

信州大学審査学位論文

外乱推定問題における並列フィードフォワード
補償器の設計に関する研究

2018年3月

種村 昌也

目次

第1章	緒論	1
1.1	本研究の背景と目的	1
1.2	本論文の構成	4
第2章	問題設定	6
2.1	制御対象	6
2.2	PFCを用いた外乱推定問題	6
第3章	KYP補題に基づく方法	11
3.1	はじめに	11
3.2	評価関数の導入	11
3.3	KYP補題による拡大系の最小位相性の保証	12
3.4	KYP補題によるPFCの安定性の保証	14
3.5	PFCの設計手順	14
3.6	設計パラメータの指定方法	16
3.7	モデルプラントによる推定性能の検証	17
3.7.1	制御対象	17
3.7.2	H_∞ 制御理論を用いた低域通過逆システムによる外乱推定手法（従来手法）	19
3.7.3	PFCの設計（提案手法：ステップ1）	21
3.7.4	スライディングモードオブザーバによる外乱推定方法（提案手法：ステップ2）	23
3.7.5	時間応答による検証	24
3.8	まとめ	26
第4章	ディスクリプタシステムに基づく方法	27
4.1	はじめに	27
4.2	評価関数の導入	27
4.3	H_∞ 制御理論によるPFCの設計	29
4.4	拡大系の最小位相性	32
4.5	不安定なPFCに対する全域通過フィルタの設計	33
4.6	PFCの設計手順	37

4.7	モデルプラントによる推定性能の検証	37
4.7.1	制御対象	37
4.7.2	PFCの設計（提案手法：ステップ1）	37
4.7.3	スライディングモードオブザーバによる外乱推定方法（提案 手法：ステップ2）	40
4.7.4	時間応答による検証	40
4.8	まとめ	42
第5章	各手法の制約条件の関係性	43
5.1	はじめに	43
5.2	拡大系の最小位相性を保証する条件の関係性	43
5.3	まとめ	44
第6章	実機実験による検証	46
6.1	はじめに	46
6.2	Luenberger observerに基づく外乱推定手法	46
6.3	拡大系に対する外乱推定器設計	47
6.4	制御対象	47
6.5	従来手法の外乱推定器設計	51
6.6	KYP補題に基づくPFCの設計	53
6.6.1	低周波帯域および3 Hzに注目したPFCの設計（Case 1）	53
6.6.2	拡大系に対する外乱推定器設計（Case 1）	57
6.6.3	低周波帯域および高周波帯域に注目したPFCの設計（Case 2）	59
6.6.4	拡大系に対する外乱推定器設計（Case 2）	61
6.6.5	数値シミュレーション	63
6.6.6	実験検証	66
6.7	ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づくPFCの設計	68
6.7.1	低周波帯域および3 Hzに注目したPFCの設計（Case 1）	68
6.7.2	拡大系に対する外乱推定器設計（Case 1）	70
6.7.3	低周波帯域および高周波帯域に注目したPFCの設計（Case 2）	72
6.7.4	拡大系に対する外乱推定器設計（Case 2）	74
6.7.5	数値シミュレーション	76
6.7.6	実験検証	78
6.8	まとめ	80
第7章	BMI制約を伴う2次評価関数最小化問題のLMI化による解法	81
7.1	はじめに	81
7.2	問題設定	82

7.3	LMI 化方法	82
7.3.1	概要	82
7.3.2	平方完成と変数変換	83
7.3.3	LMI 表現の十分条件	84
7.4	切り換えシステムにおけるフィードバックゲイン設計	85
7.4.1	制御対象と制御系	85
7.4.2	状態フィードバックゲイン設計	85
7.4.3	提案手法による LMI 化	86
7.5	数値例におけるフィードバックゲインの設計と制御性能の検証	87
7.5.1	制御対象と設計結果	87
7.5.2	コスト保証制御との比較	88
7.5.3	時間応答による検証	89
7.6	まとめ	92
第 8 章	結論	93
	謝辞	95
	参考文献	96
	研究業績	101

目 次

2.1	Block diagram of disturbance estimation system	9
2.2	Block diagram of augmented system	9
2.3	Block diagram of estimator for implementation	9
2.4	Equivalent transformation with respect to disturbance $f_a(s)$ in $\omega \in \{\omega \mid P_m(j\omega) \approx \alpha P_r(j\omega)\}$	10
3.1	Bode plot of $P_r(s)$ in numerical example	18
3.2	Block diagram of filtered inverse system	20
3.3	Block diagram of estimation with $\bar{G}(s)$	20
3.4	Bode plots of $\bar{G}(s)$, $\bar{W}(s)$ and $P_r^{-1}(s)$	20
3.5	Transition of $J(\mathbf{x})$	22
3.6	Bode plots of $P_m(s)$ and $P_r(s)$	22
3.7	Time responses of $f_r(t)$ and $\hat{f}_r(t)$: simulation	25
3.8	Time responses of $f_r(t) - \hat{f}_r(t)$: simulation	25
4.1	Block diagram for design of $P_m(s)$	30
4.2	Augmented system $G_a(s)$ with $G_{ap}(s)$	36
4.3	Modified augmented system $\hat{G}_a(s)$	36
4.4	Bode plots of $P_m(s)$, $W_2(s)$ and $P_r(s)$	39
4.5	Time responses of $f_r(t)$ and $\hat{f}_r(t)$: simulation	41
4.6	Time responses of $f_r(t) - \hat{f}_r(t)$: simulation	41
5.1	Sets of $\chi(\Phi_a)$, χ^∞ and $\chi(\Phi_a^\infty)$	45
6.1	View of the experimental system	49
6.2	Experimental system	49
6.3	Bode plot of $P_r(s)$	50
6.4	Gain characteristic of $f_r(s) \rightarrow f_r(s) - \hat{f}_r(s)$ of the conventional method	52
6.5	Block diagram for design $\bar{P}_m(s)$	55
6.6	Transition of $J(\mathbf{x})$	55
6.7	Bode plots of $P_r(s)$ and $P_{m1}(s)$	56

