第1回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

課題探究として証明することのカリキュラム開発

－ 中学校数学科第1学年の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想 －

茅野公穂　岩田耕司
信州大学教育学部　福岡教育大学

要　約

本研究は，中学校数学科第１学年の領域「数と式」及び「図形」において，課題探究として証明することの学習を実現するためのカリキュラム開発の方向性を提案することを目的とする。そのために，はじめに，この学習を実現するためのカリキュラムとしての問題点を整理する。次に，学習指導要領解説の項目と，第１学年で意図される学習レベル及びその移行とを対応づけ，問題点への対処可能性を検討する。その上で，「基本的な作図とその活用」及び「空間図形の平面上への表現と読み取り」の授業場面において課題探究として証明するための学習を構想し，問題点への現実的な対応可能性を例示する。最後に，領域「数と式」における学習を構想するための検討課題を示す。

キーワード：課題探究，証明すること，中学校数学，カリキュラム

1. 第1学年のカリキュラム構想の必要性

義務教育段階の学校数学において，証明することは，算数・数学の目的，内容，方法，それぞれにおける核となる活動として重要視され続けている。例えば，平成 20 年 1 月の中央教育審議会答申は，小学校算数科，中・高等学校数学科の改善の基本方針において「数学的な思考力・表現力は，合理的，論理的に考えを進めるとともに，互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものである。」ことを指摘し，数学的な思考力・表現力を育成するための指導内容や活動を具体的に示すことなどを要請している。実際，平成 20 年告示学習指導要領において，小学校算数科では，算数的活動が学年ごとに例示され，具体的な内容に即して考えたことを説明する活動が位置付けられている。また，中学校数学科では，数学的活動が三つの柱で整理され，その一つとして「数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝

え合う活動」が領域を横断する形で位置付けられている。さらに，これら三つの数学的活動が，発達段階や計画的・累積的な学習とその指導を意図して第１学年と第２・３学年とに分けられていることも見逃せない重要な点である。

特に，中学校第１学年，さらに，領域「数と式」及び「図形」における証明することに焦点を置くと，小学校算数科における学習状況に十分配慮するとともに，漸次，論理的に考察し表現する能力を培うことが意図されている。また，中学校第２学年以降への計画的・累積的な学習とその指導も意図されている。

しかし，各種調査結果からすると，領域「数と式」及び「図形」において，課題探究として証明することの学習状況は望ましいとはいえない。例えば，全国学力・学習状況調査において，小学校算数では，理由を記述する問題についての課題が，解答類型とその反応率を基に指摘されている。また，中学校数学科では，証明の構想を立てること，構想に基づいて証明すること，証明を評価・改善すること，ことがらとその証明を発展することなどに対応する問題についての課題が，解答類型とその反応率を基に指摘されている。

上述の学習状況の主要因として，意図されたカリキュラム，学習，学習指導及び評価が考えられる。一方，これまでにも証明の学習実態に基づき学習指導の改善が数多く提案・実施され，その結果が肯定的に評価されてきた。学習状況のさらなる改善のためには，中学校数学科における意図されたカリキュラムに，望ましくない学習状況の原因を求め，カリキュラムの新たな姿を構想する必要がある。そこで，本研究では，中学校数学科の特に第１学年に焦点をあて，課題の自律的な探究としての証明学習の可能性についてカリキュラム開発の視点から検討する。

2. 目的・方法

本研究の目的は次の研究問題に答えることである。

中学校数学科第１学年の領域「数と式」と「図形」において，証明することに関するカリキュラムとしての問題点は，意図される学習レベル・移行により解消され得るか。

この研究問題を解決するために，まず，課題探究として証明することの学習を実現するためのカリキュラムとしての問題点を整理する。平成 20 年告示学習指導要領の項目と，第１学年で意図される学習レベル及びその移行とを対応づけ，問題点への対処可能性を検討する。その上で，「基本的な作図とその活用」及び「空間図形の平面上への表現と読み取り」の授業場面において課題探究として証明するための学習を構想し，問題点への現実的な対応可能性を例示する。最後に，領域「数と式」における学習を構想するための検討課題を示す。

