第５回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

課題探究として証明することを実現する指導法開発
－第１学年の小単元「基本的な作図」－

Development of Teaching Methods to Realize Explorative Proving:
Cases of Content "Geometric Construction" (Grade 7)

茅野公穂　　　　　　　清水あかね
信州大学　小布施町立小布施中学校

要　約

本研究では，課題探究として証明することの学習を中学校において実現するための研究プロジェクトの一端として，小単元「基本的な作図」における指導法の開発に取り組んだ．そこで,「基本的な作図」における学習レベルの移行に必要な学習活動に着目し，その学習活動を実現するための学習指導上の課題を特定するとともに，その解決例を示した．結果,「基本的な作図」における指導法として，以下の四つ，前提を明確にする場の設定，証明の構成要素の特徴付け方の考案および証明の構成要素を顕在化する場の設定，証明を評価・改善する場の設定，証明の構成要素の新たな用い方の推奨，が得られた．

キーワード：課題探究，証明すること，指導法，作図

１．意図した学習活動の実現のための指導法

本研究は，課題探究として証明することの学習を中学校において実現するための研究プロジェクトの一端を担っている．このプロジェクトは，カリキュラム開発に続き，カリキュラムを具体化する「授業化」(宮崎・永田・茅野，2014) へと進展している．この「授業化」に際しては，研究者と実践者が協働し，その”急所”を創意工夫によって乗り越えてきている．しかし，その”急所”の特徴や，”急所”がまさに急所である理由は，無自覚とはいわないまでも明確になっていたとは言い難い．

本稿では, 領域「図形」, とりわけ小単元「基本的な作図」において,「課題探究として証明することのカリキュラム開発枠組みにおける様々な学習レベルの移行に必要な学習活動を実現する指導法の確定」(宮崎ほか, 2017) に取り組む．”急所”を，学習レベルの移行に必要な学習活動及びその学習活動を実現するための指導法から特徴付けるのである．

２．目的と方法

本稿の目的は,「基本的な作図」において課題探究として証明することを実現する指導法を開発することである．指導法は，具体的な指導方法上の創意工夫を考案する際の拠り所として機能し，課題探究として証明することの学習をよりよく実現することに直結する．

そこで，まず「基本的な作図」における学習レベルの移行を概説し，その移行に必要な学習活動を特定する．次に，その学習活動を実現するための学習指導上の課題を特定するとともに，その解決例を示す．

３.「基本的な作図」における学習レベルの移行に必要な学習活動

(1) 学習レベル O→C1 の移行

課題探究として証明することの学習を中学校において実現するためのカリキュラム (宮崎・永田・茅野，2012) において，中学校第１学年における「基本の作図」では，学習レベル O→C1 の移行が意図されている．ここで，基点となる学習レベル O では,「事柄を証明するという課題について探究することが求められる」．この学習レベル O での証明することの意味は「前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する」ことである．また，証明を構成することの学習に関するレベルとしての C1 は,「事柄の特述あるいは特述に相当する言明において，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する．」ことである (茅野・宮川，2016).

例えば，60°の大きさの角の作図において，

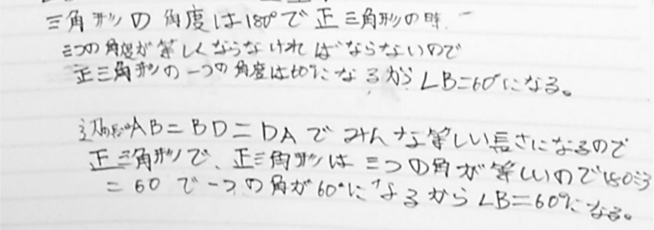

図１　当初（上段）と再構成後（下段）の証明

ある生徒が最初に構成した証明（図 1 上段）に対して，再構成した証明（図 1 下段）は学習レベル C1 に相当するものである．なぜなら，この再構成した証明は,「辺の長さは AB＝BD＝DA」にみられるように，正三角形の定義あるいは性質の特述に相当する言明に対して，前提として AB＝BD＝DA を明示し，結論∠Ｂ＝60°との間に, 正三角形が構成されたことと正三角形の１つの内角の大きさは 60°であることを用いて演繹的な連鎖を形作り表現したものとなっているからである．