6.8	Gain characteristic of $f_r(s) \rightarrow f_r(s) - \hat{f}_r(s)$ of the proposed method based on KYP lemma : experiment in Case 1	58
6.9	Bode plots of $P_r(s)$ and $P_{m2}(s)$	60
6.10	Gain characteristic of $f_r(s) \rightarrow f_r(s) - \hat{f}_r(s)$ of the proposed method based on KYP lemma : experiment in Case 2	62
6.11	Gain characteristics of $f_r[z] \rightarrow f_r[z] - \hat{f}_r[z]$ of the proposed method and the conventional method in discretized system	64
6.12	Time responses of $f_r[k]$ and $\hat{f}_r[k]$: simulation	65
6.13	Time responses of $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$: simulation	65
6.14	Time responses of $f_r[k]$ and $\hat{f}_r[k]$: experiment	67
6.15	Time responses of $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$: experiment	67
6.16	Bode plots of $\hat{P}_{m1}(s)$, $W_2(s)$ and $G_{ap}(s)P_r(s)$	69
6.17	Gain characteristic of $f_r(s) \rightarrow f_r(s) - \hat{f}_r(s)$ of the proposed method based on descriptor system : experiment in Case 1	71
6.18	Bode plots of $P_{m2}(s)$, $W_2(s)$ and $P_r(s)$	73
6.19	Gain characteristic of $f_r(s) \rightarrow f_r(s) - \hat{f}_r(s)$ of the proposed method based on descriptor system : experiment in Case 2	75
6.20	Time responses of $f_r[k]$ and $\hat{f}_r[k]$: simulation	77
6.21	Time responses of $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$: simulation	77
6.22	Time responses of $f_r[k]$ and $\hat{f}_r[k]$: experiment	79
6.23	Time responses of $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$: experiment	79
7.1	Switching signal	90
7.2	Time histories of input $u_g[k]$	90
7.3	Time responses of $x_{g1}[k]$	91
7.4	Time responses of $x_{g2}[k]$	91

表 目 次

3.1	Zeros and poles of $P_r(s)$	18
4.1	Zeros of $G_a(s)$ and poles of $P_m(s)$	39
6.1	Parameters of the experimental model	50
6.2	Zeros of $G_a(s)$ and poles of $P_{m1}(s)$	69
6.3	Zeros of $G_a(s)$ and poles of $P_{m2}(s)$	73

第1章 緒論

1.1 本研究の背景と目的

工業分野において、ロボットアームの位置決め制御¹⁾、HDDの位置決め制御^{2,3)}、といった様々な位置決め制御において外乱が加わる場合が多く存在する。この外乱によって、制御性能の劣化、あるいは、機械の故障といった問題が起こる可能性がある。これに対して、外乱を推定・補償するための外乱推定器が提案されている⁴⁻¹⁸⁾。外乱推定器により外乱を推定、そして、補償することにより制御性能の向上が期待できる。外乱推定器の中でも、最小位相系に対するものは数多く研究されているが⁴⁻¹¹⁾、非最小位相系に対するものは比較的少ない¹²⁻¹⁸⁾。非最小位相系としては、連続時間系においては、HDD^{19,20)}、ノンコロケーションな柔軟構造物^{21,22)}、昇圧コンバータ²³⁾などがある。また、連続時間系において最小位相系であっても、離散化の際に非最小位相系となる場合もある²⁴⁾。さらに、むだ時間を含む系^{25,26)}は非最小位相系である。このように、非最小位相系のシステムは多く存在し、非最小位相系に対する制御手法の構築は重要な課題である。文献¹²⁾は、Luenberger observerを拡張したPI observerにより、制御対象の最小位相性を必要とせず外乱を推定する方法を提案している。文献¹³⁻¹⁶⁾は非最小位相系に対して H_∞ 制御理論を活用して外乱推定器を設計している。ここでは、古典的な H_∞ 制御理論を用いているため、外乱推定器の設計が容易である。また、文献¹⁷⁾では非最小位相系に対する低域通過逆システムを H_∞ 制御理論を用いて設計する方法を提案しており、この低域通過逆システムを用いることで外乱が推定できる。この手法も H_∞ 制御理論によってフィルタを設計しているため、設計が容易であるという特徴がある。一方で、文献¹⁸⁾では、並列フィードフォワード補償器(PFC: Parallel Feed-forward Compensator)を用いて外乱を推定する方法が提案されている。この方法は、非最小位相系の制御対象にPFCと呼ばれる伝達関数を並列結合した拡大系を考え、その拡大系を最小位相化して外乱推定器を設計する方法である。PFCを用いる利点として以下の二つが挙げられる。

- 最小位相性を条件とした従来の外乱推定器をそのまま適用できるため扱いが容易。
- 線形外乱オブザーバだけでなく、スライディングモードオブザーバ⁶⁾のような非線形オブザーバが適用可能。

