

課題探究として証明することのカリキュラム開発 —領域「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化—

Curriculum Development of Explorative Proving: Refining the Framework for the domain 'Geometrical Figures'

茅野公穂 宮川健
信州大学 上越教育大学大学院

要 約

本研究では、課題探究として証明することの学習を実現するためのカリキュラム開発の一端として、領域「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化に取り組んだ。事柄の特述とその利用に着目し、証明の構成についての学習レベルを再設定した結果、再設定した学習レベルの下でも、これまでの移行原理や移行過程、授業化に影響がないことが確認されるとともに、領域「図形」におけるカリキュラム開発枠組みの精緻化に対して、以下二点の成果が得られた。第一に、学習レベル新C1の設定による中学校第1学年における証明することの明確化である。第二に、学習レベル新O→C1新の移行過程による小学校算数科と中学校第1学年の接続の確立である。

キーワード：課題探究，証明すること，中学校数学，カリキュラム開発，図形

1. カリキュラム開発枠組みの不断の吟味

本研究は、課題探究として証明することの学習を中学校において実現するためのカリキュラム開発の継続的な研究の一部である。本研究は、領域「図形」において、学習レベルの設定と「内容-活動対応表」の作成に続き、学習レベルの移行を意図した学習の構想、構想に基づく実践など、カリキュラムを具体化する授業化（宮崎・永田・茅野，2014）へと進展している。同時に、カリキュラム開発枠

組みの不断の吟味が、理論的な課題の解決や授業データとの照らし合わせによって行われている（茅野・佐々・宮崎ほか，2015）。

本稿では、上述の不断の吟味の過程において、「第1学年における証明することの明確化」及び「小学校算数科と第1学年の接続の確立」（茅野・岩田，2013）という観点からの枠組みの精緻化に取り組む。

2. 目的と方法

本稿の目的は、領域「図形」のカリキュラム開発枠組みにおける学習レベル O と C1(後述) を特徴付け直すことである。学習レベル C1 の特徴を明確にすることは中学校第 1 学年における証明することの明確化に直結し、学習レベル O と C1 の関係を明確にすることは小学校算数科と中学校第 1 学年の接続の確立に貢献する。

そこで、まず旧カリキュラム開発枠組みを概説し、その課題を特定する。次に、事柄の特述とその利用に着目し、学習レベル O, C1 を再設定する。最後に、新たな特徴付けの下でもこれまでの移行原理や移行過程、授業化に影響がないことを確認する。

3. カリキュラム開発の旧枠組みの課題

(1) カリキュラム開発の旧枠組み

領域「図形」におけるこれまでのカリキュラム開発の枠組みは、証明の構想（横軸）の学習に関するレベルと、証明の構成（縦軸）の学習に関するレベルを考慮に入れ、以下のように構築されていた（宮崎・永田・茅野，2014）。まず、証明を構想することの学習に関して P1, P2 の二つのレベルを、証明を構成することの学習に関して C1, C2 の二つを、それぞれ設定する。

- P1: 前提と結論を結びつけるための着想、必要となる対象と方法を捉える。
- P2: 前提と結論を結びつけるために双方から中間命題の関係網を拡充する。
- C1: 前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する。
- C2: 演繹的な推論を普遍例化と仮言三段論法に分化して前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する。

次に、それぞれのレベルの組み合わせと学習レベルの移行可能性について吟味し（宮崎・永田・茅野，2012），第 I 期の移行（学習レベル O→(P1,C1)）ならびに第 II 期の移行（学習レベル (P1,C1)→(P2,C2)）を定めた（図 1）。

さらに、いずれの学習レベルにおいても評価 (E)・改善 (I)・発展 (A) することを意図している。この評価・改善・発展と、証明の構想ならびに証明の構成の関係については、茅野・佐々・宮崎ほか（2015）において、さらに改善が図られている。しかし、本稿は、学習レベル O と C1 との関係に焦点化するため、評価・改善・発展の考察には立ち入らない。なお、この枠組みでは、第 I 期の移行を中学校第 1 学年、第 II 期の移行を第 2 及び第 3 学年において、それぞれ図ることを意図している。

この枠組みにおいて、基点となる学習レベル O は、これまで「この学習レベルでは、事柄を証明するという課題について探究することが求められるが、証明するプロセスを、証明を構想する／証明を構成する／証明するという諸側面にまで分化して探究することまでは求められない」（宮崎・永田・茅野，2012, pp. 888-889）としてきた。