3. カリキュラムとしての問題点

3.1 領域「数と式」の問題点

●根拠に基づいて，数量の関係や法則などを文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりすることの充実

第１学年では「数量の関係や法則などを文字を用いた式に表すことができることを理解し，式を用いて表したり読み取ったりすること」（A(2)エ）が意図されている。小学校算数科では，数量を□や△などを用いて表し，その関係を式に表したり，□，△などに数を当てはめて調べたりする第４学年での学習等をふまえ，第６学年では「数量を表す言葉や□，△などの代わりに，a，x などの文字を用いて式に表したり，文字に数を当てはめて調べたりすること」（D(3)ア）が意図されている。小学校算数科での学習との接続，さらに，文字を用いた式に表したり読みとったりすることについての小学校算数科第６学年での学習をさらに深めるために，第１学年において，

文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりする場面で，表したり読みとったりすることができる根拠や理由を明らかにする活動が考えられる。この活動は，第２学年における文字を用いた式でとらえ説明するための素地となる。そのため，第１学年において，根拠に基づいて，文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりすることを充実する必要がある。

●第1学年における説明の構想や構成の導入

第１学年の学習をさらに深めて，第２学年では「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できることを理解すること」（A(1)イ）が意図されている。

第２学年の教科書では，具体的な事象の中にある数量の関係をとらえ説明するために，数量及び数量の関係を文字を用いた式にどう表すか考えたり，その式を目的に応じて変形したり，変形後の式の意味を解釈したりすることをとりあげている。漸次，第２学年でこれらのことが本格的に行えるようにするために，文字を用いた式での説明の構想や構成についての学習の準備を第１学年において導入する必要がある。

3.2 領域「図形」の問題点

●第1学年における証明することの明確化

第１学年では「論理的に考察し表現する能力を培う」（B(1)）ことが意図されている。教科書でも，平面図形の作図の場面や空間図形の構成等の場面において，それまでに学習してきたことがらを根拠に理由を述べる活動を意図した設問等の工夫がみられる。このように，説明すべき対象は明確である一方で，算数科と第１学年とにおける証明することの異同や，第１学年と第２学年との証明することの異同は必ずしも明らかではない。課題探究として証明することの学習が中学校数学科において計画的・累積的になるために，第１学年で意図される，証明することが明確にされる必要がある。

●小学校算数科と第1学年の接続の確立

小学校算数科では，例示された算数的活動にみられるように，計算の仕方や面積の求め方を考え説明する活動など，根拠を明らかにして，それを基に筋道立てて理由を説明する活動の充実が意図されている。算数科や第１学年の教科書においても，何を根拠としたのかを明らかにするように促す工夫や，根拠にしたことの質的な違いに児童の関心が向くようにする配慮がみられる。実際，算数科の教科書では,帰納や類推が,多くの場面で用いられ，演繹もまた用いられている。しかし，帰納と演繹を対比するなどして，それぞれの差異や役割を明らかにすることについては，必ずしも明示的に取り上げられてはいない。

そのため，理由の説明で用いられている推論が演繹的であることを判断したり，帰納，類推，演繹それぞれの役割に応じてこれらを適宜選択して用いたりすることが漸次できるように，算数科と第１学年の計画的・累積的な接続を確立する必要がある。

●第1学年と第2学年の接続の確立

第２学年では，「証明の必要性と意味及びその方法について理解すること」（B(2)イ）が意図されている。第２学年の教科書では，証明のしくみやその構想の立て方について学習するページが準備されている。また，算数科や第１学年の教科書において，問題解決のための方法の見通しを立てるように促す工夫もみられる。一方，あることがらが成り立つことの理由や判断の理由を説明しようとする場面で，その説明の構想を立てることについては，必ずしも明示的ではない。したがって，証明を構想することと，証明を構成することは，未分化の状態にあると考えられる。

そのため，ことがらの生成と証明の生成，さらには証明を構想することと構成することとが，それぞれ漸次分化するように，第１学年と第２学年の計画的・累積的な接続を確立する必要がある。

