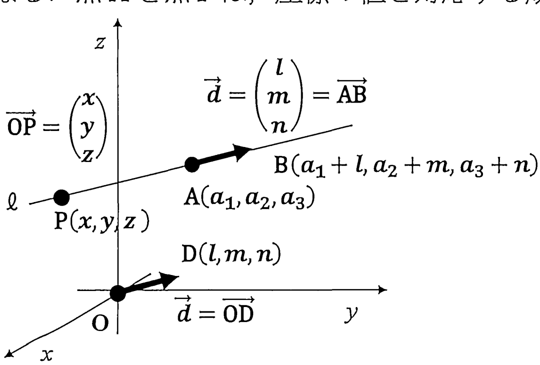

図 3　直線と方向ベクトル

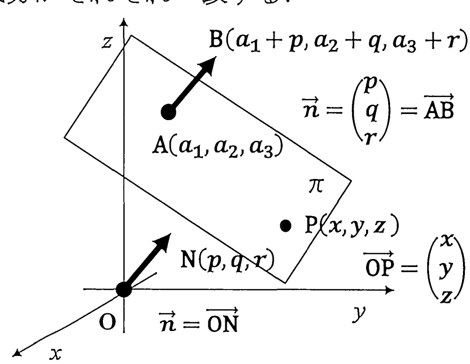

図 4　平面と法線ベクトル

もう一つの例として，点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする平面 π を考える．平面 π 上の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ は，直交関係 $\perp$ あるいは内積 $\cdot$ を用いて，次のベクトル方程式として表される：

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}} \text{あるいは} \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0.$$

ここでは，法線ベクトル$\vec{n} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$について吟味する．$\vec{n}$は原点Oを始点とするときに，終点の座標が$\mathrm{N}(p,q,r)$となることを意味する．すなわち，点$(p,q,r)$は，一般に，平面$\pi$とは関係のない位置にある．もし，平面$\pi$ 上にある点$\mathrm{A}(a_1,a_2,a_3)$と法線ベクトル$\vec{n}$を結び付けるなら，点$\mathrm{A}(a_1,a_2,a_3)$を始点とし，点$\mathrm{B}(a_1+l,a_2+m,a_3+n)$を終点とする有向線分，すなわち，有向線分$(a_1,a_2,a_3,a_1+p,a_2+q,a_3+r)$を考えることになる(図4)．平面$\pi$上にある任意の点Aと点Pは，座標の値と対応する成分がそれぞれ一致する．

これらの例からも，有向線分から定義されるベクトルを扱う時は，空間座標(点に与えられた値)と成分表示(集合に与えられた値)の使い分けが重要といえる．

5．アフィン空間としての空間のベクトル

有向線分からベクトルを定義したが，本来のベクトルは座標とは無関係である．本節では，一般的なベクトル空間の定義からアフィン空間を定義し，有向線分により定義したベクトルと空間座標と対応関係について説明する．まず，ベクトルを定義する：

Vを空でない集合，Kを可換体とする．実数全体や複素数全体は可換体である．このとき，Vに2つの演算(加法とスカラー倍)が定義され，次の(V1)から(V8)を満たすとき，VをKの上のベクトル空間とよび，Vの元をベクトル，Kの元をスカラーという：

加法　　　：$a,b \in \mathrm{V}$ならば$a+b \in \mathrm{V}$,

スカラー倍：$a \in \mathrm{V}$，$k \in \mathrm{K}$ならば$k \cdot a \in \mathrm{V}$.

(V1) 任意の$a,b,c \in \mathrm{V}$に対して，$(a+b)+c = a+(b+c)$.

(V2) $0 \in \mathrm{V}$が存在して，任意の$a \in \mathrm{V}$に対して，$a+0 = 0+a = a$.

(V3) 任意の$a \in \mathrm{V}$に対して，$a' \in \mathrm{V}$が存在して，$a+a' = a'+a = 0$.

(V4) 任意の$a,b \in \mathrm{V}$に対して，$a+b = b+a$.