(2) 学習レベルの移行に必要な学習活動

作図の学習を通して学習レベル O→C1 の移行を実現するために，以下に示す五つの学習活動が少なくとも必要である．

- 作図手順の数学的な解釈
- 前提と結論の区別
- 証明の構成要素の顕在化
- 証明の構成要素に基づく証明の評価・改善
- 証明の構成要素を踏まえた証明の構成

まず，作図という文脈に絡めて証明における前提と結論を明確にするために，前提に関わって，作図手順の数学的な解釈が必要である．60°の大きさの角の作図でいえば，作図手順（例えば，線分 BC をひき，点 B，C をそれぞれ中心として，BC と等しい半径の円をかき，この２円の交点を A とする）を，三つの辺をすべて等しくして（AB＝BC＝AC）三角形を構成したと数学的に解釈することによって前提が明確になる．次に，前提と結論の区別が必要である. 60°の大きさの角の作図でいえば，素朴には，結論としての∠B＝60°を作図手順において直接構成していないことの確認を踏まえ，上述の作図手順の数学的な解釈に基づき前提としての AB＝BC＝AC と，結論としての∠B＝60°を区別する．

さらに，前提と結論を含め，学習レベル C1 としての証明の構成要素を顕在化し，その証明の構成要素を少なくとも教室において共有するとともに, その証明の構成要素に基づき，

証明を評価・改善することが必要である．証明の構成と証明の妥当性吟味との互恵的な関係 (Pferiffer, 2009 など) を踏まえると，C1としての証明を自律的に構成するために，C1としての証明の妥当性を判断することは欠くことのできないものである．証明の妥当性を判断するためには, C1としての証明の構成要素を顕在化し，少なくとも教室内で共有する必要がある. C1としての証明の構成要素を顕在化し共有することは，換言すれば，証明の基準を顕在化し共有することに他ならない．

なお，作図手順の正当化という活動を，真正な活動として位置付けるために，作図手順の発見という活動も必要である．これは，課題探究として証明することを含む数学的な探究として必要な学習活動である．課題探究として証明することの「授業化」は，課題探究として証明することに必要な学習活動だけで実現するわけではないことは言うまでもない．

4.「基本的な作図」における学習活動を実現するための課題とその解決

上述の五つの学習活動を実現するための学習指導を考案する上での課題と，実際の学習指導における解決例を以下で議論する. なお，実際の学習指導は，長野県内の同一の公立学校において，平成 26 年 12 月中旬から 1 月中旬にかけて 1 学級，さらに，平成 28 年 12 月に 2 学級にて，筆者の一人（清水）が授業者として実施し，筆者の一人（茅野）が参与観察者として参加した．

(1) 前提を明確にする場の設定

前提を明確にする場，とりわけ「作図手順の数学的な解釈」及び「前提と結論の区別」へと最初にいざなう場（問題）の設定が指導法上の課題となる．

「作図手順の数学的な解釈」及び「前提と結論の区別」は，複数時間に渡り実現を図るものである．それゆえ，最初の場（問題）として，線分の垂直二等分線の作図，角の二等分線の作図，垂線の作図（直線 XY 上の点 P を通る XY の垂線），垂線の作図（直線 XY 上にない点 P を通る XY の垂線）のいずれかを選ぶことも考えられる．

しかし，筆者らは，まず，60°の大きさの角の作図を取り上げた．正三角形を作図すればよさそうという見通しの立てやすさと，正三角形を作図する手順を三つの辺を等しくしたと解釈しやすいこと，三つの辺を等しくしたことと結果として 60°の角が構成されることの区別のしやすさからである．さらに，垂線や角の二等分線への展開を考慮し，単元に渡る学習問題「三角定規の形（60°，90°，30°）を正確にかこう」を考案し，どの角から作図したらよいか検討することを通して 60°の大きさの角の作図へと導くことにした．次いで垂線の作図を単元に位置付けることとした．

(2) 証明の構成要素の特徴付け方の考案および証明の構成要素を顕在化する場の設定

「証明の構成要素の顕在化」を実現するために，顕在化の対象と方法にそれぞれ応じる二つの課題，証明の構成要素をどのように特徴付けるか，及びその構成要素をどのように顕在化するか，が指導法上の課題となる．