ただし、PFCの設計によって外乱推定性能が大きく左右される。

そこで、本論文ではPFCを導入することにより非最小位相系に対する外乱推定性能の向上を目指す。ただし、PFCにより拡大系を最小位相化し外乱を推定する場合、その推定値は拡大系に対する外乱の推定値となっており、本来の制御対象に対する外乱の推定値とは異なるという問題がある。この問題に対して、外乱の周波数帯域において適切にPFCを設計することで、拡大系に対する外乱推定値から制御対象に対する外乱を推定可能であることを述べる。このことから、外乱推定のためのPFCの設計において、拡大系を最小位相化し、かつ、周波数領域においてPFCを適切に設計することが設計要求となる。文献¹⁸⁾では、PFCの有効性が検証されているが、体系的な設計方法が示されておらず汎用性の面で十分とは言えない。また文献²⁷⁾では、拡大系の零点配置を可能とするPFCの設計方法を提案しているが、周波数領域での設計ではないため外乱推定のためのPFC設計方法として用いることは難しい。一方、文献²⁸⁾では、 H_∞ 制御理論の考えを用いてPFCの設計を行っている。この方法では、制御対象に対して閉ループ系を安定化するコントローラの逆関数をPFCとして用いると、結果として、拡大系が最小位相系となるという性質²⁹⁾に基づいてPFCを設計している。ただし、PFCがプロパーとなる保証はなく、文献²⁸⁾ではプロパーとするために、コントローラのいくつかの極を取り除いて逆関数をプロパーとし、PFCを得ている。しかし、どの極を取り除くかという問題や、そのPFCを用いた場合に拡大系の最小位相性が保証されないといった問題がある。以上の問題を改善する体系的なPFCの設計方法を構築することが本論文の目的である。

本論文では、線形時不変・連続時間・非最小位相系の制御対象に対して、システムティックなPFCの設計を実現するために、PFC設計問題を最適化問題に定式化する。ここで、一般的に制御器は安定であることが望ましいため、本論文ではPFCが安定となることを設計要求に加える。つまり、拡大系を最小位相化し、安定となるPFCを周波数領域によりシステムティックに設計する方法を構築することを目指す。

まず、一入出力系に対しては以下の二つの方法を提案する。

1. KYP補題を用いた凸最適化問題への定式化
2. ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論³⁰⁾を用いた凸最適化問題への定式化

KYP補題を用いる方法では、拡大系の最小位相性とPFCの安定性をKYP補題を用いて凸制約である線形行列不等式(LMI: Linear Matrix Inequality)制約で表す。そして、周波数領域に関する評価関数を定義し、LMI制約条件の下で評価関数を最小化する凸最適化問題を解くことでPFCを得る。KYP補題を用いる方法では、制約条件をLMI制約として表現するためには、いくつかの多項式を設定しなければならない。本論文では、その多項式の設定指針についても述べる。また、この方法ではPFCの次数を設計者が指定することができ、低次のPFCを得ることができるという利点がある。

一方、ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論³⁰⁾ を用いる方法では、制御対象の逆関数に注目し、閉ループ系を安定化するプロパーな制御器を PFC として設計する。文献²⁸⁾ とは異なり、プロパーな PFC を直接設計していることが特徴である。 H_∞ 制御理論を用いるため、周波数領域での PFC の設計が可能である。ただし、制御対象の逆関数は一般に非プロパーとなるため、ディスクリプタ表現を導入する。そして、ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いることで PFC を設計し、設計された PFC が拡大系を最小位相化することを示す。次に設計した PFC が安定か否かを判別し、不安定であった場合は全域通過フィルタを導入することで安定な PFC に変換し、設計要求を満たす PFC を得る。ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いる方法では、 H_∞ 制御理論を用いるため、PFC の次数は高次になる傾向がある。しかし、設定するパラメータは周波数重み関数だけであり、直感的に設計することができるという利点がある。また、本手法で導入する評価関数の特別な場合として PFC のゲインの最小化が評価関数の指標となるが、その場合、文献³¹⁾ のモデル誤差抑制補償法における評価関数と同様の形式として表現できる。文献³¹⁾ は、非最小位相系の制御対象に PFC を並列結合した拡大系を最小位相化し、最小位相系に対する従来のモデル誤差抑制補償法を適用するという手法を提案している。文献³¹⁾ では PFC 設計の際に、モデル化誤差を抑制するために評価関数を導入しているのに対し、本論文では PFC のゲイン最小化の観点から評価関数を導入している。つまり、本論文の結果は、文献³¹⁾ の PFC 設計におけるモデル化誤差抑制と外乱推定問題における PFC のゲイン最小化との等価性を示しており、その意味では新たな知見であると考えられる。また、評価関数が同様の形式であるため本論文の設計方法を文献³¹⁾ の PFC にも適用することもできる。

また、多入出力系の制御対象に対しても PFC の設計方法を構築することは重要である。その一つの可能性として、制約付きのシステム同定法³²⁻³⁵⁾ の考え方を応用して多入出力系における PFC の設計を行うアプローチが考えられる。制約付きのシステム同定問題とは推定するパラメータに制約を設けて最適化問題を解き、制約を満たす範囲内で、制御対象の応答を近似するパラメータを得る手法であり、これらの手法は多入出力系の制御対象に対して適用可能である。そこで、拡大系を最小位相とする制約の範囲内で理想的な周波数特性となる PFC を設計する、という PFC 設計問題を制約付きのシステム同定問題と捉え定式化することで多入出力系の PFC の設計が可能となると考えられる。本論文では、そのはじめの取り組みとして、双線形行列不等式 (BMI: Bilinear Matrix Inequality) 制約のもとでの 2 次評価関数最小化問題の解法に関する方法を検討する。例えば、線形システムにおいてゲインの切り替えを伴う制御系のゲイン設計問題^{36,37)} が本論文で扱う最適化問題に帰着できる。本論文で提案する BMI 制約のもとでの 2 次評価関数最小化問題の解法を応用することで制約付きのシステム同定問題にも適用が可能となる。BMI 制約のもとでの 2 次評価関数最小化問題は非凸最適化問題のため扱いにくい問題である。そこで本論文では、文献³⁸⁻⁴¹⁾ の LMI 化法に注目する。文献³⁸⁻⁴¹⁾ で