(V5) 任意の$a,b \in \mathrm{V}$，$k \in \mathrm{K}$に対して，$k \cdot (a+b) = k \cdot a + k \cdot b$.

(V6) 任意の$a \in \mathrm{V}$，$k,h \in \mathrm{K}$に対して，$(k+h) \cdot a = k \cdot a + h \cdot a$.

(V7) 任意の$a \in \mathrm{V}$，$k,h \in \mathrm{K}$に対して，$(kh) \cdot a = k \cdot (h \cdot a)$.

(V8) 任意の$a \in \mathrm{V}$，$1 \in \mathrm{K}$に対して，$1 \cdot a = a$.

このようにベクトル空間を定義すると，4節で定義した①有向線分全体S，②ベクトルの集合空間V(=S/～)，③原点Oに関するベクトル全体$\overline{\mathrm{V}}$(完全代表系)，④成分表示の集合(定理4)は，全てベクトル空間となる．さらには，⑤空間内の任意の点Pに関するベクトル全体(点Pを始点とする位置ベクトル全体からなる完全代表系)もベクトル空間となる．宮島(2007)は，n次元座標空間の幾何学的ベクトル全体，特

定の点を始点とする有向線分全体，$\mathbf{R}^n$ 自身の三つが同一視できることにベクトルの有用性である一方，そのことが混乱のもととも指摘している．

次に，アフィン空間を定義する．この特別な場合として，ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ に空間座標を考えることができる．有向線分によるベクトルは，これと同値になる：

A を空でない集合，K を可換体とする．このとき，A に対して K 上の n 次元ベクトル空間 V があり，次の(A1)から(A3)を満たすとき，A は K の上のアフィン空間であるという．

(A1) $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathrm{A}$ に対し，V の元 v が一意的に定まる．これを $v=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と書く．

(A2) $v\in\mathrm{V}$，$\mathrm{P}\in\mathrm{A}$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=v$ となる点 $\mathrm{Q}\in\mathrm{A}$ が一意的に定まる．

(A3) $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R}\in\mathrm{A}$ ならば，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ である．

このとき，A の元を点といい，V を A に付随したベクトル空間という．A は点の集合であるが，(A1)よりベクトルの元に対応して，始点と終点からなる有向線分が決まることになる．集合 A からベクトル空間 V への全単射 σ があれば，$\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathrm{A}$ に対し $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\sigma(\mathrm{Q})-\sigma(\mathrm{P})$ とおくことで, A が V に付随するアフィン空間となることが示される(たとえば(永田，1987))．

ここで，集合 $\mathbf{R}^3=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\mathbf{R}\}$(空間座標)と $\mathbf{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathrm{V}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\, x,y,z\in\mathbf{R}\right\}$ を考える．座標 $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ を $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathrm{V}$ に対応させる写像 σ は明らかに全単射である．よって，$\mathrm{P}=(x,y,z)$，$\mathrm{Q}=(x',y',z')\in\mathbf{R}^3$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\sigma((x',y',z'))-\sigma((x,y,z))$ とおけば，集合 $\mathbf{R}^3$ が $\mathbf{R}$ 上のアフィン空間となる．このとき，V がベクトル空間であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\sigma((x',y',z'))-\sigma((x,y,z))=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix}.$$

以上により，数ベクトル空間 V（成分表示が作る集合であり，幾何学的ベクトルとは独立に定義されるベクトル空間）から，空間内の有向線分から定義されるベクトルが導出されたことになる．

より一般に，次のようにして，アフィン空間 A に座標系および位置ベクトルが定義できる．まず，アフィン空間 A の任意の 1 点 O を固定する．また，A に付随した n 次元ベクトル空間 V の基底 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ を取る．たとえば，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=v=\sum_{i=1}^{n}p_i v_i\in\mathrm{V}$ であれば，$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ を点 P の座標とする．このとき，$(\mathrm{O};v_1,v_2,\cdots,v_n)$ を A の座標系といい，点 O を原点，$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=v_1,\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=v_2,\cdots,\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}=v_n$ となる $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_n$ を座標系 $(\mathrm{O};v_1,v_2,\cdots,v_n)$ の単位点いう．さらに，原点 O とこれらをそれぞれ結ぶ n 本の直線を