(2) 旧枠組みの課題

上述の旧枠組みの課題は、中学校第 1 学年における第 I 期の学習レベル O→C1 の移行過程の不明瞭さにある。小学校算数科での証明（理由の説明）が、学習レベル C1「前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する」に該当するためである。

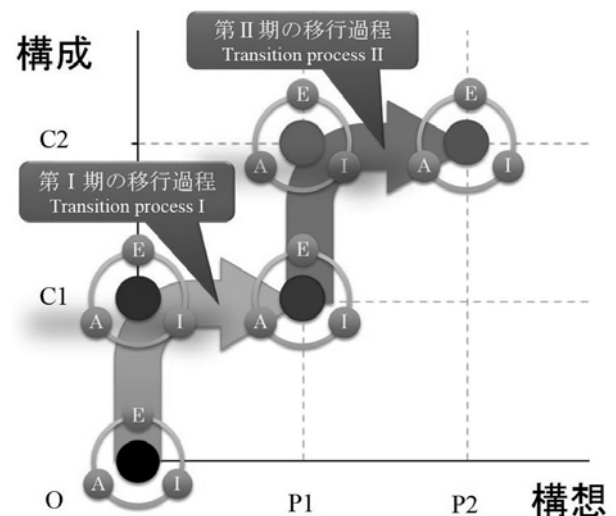


図 1 カリキュラム開発の旧枠組み

例えば、四角形の四つの角の大きさの和が 360° になることを、三角形の三つの角の大きさの和が 180° であることを基に説明する(図2)。ここでは、「対角線を1本ひいて四角形を2つの三角形に分けます。三角形の3つの角の大きさの和は 180° で、四角形の4つの角の大きさの和は2つ分の角の大きさの和と同じになるから、 $180 \times 2 = 360$ 360° 」などの説明が想定される。この説明では、前提「三角形の三つの角の大きさの和は 180° である」と結論「四角形の四つの角の大きさの和は 360° である」の間に命題の演繹的な連鎖が形づくられ表現されている。すなわち既に C1 の説明なのである。他に、円と半径による三角形が二等辺三角形になる説明についても同様の指摘ができる(図3)。

これらの例の存在は、旧枠組みで想定していた C1 に暗黙裏に条件を付していたことを暗示する。これまでの C1 の特徴付けは、むしろ O での特徴付けとなっていたのである。

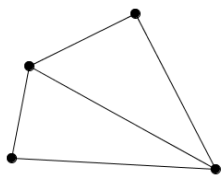


図2 四角形の内角の和

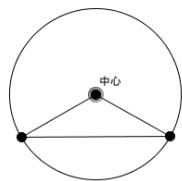


図3 円と三角形

4. カリキュラム開発枠組みの精緻化

(1) 事柄の特述とその利用

事柄の特述について、中村(1996)は『原論』第1巻命題1を例に、「記号をつけた特殊な形で同じ作図すべきものが具体的に述べられる。これを特述(εκθεσις)という。」(p.493)と指摘する。事柄が具体的な記号を付して定式化され、その記号に即した図形が実際に描かれるとの同様の指摘は、伊東(1996)においても確認することができる(p.446)。

この事柄の特述とその利用は、中学校における三角形の合同条件や相似条件を用いた証明では特徴的である。実際、上述の小学校の

四角形の内角和の証明などでは、事柄の特述は明確には用いられない。図形に即して具体的な記号を付して定式化することにより、冗長な表現を避け、対応関係等を簡潔、明瞭に表現することができるようになる。

(2) 証明の構成の学習レベルの再設定

学習レベル C1 は、従前の C1 の特徴に、上述の事柄の特述による定式化を踏まえた条件を付与し、以下のように特徴付ける。

新 C1: 事柄の特述あるいは特述に相当する言明において、前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する。

次に、枠組みの基点となる学習レベル O は、これまで通り「事柄を証明するという課題について探究することが求められる」とし、ここでの証明することの意味を「前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現することとする。

この新 O、新 C1、C2 の区別は、記号論理の視点から以下のように説明できる。O では事柄の一般性あるいは全称性を定式化せず、命題論理の範疇で演繹的に説明する。一方、C1 では事柄の特述により定式化された言明に対して演繹的に説明する。C1 では暗黙裡に述語論理の視点が含まれるものの、特述された言明に対しては命題論理の範疇に留まる。C1 では特述を用いているとはいえ、普遍例化を意識しているわけではない。普遍例化を意識するのは、C2 となる。