は、混合 H_2/H_∞ 制御問題などの非線形最適化問題を変形し、制約条件の非線形要素が変数の2次の項となるように変形する。そして、十分条件によって2次の項を変数に関する線形な形式に変換し LMI 表現の凸最適化問題に帰着させている。本論文においても、BMI 制約のもとでの2次評価関数最小化問題を適切に変形することで、最適化問題の制約条件の非線形要素を変数の2次の項として表現する。そして、本論文では新たな十分条件により、LMI 表現の凸最適化問題に帰着させる。

1.2 本論文の構成

まず第2章において、本論文で扱う非最小位相系に対する外乱推定問題を定義する。そして、PFCを導入する方法を説明し、PFCの設計条件を述べる。

第3章では、PFC設計問題をKYP補題を用いて凸最適化問題に定式化する方法を述べる。そこでは、まず、周波数領域においてPFCを設計するために、設計変数に関して凸形式の評価関数を導入する。次に、拡大系の最小位相性およびPFCの安定性を最適化問題の制約条件とするためにKYP補題を活用する。そこでは、安定化したい多項式を分子多項式に持つ、安定でバイプロパーな伝達関数を導入する。そして、導入した伝達関数の最小位相性の条件をKYP補題を用いた強正実条件として表現することで、設計変数に関するLMI制約として書き表す。ここで、導入した伝達関数の分母多項式を事前に与える必要がある。これに対して、その多項式の設定指針について第3章で与える。これにより、PFC設計問題をLMI表現の凸最適化問題に定式化し、システムティックな設計方法を構築することができた。

第4章では、PFC設計問題をディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いて凸最適化問題に定式化する方法を述べる。この方法では制御対象の逆関数に注目し、閉ループ系を安定化するプロパーな制御器をPFCとして設計する。このとき、制御対象の逆関数は一般に非プロパーとなるためディスクリプタ表現を導入する。そして、ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いることでPFCを設計し、設計されたPFCが拡大系を最小位相化することを示す。次に、PFCが安定か否かを判別し、不安定であった場合は全域通過フィルタを導入することで安定なPFCに変換する。この方法では、設定するパラメータは周波数重み関数だけであり、直感的な設計方法が構築できた。

第5章では第3章および第4章の各手法における拡大系の最小位相性を保証する制約条件の関係性を考察する。第3章のKYP補題を用いる方法の方がPFCの次数を任意に設定でき、さらに、多項式の設定の自由度があるため、第4章のディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いる方法では考慮できない範囲の設計パラメータを探索できることを示す。

第6章では実験機の三慣性軸ねじり振動系に対して外乱推定を行い、PFCの導入の効果を検証する。各手法においてそれぞれPFCを設計し外乱推定すること

で、従来よりも外乱推定性能の向上が図れる場合があることを実機実験により検証する。

第7章では、BMI制約のもとでの2次評価関数最小化問題のLMI化方法を述べる。ここでは、変数変換および平方完成を施すことにより十分条件が適用できる形式に最適化問題を変形する。そして、その最適化問題をLMI化する十分条件を述べる。

第2章 問題設定

2.1 制御対象

本論文では、次式の連続時間・非最小位相系の制御対象 $P_r(s)$ を考える.

$$P_r(s) = \frac{N_r(s)}{D_r(s)} \quad (2.1)$$

$$P_r(s) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_r(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{B}_r(\mathbf{u}_r(t) + \mathbf{f}_r(t)) \\ \mathbf{y}_r(t) = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D}_r(\mathbf{u}_r(t) + \mathbf{f}_r(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

ただし、式 (2.1) は伝達関数表現であり、式 (2.2) は状態空間表現である。ここで、 $\mathbf{x}_r(t) \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$ 、 $\mathbf{u}_r(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 、 $\mathbf{f}_r(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 、 $\mathbf{y}_r(t) \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ はそれぞれ状態変数、入力、入力端外乱、出力である。ただし、 $\mathbf{f}_r(t)$ は入力と同じ位置に印加されているものを考えるが、これは入力端に換算して考えられる外乱も含んでいる。また、 \mathbf{A}_r 、 \mathbf{B}_r 、 \mathbf{C}_r 、 \mathbf{D}_r は定数係数であり、各係数は既知であるとする。相対次数に関しては制約がなく、直達項 \mathbf{D}_r が非正則であっても以下の議論は成り立つ。また、 $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r)$ は可制御、 $(\mathbf{C}_r, \mathbf{A}_r)$ は可観測であるとする。本論文では式 (2.1) で示したように有理関数を考えている。むだ時間は有理関数ではないが、パデ近似などを行うことにより有理関数として近似することができるため、むだ時間を含むシステムに対しても本論文の方法を適用することができる。

本論文において、7章以外は制御対象 $P_r(s)$ は一入出力系を対象として PFC の設計方法を提案する。そのため、以降では一入出力系に対して議論する。つまり、 $p = q = 1$ として議論を進める。