座標軸という．さらに，各点Pに対して，$\overrightarrow{OP}$をPの位置ベクトルという．ただし，この座標系や位置ベクトルは，Aの1点OとVの基底の取り方に依存している．

6．議論

本論文の方針について議論する．本論文では，4.1節で有向線分全体からなる集合Sに2つの演算を定義した．一方，集合Sには演算を定義せず，4.3節において，ベクトルの集合V(=S/～)に直接それらを定義することもできる．しかしながら，ベクトル空間の定義(5節)の立場から，有向線分S自身がベクトル空間になっていることを明示することは意義があると考えた．副次的ではあるが，有向線分全体からなる集合Sにおける実数倍の式や，1点からなる有向線分AA(あるいは点A)が同値関係～により原点Oと同値になること(定理1)を示すことができた．

次に，成分表示については，数学Bとは全く異なる方法で定義した．数学Bの定義では，基本ベクトルの一次独立性などを考慮する必要がある．また，幾何学的な平行移動に頼り過ぎている傾向がある．また，成分を終点の座標から始点の座標を座標の値ごとに引き算したものと定義することもある．これについては，本論文のような集合族に関する配慮が必要といえる．以下も副次的ではあるが，この議論により，成分は有向線分の方向と大きさを同一視する視点から本質的な働きをしていることを明確にできた(定理1)．

最後に，集合族の扱いを分かりやすく説明するために，整数と有理数の関係を利用した(例1など)．しかし，厳密には，有理数が整数を部分集合として含む一方で，有向線分はベクトルの部分集合にはならないので，これらを完全には同様に扱えない．3節の例1で見たように，有理数の場合，基礎となる集合は$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$である．また，記号についても，たとえば，$(-2,-1)=\dfrac{-1}{-2}\in\mathbf{Q}$などは記号として一般に正しくない．以上のような欠点もあるが，集合族としてのベクトルを理解する上では，使い慣れた既知の知識を活用する利点から，有理数を積極的に引き合いに出した．

7．まとめ

本論文では，空間内にある有向線分から定義されるベクトルが集合族となることから，空間における演算や成分表示が矛盾なく定義されていることを示した．これにより，結果的に，空間にある点の座標と成分表示の本質的な違いを明確にすることができた．そして，空間にある点の座標とベクトルの成分表示の違いに注意しながら，2種類のベクトル方程式について概観した．最後に，上記のように定義される有向線分の集合は，ベクトル空間そのものというよりも，アフィン空間とよばれるものであることを，一般的な理論に沿って説明した．これらの議論を押さえることで，高校数学における数学Bのように，ベクトルの定義として，有向線分から定義する方法を安心して利用することができると考える．

注

[1] 数研出版『数学 B』(平成 28 年 1 月 10 日発行)より，原文のまま転載.

[2] $(x_1, y_1, z_1) \to (x_2, y_2, z_2)$などの表記も考えられる.

[3] この向きは，いわば，方向余弦である．方向余弦としてベクトルの向きを定義することも考えられるが，新たに有向直線を定義する必要がある.

[4] 数学 B の教科書(数研出版)では「1 点 O を固定すると，任意の点 P の位置はベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって定められる．このとき，$\vec{p}$ を点 O に関する位置ベクトルという」としている.

[5] 数研出版の『数学 B』(平成 24 年 2 月 15 日検定済，平成 28 年 1 月 10 日発行)では「空間のベクトル」の「発展」として，平面の方程式と直線の方程式を扱っている.

参考文献

1. 佐藤正次・永井治,『基礎課程　線形代数学　新版』, 学術図書出版，1976 年.
2. 永田雅宜他,『理系のための線型代数の基礎』, 紀伊國屋書店，1987 年.
3. 宮島静雄,『微分積分学としてのベクトル解析』, 共立出版，2007 年.

(諏訪東京理科大学 経営情報学部 教授)
(信州大学 全学教育機構 非常勤講師)
2017 年 1 月 8 日受理　2018 年 2 月 5 日採録決定