4．内容と学習レベル・移行の対応

4.1 領域「数と式」における対応

本研究では，カリキュラムの実現性・実効性を考慮し，内容の系統や配列を現行のものに暫定的に固定することにした(宮﨑・藤田, 2013)。中学校学習指導要領解説数学編には，第１学年の領域「数と式」の項目として次のものが示されている。

a. 正の数と負の数の必要性と意味
b. 正の数と負の数の四則計算と意味
c. 正の数と負の数を用いて表したり処理したりすること
d. 文字を用いることの必要性や意味
e. 文字を用いた式における乗法と除法の表し方を知ること
f. 一次式の加法と減法
g. 式を用いて表したり読み取ったりすること
h. 方程式の必要性と意味及びその解の意味
i. 等式の性質
j. 一元一次方程式を解くこと
k. 一元一次方程式の活用

これらのうち，証明することが考察の方法や対象として位置づけら得るのは g である。そこで，表 1 のように，第２学年での学習レベルの起点(P1, D1)に接続できるようにするために，第１学年での学習レベルの起点 O から D1 への移行，そして D1 での評価・改善・発展，さらに，D1 から(P1, D1)への移行を意図する(学習レベルについては，宮﨑・藤田 (2013)参照)。

項　目	学習レベル・移行
式を用いて表したり読み取ったりすること	O → D1
	D1 + CIA
	D1 → (P1, D1)

表 1 項目と学習レベル・移行の対応:「数と式」

項目と学習レベル・移行との対応付けにより，項目「式を用いて表したり読み取ったりすること」に質・量ともに意図される学習レベル・移行を背負わせることになる。単に，文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりするだけでは, D1 への移行を意図することはできない。式に表したり読みとったりすることができる根拠や理由を明らかにする活動を実現する必要がある。さらに，現状では，第１学年において，ことがらを証明するという場面は設定されていない。

したがって，領域「数と式」に関する前述のカリキュラムとしての問題点″根拠に基づいて，数量の関係や法則などを文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりすることの充実″あるいは″第１学年における説明の構想や構成の導入″については現状としては対処できていない。新たな項目を設定する必要がある。

4.2 領域「図形」における対応

中学校学習指導要領解説数学編には，第１学年の領域「図形」の項目として次のものが示されている。

ｱ. 基本的な作図とその活用
ｲ. 平行移動，対称移動及び回転移動
ｳ. 空間における直線や平面の位置関係
ｴ. 平面図形の運動による空間図形の構成
ｵ. 空間図形の平面上への表現と読み取り
ｶ. 扇形の弧の長さと面積
ｷ. 柱体，錐体及び球の表面積と体積

これらのうち，図形を計量することに関わるｶとｷを除き，証明することが考察の方法や対象として位置づけられ得るのは項目ｱ, ｲ, ｳ, ｴ, ｵである。このうち，「ｳ. 空間における直線や平面の位置関係」は，空間図形を平面上へ表現したり，平面上に表現されたものからもとの空間図形を読みとったりする際に基本となる。そこで，項目ｳは，ｴ並びにｵと，それぞれ関連付けて取り扱うことにする。

次に，項目ｱ，ｲ，ｳ&ｴ，ｳ&ｵの４項目に対応する内容の教科書における配列について検討する。項目ｱ，ｲの配列は教科書によって異なるが，「作図の意味を理解するために，基

本的な作図の方法や結果の正しいことを，図形の移動の見方から確かめることも大切である」(文部科学省, 2008, p. 67)ことから，項目ｲからｱへと配列することにする。これら以外の項目とその順序は，対応する内容の教科書における配列と概ね一致する。そこで，表 2 のように，各項目と学習レベル・移行を対応付ける。

項　目	学習レベル・移行
平行移動，対称移動及び回転移動	O → D1
基本的な作図とその活用	
平面図形の運動による空間図形の構成	D1 + CIA
空間図形の平面上への表現と読み取り	D1 → (P1, D1)