2.2 PFC を用いた外乱推定問題

ここで、図 2.1 に示す外乱推定問題を考える。図 2.1 の“D. O.” は外乱推定オブザーバを意味する。制御対象が非最小位相系の場合、外乱推定帯域の向上が難しい、適用できる推定器の設計方法が少ないといった問題がある。この問題を解決するため、図 2.2 のように PFC

$$P_m(s) = \frac{N_m(s)}{D_m(s)} \quad (2.3)$$

$$= \frac{b_{m_m} s^{m_m} + b_{m_m-1} s^{m_m-1} \cdots + b_0}{s^{n_m} + a_{n_m-1} s^{n_m-1} + \cdots + a_0} \quad (2.4)$$

$$P_m(s) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{b}_m u_r(t) \\ y_m(t) = \mathbf{c}_m \mathbf{x}_m(t) + d_m u_r(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

を導入する方法が提案されている¹⁸⁾。ここで、式(2.4)は伝達関数表現であり、式(2.5)は状態空間表現である。また、式(2.4)の係数 $b_{m_m}, \dots, b_0, a_{n_m-1}, \dots, a_0$ 、あるいは、式(2.5)の各係数 $\mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ 、 $\mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^{n_m \times 1}$ 、 $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^{1 \times n_m}$ 、 $d_m \in \mathbb{R}$ は設計変数である。図2.2において、 $P_r(s)$ が実システムであり、推定器“D. O.”は拡大系 $G_a(s) = P_r(s) + P_m(s)$ に対して適用する外乱推定器である。図2.2は外乱推定器を設計する際に考えるブロック線図であり、実際に外乱推定を行う際は図2.3のように制御系を構成する。図2.3の網掛けの部分に計算機上に実装する制御系である。本稿の目的はPFCを導入することで拡大系を最小位相化し、かつ、指定した周波数帯域において外乱推定が可能となるPFCを設計することである。そのためにPFCは、制御対象とPFCを並列結合した拡大系

$$G_a(s) = P_r(s) + P_m(s) \quad (2.6)$$

$$G_a(s) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_a(t) = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{b}_a (u_a(t) + f_a(t)) \\ y_a(t) = \mathbf{c}_a \mathbf{x}_a(t) + d_a (u_a(t) + f_a(t)) \end{cases} \quad (2.7)$$

を最小位相化するように設計する。ここで、

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_m \end{bmatrix}, \mathbf{b}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_r \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix}, \mathbf{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{x}_m(t) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_r & \mathbf{c}_m \end{bmatrix}, d_a = d_r + d_m,$$

である。また、 $f_a(t) \in \mathbb{R}$ は拡大系 $G_a(s)$ に印加される仮想的な等価外乱であり、 $f_r(t)$ が $P_r(s)$ に印加された時の出力 $y_r(t)$ と、 $f_a(t)$ が $G_a(s)$ に印加された時の出力 $y_a(t)$ が等しくなるような外乱である。このとき、最小位相化された拡大系を制御対象として考えることで、最小位相性を条件とした外乱推定器を適用できる。ただし、最小位相化された拡大系 $G_a(s)$ に対して外乱推定を行うと、 $f_a(t)$ の推定値 $\hat{f}_a(t)$ が推定されるため、 $\hat{f}_a(t)$ から本来の外乱の推定値 $\hat{f}_r(t)$ を推定しなければならない。この推定を可能とする一つの方法は、PFC、 $P_m(s)$ を外乱の周波数帯域で可能な限り $P_m(j\omega) \approx \alpha P_r(j\omega)$ とすることである。ここで、 $\alpha (\geq 0) \in \mathbb{R}$ は任意の0以上の定数である。すなわち、 $P_m(j\omega) \approx \alpha P_r(j\omega)$ が成り立つ帯域では、図2.4の等価変換が成り立つため、

$$\hat{f}_r(t) \approx (\alpha + 1) \hat{f}_a(t) \quad (2.8)$$

として扱うことができる。よって、可能な限り $P_m(j\omega) \approx \alpha P_r(j\omega)$ を実現することで、その帯域では拡大系に対する外乱推定値 $\hat{f}_a(t)$ から本来の外乱の推定値 $\hat{f}_r(t)$

を求めることができる。ここで、 $\alpha = 0$ の場合、 $P_m(j\omega) \approx 0$ とすることで式(2.8)の関係により外乱が推定可能となる。これはもとの制御対象の特性をなるべく変化させずに拡大系を最小位相化するPFCを設計することを意味する。拡大系を最小位相化するためには完全に $P_m(j\omega) = 0$ とすることはできないため、 $\alpha = 0$ の場合は、拡大系を最小位相化する範囲でなるべく小さなゲインとなるようにPFCを設計することが目標となる。以上から、以下の条件を満たすPFCを設計することが目標である。

