

数学を用いて現実の問題を解決する授業の在り方

飯島 政昭 高度教職実践コース

キーワード：数学的モデル化，みなす，みなす自覚の促進

1. 研究動機・研究問題・研究問題解決へのアプローチ

受験のために数学を勉強しているが、役に立たないと考えている生徒が多い。日常の場面の問題を扱っているが、生徒は数学の有用性を実感していない現実がある。さらに、日常事象を数学的に捉えて問題解決することは、数学の有用性を感じ得ることに留まらず、現実事象を数理的に捉えて考察する資質を身に付けることにも役立つと考える。それ故、日常事象を数学的に捉えて問題解決する授業の在り方を研究する必要がある。

そこで、研究問題「数学を用いて現実の問題を解決する授業の在り方とは何か」に取り組む。この研究問題の解決に以下のようにアプローチする。

(1) 先行研究等で数学的モデル化の考え方や実践事例の調査を行い、みなす枠組みを明確にする。

(2) (1)をもとに授業を構想し、授業実践とリフレクションを行う。

2. 数学を用いて現実の問題を解決すること

2.1 日常生活等の事象を数理的に捉えて問題解決する

数学的モデル化過程とは、現実事象を数学的モデルに置き換え、数学的な処理を行い、数学的処理によって求めた解答を現実事象に照らして評価・解釈することで問題解決するプロセスである。三輪(1983)は、数学的モデル化過程を図1のように示している。

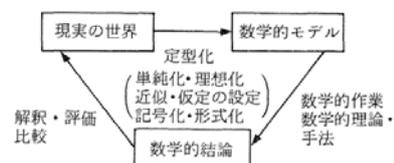


図1 数学的モデル化過程
三輪. (1983. P. 120)

また、西村(2013)は「現実の世界」を「社会の問題」としている(pp. 49～50)。ある目的のために、複雑な現実事象を、数学とみなして、単純化・理想化等を行う過程が定式化である。数学的モデル化過程を位置付けた授業のリフレクションから、数学的モデル化過程におけるみなすとその自覚が重要であると省察した。

実践した授業では、クラス全員リレーで優勝するために、前走者がどの位置(マークポイント)に来たらスタートするかを、一次関数を用いて求めた。生徒は、50m走のラップタイムの散布図を観察して、スタート直後の点の並びを折れ線、中盤以降の点の並びを直線と教師の指示に従ってみなし、定式化した。その後、生徒は、前走者を表す折れ線と次走者を表す直線を1点で交わるように重ね、切片を読み、マークポイントを求めた(数学的処理)。そして、求めたマークポイントを使用し、流れるようなバトンパスができたかを確認した(評価・解釈)。好タイムで2位になり、生徒は一次関数が陸上競技でも使える

ことに関心を示した。その一方で、教師は、マークポイントを予測するために、散布図の点の並びを直線とみなすことを、生徒がどう解釈したのか捉えることができなかった。これは、数学的モデル化過程のどの部分に焦点をあてるのかを、教師が明確にしていなかったことが原因であった。

清野(2015)は、「比例とみなす」数学的モデル化の授業を、「仮定の意識化」を視点に実施・分析した結果、『授業のプロトコルと学習感想は、「比例とみなす」ことの方法の理解と意義の感得の1例を示しており、「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導の有効性の一端が確認できたと考えられる』と述べている(P. 112)。「仮定の意識化」とはみなすことの自覚である。現実事象を数理的にどう捉えるのかを見る窓口がみなすことであり、みなすことを自覚したときに数理的な理解と有用性を感得すると考えた。

2.2 日常生活等の事象をみなすことで問題解決する

永田(2004)は「比例するとみなす」には、以下の2つの見方があると述べている。

- ①物理法則などとして、比例することがわかっているが、測定による誤差などの影響で、定義に当てはまらなくなる場合
- ②厳密な意味では比例するとは言えないが、比例に近い数量の関係になる場合 (p. 14)

数学の適用範囲を広げ、明確な目的(予測等)を持って数学を使おうとするために、比例に限らず②のみなす見方、つまり「厳密には数学の定義にあてはまらないが、そうみなすことで目的が達成される」という見方が大切である。

実践した授業では、中学校2年生の生徒が、2000mのラップタイムのデータから、1850mを走ったときのタイムを予測した。生徒は、散布図上に直線を引き(図2)、グラフの目盛りを読みとったり、直線を式に表したりして、図3のように $x = 1850$ のときの y の値を求めていた。

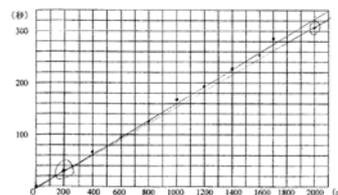


図2 直線とみなしたグラフ
1850mのときのタイム … 290秒

4分50秒
(1位)

図3 生徒のワークシート

散布図の点の並びが、だいたい直線だから直線とみなした生徒が多かった。このような生徒に対して、点の並びが直線でないことを確認し、直線とみなすことで予測可能になると指導するべきであった。

また、数学的な解答を求めることはできたが、比例定数の意味を解釈できない生徒が多かった。このことは、川口(2011)から得た、みなす経験の少ない1・2年生にとって、評価・解釈の時にみなすことを自覚するのは難しいという知見とも合致する (p. 65)。