(3) 学習レベル移行への影響の吟味

証明の構成の学習レベルとしての新 C1、C2、さらに基点としての新 O の3者の関係は、レベルの内容に変更はあったものの変わらない。旧 C1 の性格を新 O が受け継ぐため、旧 C1-C2 の関係は、新 C1 を途中に挟む新 O-C2 の関係として議論されることになる。むしろ、新 O-新 C1 の関係は、前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現することを踏まえた上で、事柄の特述による定式化、あるいはその利用を意図的な指導の対象とする

か否かで明確に区別できるようになる。さらに、新 C1 において事柄の特述やその利用が促進すると、演繹的な推論の妥当性を高めるために、どこでどのような普遍例化あるいは仮言三段論法がどのように用いられているのかを探るといふ C2 としての意図的な指導が展開できるようになる。

学習レベルの再設定後も、図 1 に示す第 I 期の移行過程及び第 II 期の移行過程に変更はない。基点としての新 O、証明の構成の学習レベルとしての新 C1 を設けても、証明の構想に関する二つのレベル P1, P2 は、新 O あるいは新 C1 の特徴に依存しないためである。

最後に、これまで実施してきた授業化にも学習レベルの再設定は影響しない。茅野・清水(2015) は、生徒が自ら構成した素朴な証明を評価・改善する活動が、C1 としての証明に必要な内容を教師-生徒、生徒間で共有することを促すことを明らかにしている。この授業化において共有された C1 としての証明は、「AB, BC, AC の辺は等しく」や「 $AB=BC=AC$ 」が用いられるなど新 C1 の特徴を有している。一方、共有された証明には「三角形 ABC, あるいは $\triangle ABC$ 」ではなく「この三角形」という表現もみられた。こうした定式化上の統一感の欠如は、むしろ学習レベル O→C1 の移行過程にみられる実際の様子を反映していると考えられる。

5. 成果と今後の課題

領域「図形」におけるカリキュラム開発枠組みの精緻化に対して、以下二点の成果が得られた。第一に、学習レベル新 C1 の設定による中学校第 1 学年における証明することの明確化である。第二に、学習レベル新 O→新 C1 の移行過程による小学校算数科と中学校第 1 学年の接続の確立である。

今回、学習レベル O 及び C1 の再設定に伴う評価(E)・改善(I)・発展(A)との関係は吟味できていない。今後の課題である。

謝辞 本研究は、JSPS 科研費(No. 23330255, 24243077, 26282039, 26350231, 26381191) の助成を受けたものです。

引用・参考文献

- 茅野公穂・岩田耕司 (2013). 「課題探究として証明することのカリキュラム開発: 中学校第 1 学年数学科の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想」. 『日本数学教育学会 第 1 回春期研究大会論文集』, 9-16.
- 茅野公穂・佐々祐之・宮崎樹夫・宮川健・中川裕之・岩永恭雄・松岡樂 (2015). 「課題探究として証明することのカリキュラム開発: 領域「数と式」, 「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化」. 『日本数学教育学会 第 3 回春期研究大会論文集』, 7-12.
- 茅野公穂・清水あかね (2015). 「中学校数学における課題探究として証明することの授業化: 第 1 学年の小単元「基本的な作図」」. 『日本科学教育学会 第 39 回年会論文集』, 111-114.
- 伊東俊太郎 (1996). 「ユークリッドと『原論』の歴史」. 『ユークリッド原論 縮刷版』(中村幸四郎・寺坂英孝・伊東俊太郎・池田美恵 訳) (pp. 435-487), 共立出版.
- 宮崎樹夫・永田潤一郎・茅野公穂 (2012). 「中学校数学における課題探究としての証明学習カリキュラムに関する研究: カリキュラム開発のための枠組みの構築」. 『日本数学教育学会 第 45 回数学教育論文発表会論文集』, 887-892.
- 宮崎樹夫・永田潤一郎・茅野公穂 (2014). 「中学校数学における課題探究として証明することのカリキュラム開発: 進行状況と授業化の意味・役割」. 『日本数学教育学会誌 数学教育』, 68(5), 2-5.
- 中村幸四郎 (1996). 「『原論』の解説」. 『ユークリッド原論 縮刷版』(中村幸四郎・寺坂英孝・伊東俊太郎・池田美恵 訳) (pp. 489-522). 共立出版.