筆者らは，証明の構成要素の特徴付けのために，四観点「行ったこと」,「使う図形」,「結果としてなったこと」,「言いたいこと」を採り入れた．四観点と C 1 としての証明との対応でみると，「行ったこと」は前提，「言いたいこと」は結論に，それぞれ対応する.「使う図形」と「結果としてなったこと」は，前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する際の骨子となるパーツに対応する．より具体的には，四観点は，どのような性質（「行ったこと」）に基づいて図形（「使う図形」）を構成し，その図形（「使う図形」）のどのような性質（「結果としてなったこと」）を根拠に用いて結論（「言いたいこと」）を導くか，に対応する論を構成するパーツとなる. 結果，

四観点を用いることによって，生徒は図形の諸性質を論理的な関係から整理することになる．実際，60°の大きさの角の作図における正三角形を例にすれば，生徒は，正三角形の性質「三つの内角の大きさはすべて 60°である」を単に利用する，あるいは性質「三つの辺がすべて等しい」により正三角形を定義することに留まらず，正三角形が性質「三つの辺がすべて等しい」と性質「三つの内角の大きさはすべて 60°である」との接合点となる認識（布川, 1992）へ至ることになる．

次に，筆者らは，生徒が構成した素朴な証明から四観点に相当するものを抽出する場を設定した．具体的には，60°の大きさの角の作図手順の正当化において，ある生徒が構成した証明を板書し，その証明及び生徒がそれぞれ構成した証明に,「正三角形」が共通に含まれていることを教師が指摘し，ラベル「使う図形」とともに板書した (図２)．次に，教師は正三角形の「１つの角が 60°」になることが含まれていることを指摘し，ラベル「結果としてなったこと」とともに板書した．続いて，教師は，説明を何のためにしているのかと発問し,生徒とのやりとりを踏まえて「∠B＝60°になる」を，ラベル「言いたいこと」とともに板書した．さらに，教師は，正三角形をどのようにしてつくったのかと発問し，すべての辺，３つの辺を等しくしたとの生徒の解答を受けてラベル「行ったこと」とともに「AB＝BC＝AC」を板書した．

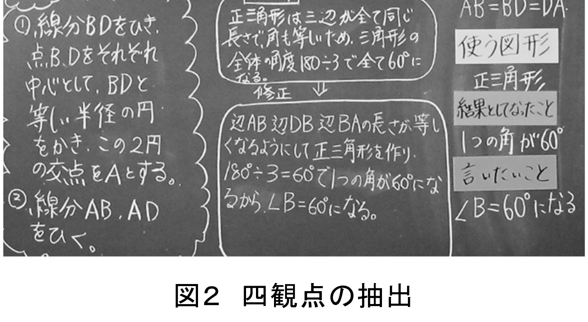

図2　四観点の抽出

(3)　証明を評価・改善する場の設定

「証明の構成要素に基づく証明の評価・改善」を実現するために，いつどんな証明を対象に証明の構成要素に基づく評価・改善を行う機会を設けるか, が指導法上の課題となる．

筆者らは，生徒が自ら構成した素朴な証明を，単元当初から，当初は教師の導きのもとで，次第に自ら，四観点を基に評価し，再構成することを採り入れた. C1 としての証明像を生徒が明確にもつことを重視し, 証明の C1 としての妥当性を吟味することを, C1 としての証明の構成に対して先行させたのである．また，作図手順の正当化としての証明を生徒が自分なりに表現すること重視し，そのような証明の構成を, C1 としての証明の構成に対して先行させた．

実際の授業において，証明の C1 としての妥当性の吟味は，第１時に，60°の大きさの角の作図手順の正当性として生徒が構成した証明を対象に行った．まず，四観点からみて不十分な説明を全体で取り上げ，教師の導きのもとで四観点に対応する内容を指摘したり書きたしたりする場を設定した. 次いで, 60°の大きさの角の作図手順の正当性として自ら構成した素朴な証明を評価・改善することを授業に位置付けた．第２時以降は，まず自ら証明を構成し，次に四観点に対応する内容を全体で確認し，その四観点に基づき自ら構成した証明を修正する場を設けた．修正に際しては，見え消しと加筆というスタイルを採用した．結果として，第３時以降，四観点に対応する内容を全体で確認する以前に，生徒が自ら四観点に対応する内容を意識し，自らの証明を修正しつつ構成する活動が個人としても集団としても増えることとなった．