3 数学を用いて現実の問題を解決する授業の在り方

3.1 みなすことの促進

2年時のリレー問題では、スタート直後の散布図の点の並びを折れ線とみなし、マークポイントを予測した。生徒は、3年時のリレーで優勝するため、より正確に予測する必要

があると考えた。スタート直後の散布図の点の並びを曲線とみなした方がよいのか、折れ線とみなした方がよいのかを、図4を観察・考察し、判断する授業を行った。なんとなく折れ線とみなした方がいとワークシートに記述したものの、「なぜ折れ線とみなした方がいとと思ったの？」と問われ、明確に答えられないY生に対して、教師は「より正確に予測する」という目的を確認するよう促した。Y生は教師の働きかけにより、「より正確に求めるなら曲線とみなし、簡単に求めるなら折れ線とみなした方がいと」と目的に応じてみなすに至った。ペア追究・全体追究で友だちの考えを聞き、自分の考えを補完し、最終的に図5のように記述した。

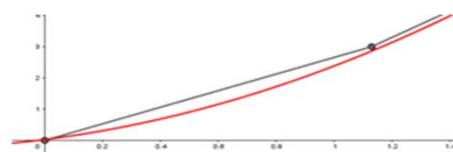


図4 折れ線とみなしたグラフと曲線とみなしたグラフ

(自分の考え)
折れ線で、平方線で、見たい
ときに、折れ線の方が、わかり
やすいから。(一定で走る)
○より正確に求めるなら、曲線の方が、それ
が、このときが、おそいから、遅くなる。作られた
(友だちの考え) 速くなる。

図5 Y生のワークシート

Y生は、確認した目的が「より正確に予測する」であったため、みなすことが手段として必要になったと考える。3年時は、生徒が教師にリレー問題を持ちかけるほど優勝したい思いが強かったことと、2年時のみなす経験があったことで、目的が「より正確に予測する」になったと考える。これらのことから、教師は、みなす経験の少ない生徒に対して「予測する」と明確に示し、生徒の状況によっては「正確に予測する」等と目的を詳細にして示すのがよいと示唆された。

研究問題に対する解答その1

みなすことの促進のために、みなす経験の少ない生徒に対しては、問題解決のために生徒がみなすことができるように、教師が問題解決の目的を明確に示す。生徒の状況によっては目的を詳細にして示す。

3.2 みなすことの自覚の促進

日野(2008)は、予測する場面で、生徒が数量関係をどんな関数とみなすかをあれこれ考える必要性と、生徒の関数の考えを引き出すために、比較することで、関数の性質に目を向ける重要性を述べている(pp. 41~43)。また、筑波大学附属中学校国語科(2017)では、学習者の主体性を重視した授業を実現する手立ての1つに、学習内容に何らかの選択的要素を組み込むことを提案している(p. 11)。これらから、みなすことの自覚の促進のために、現実事象をどんな数学とみなすかの判断を生徒に委ね、学習内容に生徒が比較できるような選択的要素を組み込むのがよいと考えた。

前述の3年生のリレー問題の授業で、生徒は、散布図の点の並びを、曲線とみなした場合と折れ線とみなした場合とを比較することを通して、曲線と折れ線の違いを明らかにし、「より正確に予測する」という目的と照らし合わせ、曲線とみなした方がよいと判断するに至った。

2年生のリレー問題の授業では、直線以外の選択肢が現れなかったため、生徒がどんな

関数とみなすかを考えたり、関数の性質に目を向けたりすることがなかった。それ故、散布図の点の並びを、直線とみなすことの自覚がなかったと考える。しかし、3年時は、曲線と折れ線という選択肢が現れることで、生徒はそれぞれの場面での現象をあれこれ考え、比較することを通して、関数の性質に目を向けて行き、曲線とみなす方がよいと判断した。散布図の点の並びを、曲線とみなすことの自覚があったと考える。

研究問題に対する解答その2

みなすことの自覚の促進のために、ある問題を解決するため、現実事象をどんな数学とみなすかの判断を生徒に委ね、学習内容に生徒が比較することができるような選択的な要素を組み込む。

4 研究結論の意義と今後の課題

研究結論の意義は、生徒にとってみなすことが問題解決の手段になるような授業を継続して行うことで、数学の有用性を感じ、現実事象を数理的に捉えて考察する資質を身に付けることにも役立つ事例が得られた点である。振り返れば、現実事象を、教師が意図した数学でみなすことが目的の授業を行っていた。このことが、生徒の数学に対する有用性を喪失させ、数学が役に立たないと感じさせていたと考えるに至った。

今後の課題は、図形領域の数学的モデル化過程において、現実事象を生徒がどうみなして平面図形に置き換えているかの枠組みを明確にすることである。

文 献

- 日野圭子 (2008). 『発達の上にある生徒の関数的見方・考え方を大切に』. 日本数学教育学会誌, 第 90 巻第 9 号. 39-45.
- 川口慎二 (2010). 『1・2 年次における数学的リテラシーの育成—数学化サイクルを重視した思考過程の確立—』. 奈良女子大学附属中学校研究紀要, 第 51 集. 53-81.
- 三輪辰郎 (1983). 『数学教育におけるモデル化についての一考察』. 筑波数学教育研究, 第 2 号. 117-125.
- 永田潤一郎 (2004). 『「比例するとみなす」ことのよさについての考察』. 日本数学教育学会誌, 第 86 巻 3 号. 13-20.
- 西村圭一 (2013). 『数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究』. 日本数学教育学会誌 数学教育学論究, 第 99 巻. 47-56.
- 清野辰彦 (2015). 『「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導—「比例とみなす」見方に焦点をあてて—』. 日本数学教育学会 数学教育学論究臨時増刊, 第 97 巻, 105-112.
- 筑波大学附属中学校国語科 (2017). 『学習者の主体性を考える(3)』. 第 45 回研究協議会 発表要項. 9-23.