条件 1 指定した帯域で可能な限り $P_m(j\omega) \approx \alpha P_r(j\omega)$ を実現する。

条件 2 式(2.7)の拡大系 $G_a(s) = P_r(s) + P_m(s)$ は最小位相系である。

また、本論文では制御器であるPFCを安定な範囲で定めることを制約として考慮する。そのため、

条件 3 $P_m(s)$ は安定となる範囲で求める。

が満たされなければならない。以上から、以下の問題を解くことが本論文の目標である。

<考える問題> 条件 1, 2, 3 を満たす式(2.4)あるいは式(2.5)のPFC, $P_m(s)$ を設計する。

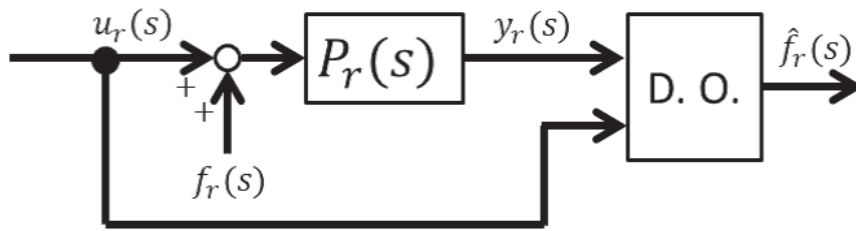


Fig. 2.1 Block diagram of disturbance estimation system

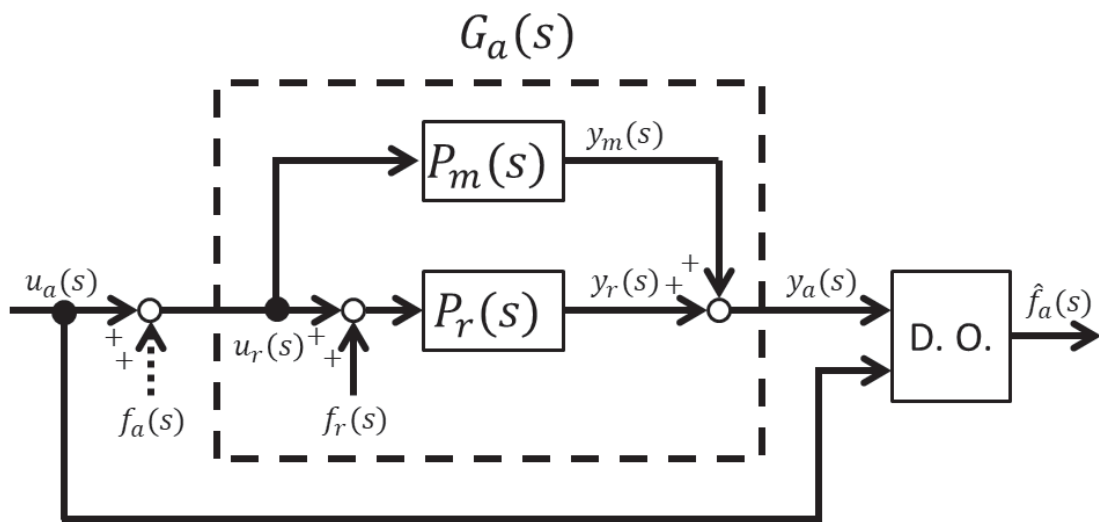


Fig. 2.2 Block diagram of augmented system

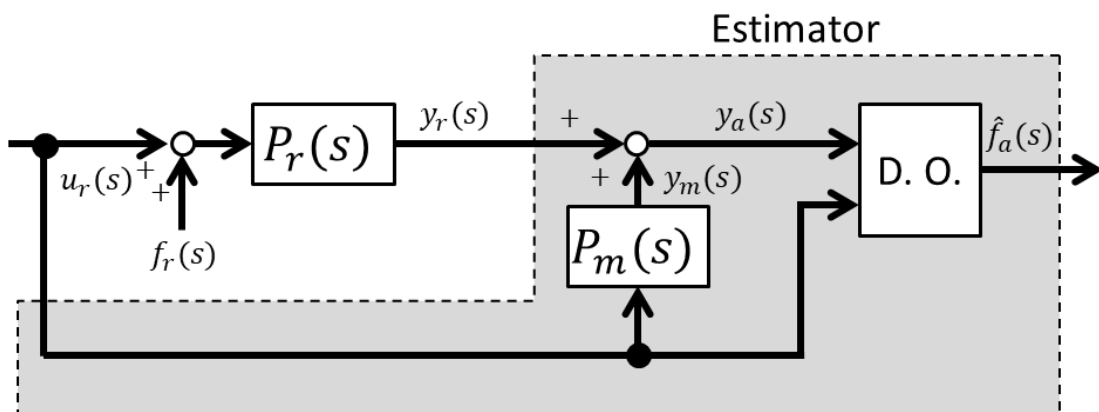


Fig. 2.3 Block diagram of estimator for implementation

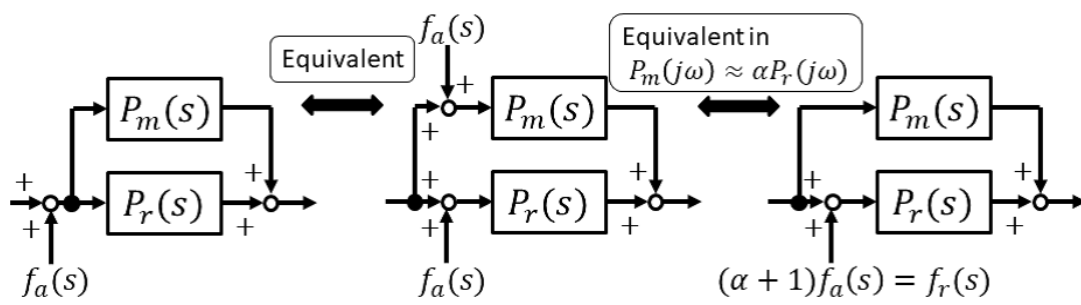


Fig. 2.4: Equivalent transformation with respect to disturbance $f_a(s)$ in $\omega \in \{\omega \mid P_m(j\omega) \approx \alpha P_r(j\omega)\}$