(4)　証明の構成要素の新たな用い方の推奨

「証明の構成要素を踏まえた証明の構成」を実現するために，証明の構成に際して証明の構成要素を用いることをいかに促進するか, が指導法上の課題となる. 証明の構成要素は,

前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する際の骨子となるパーツに対応するため，証明の構成要素がその機能を発揮する状況として，証明の評価・改善と，証明の構成の少なくとも二つが考えられる．(4)で述べたように，証明の構成要素に基づく評価・改善を先行させるとき，証明を構成するために証明の構成要素を用いることへの展開の仕方を考える必要がある．

筆者らは，証明を構成するために証明の構成要素を用いることを生徒が見いだすことを重視し，生徒がそのような用い方をしたときに推奨するという方針を採った．平成 26 年の実践では第３時に，平成 28 年の実践では第４時に，後で四観点に基づいて見直すなら最初から四観点を用いようと，数名の生徒が証明を構成するために四観点を用いた．その用い方を見つけたことを教師は個別に褒めるとともに，証明を構成するために四観点を用いた事実を教室全体に知らせた．以降，その用い方が教室で共有された．

その結果，角を二等分する作図方法「①点 O を中心とする円をかき，直線 OX と直線 OY との交点をそれぞれ P，Q とする．②2 点 P，Q をそれぞれ中心として，半径が OP と等しい円をかき，その交点の１つを R とする．③直線 OR をひく」に対して，四観点が証明を構想する際にも用いられた．例えば，あるグループは，「行ったこと」が「OP＝PR＝RQ＝QO」，「使う図形」が「ひし形」，「言いたいこと」が「∠XOY の二等分線がかける」となることを確認し合った．「結果としてなったこと」は何だろうと議論したものの保留し，「手順①②で OP＝PR＝RQ＝QO を行い，ひし形ができました。」と証明を書き始めた．その後，ひし形のどんな性質なのかに焦点化して議論し，最終的に「線分 OR（対角線）を使って，ひし形を半分にすると，△RPO と△RQO は等しい図形となり，角も等しくなるから，∠XOY の二等分線がかけます」とまとめた．そして，「結果としてなったこと」として「△RPO と△RQO が等しくなる。」を加筆した (図３)．

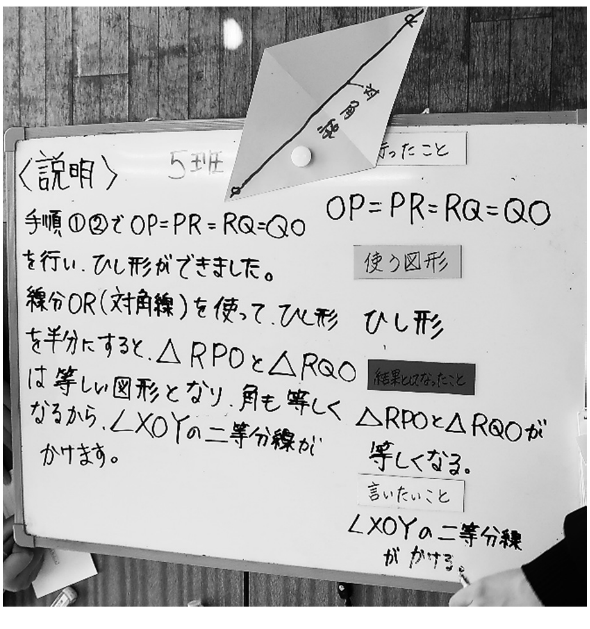

図3　角の二等分線の作図に対する証明の構成

(5) 指導法の単元計画への位置付けと改善

表１は，「基本的な作図」の計 7 時限からなる平成 28 年版の単元計画である．

平成 28 年版は，平成 26 年版 (茅野・清水，2015) からみると第３時を加えている．垂直二等分線の作図技能の習熟を図る中で，ひし形に着目した正当化の意義を考える場を設けるためである．そこで，二つの正三角形を組み合わせた形としてのひし形に留まらず，ひし形なら作図できるのかという探究を誘発すべく問題をデザインした（図４の 2(2)）．