表 2　項目と学習レベル・移行の対応:「図形」

まず，項目「平行移動，対称移動及び回転移動」及び「基本的な作図とその活用」において O から D1 への移行を意図し，続く，項目「平面図形の運動による空間図形の構成」において D1 での評価・改善・発展を意図する。さらに，項目「空間図形の平面上への表現と読み取り」において, D1 から(P1, D1)への移行を意図し, 第 2 学年での(P1, D1)からの学習レベルに接続できるようにする。

これらの項目と学習レベル・移行との対応付けにより，領域「図形」に関する前述のカリキュラムとしての問題点″第 1 学年における証明することの明確化″，″小学校算数科と第 1 学年の接続の確立″，″第 1 学年と第 2 学年の接続の確立″について対処が可能になる。

5. 領域「図形」における学習の構想 I

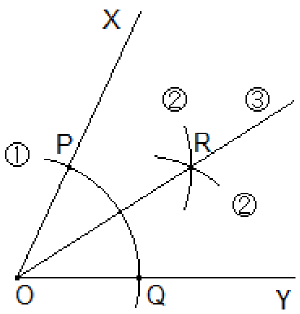
第 1 学年の「基本的な作図とその活用」に関する学習は，約 5 単位時間を予定し構成している。ここでは，そのうち，学習レベル O から D1 への移行，及び「評価・改善すること」を扱う 1 単位時間分の学習を例示する。

5.1 本時のねらい

角の二等分線の作図手順を踏んで作図した線が，確かに角の二等分線となることを，線対称な図形の性質を根拠に説明することができるようにする。

なお，この授業では，課題探究として証明することのうち, 定義に基づき図形を特定し，説明したり，作図方法を対称な図形の性質を根拠に見直し，説明したりすることに重点を置いている。

5.2 課題探究として証明すること(本時)

O	角の二等分線の作図手順をふむと，OR は∠XOY の二等分線になると説明する。  ① 点 O を中心とする円をかき， 直線 OX，OY との交点を， それぞれ P，Q とする。 ② ２点 P，Q を，それぞれ中心として， 半径 OP の円をかき， その交点の１つを R とする。 ③ 直線 OR をひく。
D1	上述の手順を振り返って，四角形 POQR がひし形であることを定義に基づいて特定し，説明する。また，OR は∠XOY の二等分線になることを，ひし形の性質や線対称な図形の性質を根拠に，理由と結論をセットにしながら数学的な表現を用いて説明する。
C	上述の∠XOY の二等分線の作図手順の適用範囲を，説明の根拠を基に考える。

5.3 本時の展開（概要）

①∠XOY の二等分線の作図手順を実行し，∠XOY の二等分線となっていることを実測などで確かめる。

∠XOY の二等分線の作図手順を実行し，∠POR と∠QOR の大きさを測ったり，OR を折り目にして∠XOY を折ったときに∠POR と∠QOR がぴったり重なるか調べたりすることを通して，OR が∠XOY の二等分線となっていることを実感する。

②四角形 POQR を定義に基づき特定し，説明する【構成（D1）】

それぞれの手順からわかることを整理し，四角形 POQR がひし形であることを定義に基づき特定し，説明する。

手順①からわかること: OP＝OQ。 ※相等関係を指摘できればよい。 記号表現にはこだわらない。 手順②からわかること: PR＝OP，QR＝OP。 これらを組み合わせることでわかること: OP＝OQ＝PR＝QR。 辺の長さがみんな等しい四角形なので， 四角形 POQR はひし形である。

③OR は∠XOY の二等分線になることを，ひし形の性質や線対称な図形の性質を根拠に，理由と結論をセットにしながら数学的な表現を用いて説明する【構成（D1）】

∠XOY の二等分線の作図では， 手順①と②で OP＝OQ＝PR＝QR となるから，四角形 POQR は，ひし形である。また，手順③より，OR はひし形の対角線である。 ひし形は，その対角線を軸とする線対称な図形である。線対称な図形では，対応する角の大きさは等しいので，∠POR と∠QOR は等しい。だから，直線 OR は，∠XOY の二等分線になる。