第3章 KYP 補題に基づく方法

3.1 はじめに

ここでは、KYP 補題を活用し PFC の設計問題を凸最適化問題として定式化する。そして、その最適化問題を解くことで条件 1, 2, 3 を満たす PFC を得る。まず、条件 1 を満たすために、周波数領域における $P_m(s)$ と $\alpha P_r(s)$ 間の誤差を評価関数として定義する。この評価関数は設計パラメータに関して凸な形式で与える。次に KYP 補題を活用し、条件 2, 3 を凸制約である LMI 制約として書き表す。このとき、LMI 制約として表現するためには多項式を事前に決定する必要があるが、その設定方針についても述べる。

3.2 評価関数の導入

条件 1 を満たすために、周波数領域における $P_m(s)$ と $\alpha P_r(s)$ の間の誤差を表す誤差伝達関数 $E_1(s)$ を定義する。

$$E_1(s) = W_1(s)(\alpha P_r(s) - P_m(s)), \quad (3.1)$$

$$W_1(s) = \frac{D_m(s)}{\Phi(s)}. \quad (3.2)$$

ここで、 $W_1(s)$ の分子 $D_m(s)$ は $P_m(s)$ の分母多項式であり、 $W_1(s)$ の分母 $\Phi(s)$ は後述する設計手順で与えられる既知多項式である。 $W_1(s)$ は $E_1(s)$ に重みを付け、さらに $E_1(s)$ を $N_m(s)$, $D_m(s)$ の設計変数 a_i, b_j ($i = 0, \dots, n_m - 1, j = 0, \dots, m_m$) に関して以下のように線形化する役割がある。

$$E_1(\omega) = \frac{D_m(j\omega)}{\Phi(j\omega)} \alpha P_r(j\omega) - \frac{N_m(j\omega)}{\Phi(j\omega)}, \quad (3.3)$$

$$= [\Phi_0^r(\omega) + \Phi_a^r(\omega) \mathbf{a} + \Phi_b^r(\omega) \mathbf{b}] + j[\Phi_0^i(\omega) + \Phi_a^i(\omega) \mathbf{a} + \Phi_b^i(\omega) \mathbf{b}], \quad (3.4)$$

$$= E^r(\omega) + jE^i(\omega), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{n_m-1}]^T, \quad \mathbf{b} = [b_0, \dots, b_{m_m}]^T.$$

ここで、 Φ_0^r, Φ_0^i は \mathbf{a}, \mathbf{b} に依存しない項、 Φ_a^r, Φ_a^i は \mathbf{a} の係数項、 Φ_b^r, Φ_b^i は \mathbf{b} の係数項である。このとき、設計パラメータから成るベクトルを $\mathbf{x}^T = [\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T]$ とす

ると、 \mathbf{x} に関してアフィンな次式を得る.

$$\begin{bmatrix} E^r(\omega) \\ E^i(\omega) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta}(\omega) + \boldsymbol{\alpha}(\omega)\mathbf{x}, \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\omega) := \begin{bmatrix} \Phi_0^r(\omega) \\ \Phi_0^i(\omega) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}(\omega) := \begin{bmatrix} \Phi_a^r(\omega) & \Phi_b^r(\omega) \\ \Phi_a^i(\omega) & \Phi_b^i(\omega) \end{bmatrix}$$

$E_1(s)$ のゲインを最小化することで、 $\alpha P_r(s)$ と $P_m(s)$ の周波数応答マッチングを行う。そこで、 N 点の周波数 ω_k ($k = 1, \dots, N$) に注目した次式の評価関数を定義する。

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} E^r(\omega_k) & E^i(\omega_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^r(\omega_k) \\ E^i(\omega_k) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + 2\mathbf{g}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{g}^T \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここで

$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}(\omega_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}(\omega_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}(\omega_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}(\omega_N) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

である。この評価関数 $J_1(\mathbf{x})$ を最小化することで $E_1(s)$ のゲインを小さくすることができる。 $J_1(\mathbf{x})$ の最小化問題を LMI 制約として扱うために、シュール補題⁴²⁾を用いる。 $\gamma_1 > J_1(\mathbf{x})$ となる γ_1 を導入し、 $\gamma_1 > J_1(\mathbf{x})$ にシュール補題を適用すると

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 - 2\mathbf{g}^T \mathbf{H} \mathbf{x} - \mathbf{g}^T \mathbf{g} & \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} \mathbf{x} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.9)$$

と表すことができる。式 (3.9) は \mathbf{x} , γ_1 に関する LMI 制約となっており、式 (3.9) のもとで γ_1 を最小化することで $J_1(\mathbf{x})$ を最小化することができる。

3.3 KYP 補題による拡大系の最小位相性の保証

条件 2 の LMI 条件を導出する。条件 2 は拡大系

$$G_a(s) = \frac{N_r(s)D_m(s) + N_m(s)D_r(s)}{D_r(s)D_m(s)}, \quad (3.10)$$

の分子 $N_r(s)D_m(s) + N_m(s)D_r(s)$ が安定多項式であることを要求している。 $G_a(s)$ は分母分子ともに未知多項式である $N_m(s)$ あるいは $D_m(s)$ を含んでいるため扱い

にくい。そのため、分母多項式を既知多項式で置き換えた次式の伝達関数 $\bar{G}_a(s)$ を考える。

$$\bar{G}_a(s) = \frac{N_r(s)D_m(s) + N_m(s)D_r(s)}{\Phi_a(s)} \quad (3.11)$$

$$:= \frac{\beta_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})s^l + \beta_{l-1}(\mathbf{a}, \mathbf{b})s^{l-1} + \cdots + \beta_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\alpha_l s^l + \alpha_{l-1} s^{l-1} + \cdots + \alpha_0}. \quad (3.12)$$