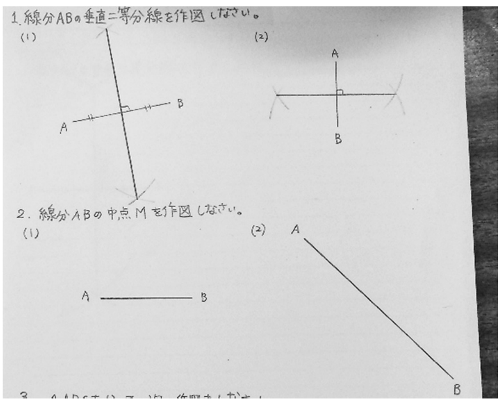

図4　技能の習熟のための練習問題

表1 単元計画

時	学習内容及び［指導事項］
三角定規の形（60°，90°，30°） を正確にかこう	
1	60°の角の作図手順の発見とその正当化 ［作図の意味を知る］，［作図手順の明文化］，［作図手順の正当化としての（素朴な）証明の構成］，［四観点に基づく素朴な証明の評価・改善］
2	垂線の作図手順の発見とその正当化 ［直線は 2 点で決まることの活用］，［作図手順の精緻化］，［作図手順の正当化としての（素朴な）証明の構成］，［四観点に基づく素朴な証明の評価・改善］
3	［証明で用いた根拠に基づき，垂線を垂直二等分線，交点を中点として解釈］，［垂直二等分線の作図］
4	直線 XY 上にない点 A を通る垂線の作図手順の発見とその正当化 ［線分と 1 点の位置関係の一般化］，［作図手順の明文化］，［作図手順の複数回実行と確かめ］，［作図手順の正当化としての証明の構成］，［四観点に基づく証明の評価・改善］
5	花子さん（キャラクターとして授業クラスで定着）により提示された，180°でない角でも二等分する作図手順の正当化 ［辺と角を二等分するという観点からの未解決問題の設定］，［作図手順の複数回実行と確かめ］，［証明の構成］
直線 XY 上にある点 O を通る垂線を作図しよう	
6 7	角の二等分線の作図手順を参考にして，直線 XY 上にある点 O を通る垂線の作図手順の発見とまとめ ［作図手順の適用範囲の特定］，［作図手順の精緻化］，［既習の作図と新たな作図の関係付け］

5．結論と今後の課題

「基本的な作図」における指導法として，授業実践も踏まえ，前提を明確にする場の設定，証明の構成要素の特徴付け方の考案および証明の構成要素を顕在化する場の設定，証明を評価・改善する場の設定，証明の構成要素の新たな用い方の推奨，が得られた．

一方，指導法の効果を何らかの指標を基に吟味できていない．今後の課題である．

引用・参考文献

茅野公穂・宮川健 (2016). 「課題解決として証明することのカリキュラム開発: 領域「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化」，日本数学教育学会 第 4 回春期研究大会論文集, pp. 163-166.

茅野公穂・清水あかね (2015). 「中学校数学における課題探究として証明することの授業化: 第 1 学年の小単元「基本的な作図」」，日本科学教育学会 第 39 回年会論文集, pp. 111-114.

宮崎樹夫・永田潤一郎・茅野公穂 (2014). 「中学校数学における課題探究として証明することのカリキュラム開発: 進行状況と授業化の意味・役割」，日本数学教育学会誌 数学教育, 68(5), pp. 2-5.

宮崎樹夫・清水静海・岩永恭雄・市川大輔 (2017).「課題探究として証明することを実現する指導法開発: 指導法開発の意味」，日本数学教育学会 第 5 回春期研究大会論文集.

布川和彦 (1992). 「図形の認識から見た van Hiele の水準論」，筑波大学教育学系 教育学系論集, 16(2), pp. 139-152.

Pfeiffer, K. (2009). The role of proof validation in students' mathematical learning. In M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 29(3), 79-84.

謝辞 本研究は，JSPS 科研費（No. 24243077，16H02068，16H03057，26282039，26350231，26381191）の助成を受けたものです．