④∠XOY の二等分線の作図手順の適用範囲を，説明の根拠を基に考える【評価（C）】

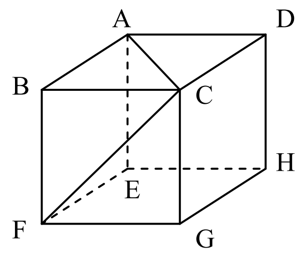
上述の角の二等分線の作図手順を，ひし形が作図できるか否かに着目して振り返ることを通して，∠XOY が平角の大きさになると，ひし形ができないので，平角の二等分線はこの手順では作図できないことなどに気づき，この作図手順の適用範囲をまとめる。

✓ この作図方法は，∠XOY の大きさに依存しないので，（ある特定の角にのみ適用できるのではなく）一般性がある。 ●ただし，∠XOY が平角の大きさになるとひし形ができないので，平角の二等分線はこの方法では作図できない。 ●この方法は，平角より小さい角の二等分線を作図することができる。 ✓ 平角以上の大きさの角の二等分線の作図は残された課題である

6．領域「図形」における学習の構想Ⅱ

第 1 学年の「空間図形の平面上への表現と読み取り」「空間における直線や平面の位置関係」に関する学習は，約 10 単位時間を予定し構成している．ここでは，そのうち，学習レベル D1 から(P1，D1) への移行，及び「評価・改善すること」を扱う 2 単位時間分の学習を例示する。

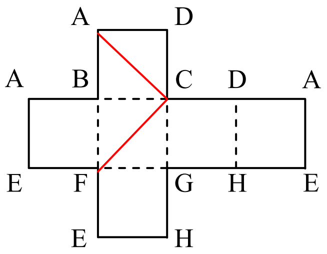
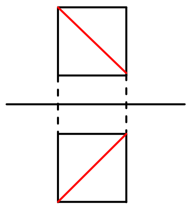
6.1 本時のねらい



与えられた立方体の見取図における 2 つの線分（AC と FC）の長さが等しいことを，展開図や投影図を用いて説明するだけではなく，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形成することで説明できるようにする。

なお，この授業では，課題探究として証明することのうち，展開図や投影図に依存した「証明を評価・改善すること」を通して，より的確な証明を構想することに重点を置いている。

6.2 課題探究として証明すること（本時）

O	与えられた立方体の見取図における２つの線分（AC と FC）の長さが等しいことを，展開図や投影図を用いて説明する。  
CI	上述の証明を振り返って，投影図や展開図に表すと AC と FC の長さが等しいとわかるのは，どちらの線分も合同な正方形の対角線であり，２つの線分がぴったり重なるからであることに気づき，さらに，これを根拠とすれば，図を用いずに言葉だけで説明できることに気づく。
P1,D1	与えられた立方体の見取図における２つの線分（AC と FC）の長さが等しいことを，投影図や展開図に依らない根拠とその表現等を考慮して証明を構想する。
C	「立方体の６つの面は合同な正方形で構成されていること」及び「線分 AC と FC は，その正方形の対角線であること」を根拠にすれば，立方体の見取図での線分の位置関係が変わっても，線分 AC と FC の長さは等しいことを展開図や投影図に依らずに説明することができていることを確認する。

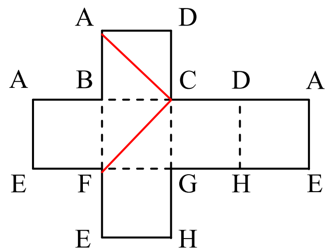
6.3 本時の展開（概要）

①与えられた立方体の見取図における2つの線分（ACとFC）の長さの大小を予想し，予想したことがらが成り立つことを説明する

与えられた立方体の見取図における２つの線分（AC と FC）の長さについて，展開図や投影図等に表し，「立方体において，与えられた２つの線分（AC と FC）の長さは等しい」ことを予想する。教師の発問「線分 AC と FC の長さが等しいことを説明しよう」に対して，２つの線分の長さが等しくなることを，説明する。

②展開図や投影図に依存した説明を評価し，予想したことがらが成り立つことを証明するための構想を立てる【構想（P1）】

立方体の展開図に表すと線分 AC と FC の長さは等しい。



展開図や投影図に表すことで結果の見通しが立ったことを確認するとともに，見取図では線分の長さや角度などが正確に表されない場合があること，目的に応じて図を使い分ける必要があることを確認する。

- ✓ 見取図を用いると，線分や角の大きさを正しく表せないことがある。
- ✓ 見取図を用いると，もとの空間図形の辺や面のつながりをとらえやすい。
- ✓ 展開図を用いると，もとの空間図形を構成する面の形を正しく表すことができる。

線分 AC と FC の長さが等しいことを，立方体の特徴（性質）を根拠に説明することはできないかを問う教師の発問を契機に，投影図や展開図では立方体の面が合同な正方形であることが正確に表現されていること，線分 AC

とFCはこれらの正方形の対角線であること，そのため，２つの線分がぴったり重なることがはっきりすることに気づき，さらに，これを根拠とすれば，図を用いずに言葉だけで説明できることに気づく。

③構想に基づいて，予想したことがらが成り立つことの証明を構成する【構成(D1)】

与えられた立方体の見取図における 2 つの線分 AC と FC は，どちらも合同な正方形の対角線なので，長さが等しい。

④展開図や投影図に依存した証明と立方体の特徴を根拠とした証明を比較することを通して，それぞれの証明の特徴をまとめる【評価(C)】

２つの証明は，どんなときに役立つのかを問う教師の発問を契機に，与えられた立方体の見取図における２つの線分の長さの大小を比較する文脈におけるそれぞれの証明の役割をまとめる。

- ✓ 展開図や投影図に表して比較する方法は，２つの線分の長さが等しいことを見いだしたり，そのことを確かめたりするときに役立つ。
- ✓ 立方体の特徴を根拠に比較する方法は，展開図や投影図等がなくても２つの線分の長さが等しいことを説明することができる。

7. 結論及び今後の課題と展望

本研究の結論は次の通りである。

学習指導要領解説の項目と，意図される学習レベル・移行とを対応づけることにより，第１学年の領域「図形」において，問題点″第１学年における証明することの明確化″，″小学校算数科と第１学年の接続の確立″，″第１学年と第２学年の接続の確立″について対処が可能になる。また，学習レベル及びその移行を実現する学習を構想することにより現実的な対応の可能性があることを例示した。

一方，第１学年の領域「数と式」においては，現在第１学年の教科書でとりあげられている内容のままでは，″根拠に基づいて，数量の関係や法則などを文字を用いた式に表したり，文字を用いた式の意味を読みとったりすることの充実″あるいは″第１学年における説明の構想や構成の導入″に対処できていない。

今後の課題は次の通りである。

- 第１学年の領域「数と式」における学習レベル・移行を実現するための学習をどのように構想するか。
- 各項目に対応付けられた学習レベル・移行は授業での学習として実現可能か。

参考文献

国立教育政策研究所. 2012.『平成 24 年度　全国学力･学習状況調査【小学校】調査結果概要(4. 教科に関する調査の各問題の分析結果と課題)』. Retrieved from http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03shou_houkokusho.htm.

国立教育政策研究所. 2012.『平成 24 年度　全国学力･学習状況調査【中学校】調査結果概要(4. 教科に関する調査の各問題の分析結果と課題)』. Retrieved from http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03chuu-gaiyou/24_chuu_kekkagaiyou-4_suugaku.pdf.

宮﨑樹夫，藤田太郎. 2013. 「課題探究として証明することのカリキュラム開発: 我が国の中学校数学科における必要性と，これまでの成果」. 日本数学教育学会第１回春期研究大会論文集.

文部科学省. 2008.『小学校学習指導要領解説算数編』. 東洋館出版社.

文部科学省. 2008.『中学校学習指導要領解説数学編』. 教育出版.

岡崎正和，岩崎秀樹. 2003.「算数から数学への移行教材としての作図: 経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践」. 日本数学教育学会誌 数学教育学論究. 80. 3-27.

【謝辞】本研究は科学研究費補助金(No. 23330255, 24243077)の支援を承けています。