ここで、 $\bar{G}_a(s)$ の分子多項式は安定多項式にすべき $G_a(s)$ の分子多項式であり、その係数を $\beta_i(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ($i = 1, \dots, l$) と表す。また、分母 $\Phi_a(s)$ は分子多項式と同次の安定な既知多項式であり、その係数 α_i ($i = 1, \dots, l$) は後述する設計手順により与えられる。 $\bar{G}_a(s)$ の分子の係数 $\beta_l(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \dots, \beta_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ は設計変数 a_i, b_j ($i = 0, \dots, n_m - 1, j = 0, \dots, m_m$) に関してアフィンな形で与えられることに注意する。この $\bar{G}_a(s)$ の最小位相性を保証する LMI 条件を導出し、条件 2 の制約条件として用いる。まず、 $\bar{G}_a(s)$ を可制御正準形式

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_a(t) = \bar{\mathbf{A}}_a \bar{\mathbf{x}}_a(t) + \bar{\mathbf{b}}_a \bar{u}_a(t) \\ \bar{\mathbf{y}}_a(t) = \bar{\mathbf{c}}_a \bar{\mathbf{x}}_a(t) + \bar{d}_a \bar{u}_a(t) \end{cases}, \quad (3.13)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_l} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_l} & \cdots & \cdots & -\frac{\alpha_{l-1}}{\alpha_l} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{b}}_a = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\alpha_l} \end{bmatrix}^T,$$

$$\bar{\mathbf{c}}_a = \left[\beta_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \beta_l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \frac{\alpha_0}{\alpha_l}, \quad \cdots, \quad \beta_{l-1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \beta_l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \frac{\alpha_{l-1}}{\alpha_l} \right],$$

$$\bar{d}_a = \frac{\beta_l(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\alpha_l},$$

に変形する。可制御正準形式に変形することで $\bar{\mathbf{c}}_a, \bar{d}_a$ は $\beta_l(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \dots, \beta_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ に関してアフィン、つまり、設計変数 a_i, b_j ($i = 0, \dots, n_m - 1, j = 0, \dots, m_m$) に関してアフィンとなる。一方で $\bar{\mathbf{A}}_a, \bar{\mathbf{b}}_a$ は定数行列、および、定数ベクトルである。このとき、次に示す KYP 補題を用いることで $\bar{G}_a(s)$ の最小位相性を保証する。

定理 1 (KYP 補題⁴³). $\bar{G}_a(s)$ が強正実であるための必要十分条件は

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_a \bar{\mathbf{A}}_a + \bar{\mathbf{A}}_a^T \bar{\mathbf{P}}_a & \bar{\mathbf{P}}_a \bar{\mathbf{b}}_a - \bar{\mathbf{c}}_a^T \\ \bar{\mathbf{b}}_a^T \bar{\mathbf{P}}_a - \bar{\mathbf{c}}_a & -\bar{d}_a - \bar{d}_a^T \end{bmatrix} < 0, \quad \bar{\mathbf{P}}_a > 0, \quad (3.14)$$

を満たす行列 $\bar{\mathbf{P}}_a \in \mathbb{R}^{l \times l}$ が存在することである。ただし、 l は $\bar{G}_a(s)$ の次元である。

システムが強正実であれば最小位相系となるため⁴⁴⁾、式(3.14)を満たす $\bar{\mathbf{P}}_a$ が存在すれば $\bar{G}_a(s)$ は最小位相となる。ここで、式(3.14)は $\bar{\mathbf{c}}_a$, $\bar{\mathbf{d}}_a$, $\bar{\mathbf{P}}_a$ に関するLMI条件となっており、設計変数 a_i, b_j ($i = 0, \dots, n_m - 1, j = 0, \dots, m_m$)に関して凸な制約条件となっているため、凸最適化問題を解くことで条件2を保証することができる。ただし、式(3.14)は $N_r(s)D_m(s) + N_m(s)D_r(s)$ を安定多項式にするために、式(3.11)のように分母多項式 $\Phi_a(s)$ を導入したシステム $\bar{G}_a(s)$ に対して強正実性を課しているため、条件2よりも強い条件となっていることに注意する。

3.4 KYP 補題による PFC の安定性の保証

条件3に関しても同様に、安定多項式にすべき多項式 $D_m(s)$ を分子に持つ伝達関数

$$\bar{G}_m(s) = \frac{D_m(s)}{\Phi_m(s)} \quad (3.15)$$

$$:= \frac{s^{n_m} + a_{n_m-1}s^{n_m-1} + \dots + a_0}{s^{n_m} + \gamma_{n_m-1}s^{n_m-1} + \dots + \gamma_0}, \quad (3.16)$$

を考え、

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_m \bar{\mathbf{A}}_m + \bar{\mathbf{A}}_m^T \bar{\mathbf{P}}_m & \bar{\mathbf{P}}_m \bar{\mathbf{b}}_m - \bar{\mathbf{c}}_m^T \\ \bar{\mathbf{b}}_m^T \bar{\mathbf{P}}_m - \bar{\mathbf{c}}_m & -\bar{\mathbf{d}}_m - \bar{\mathbf{d}}_m^T \end{bmatrix} < 0, \quad \bar{\mathbf{P}}_m > 0, \quad (3.17)$$

により $\bar{G}_m(s)$ の最小位相性を保証することで、多項式 $D_m(s)$ の安定性を保証することができる。ただし、式(3.14)と同様、式(3.17)は多項式 $D_m(s)$ が安定多項式となるための十分条件であり、条件3よりも強い条件となっている。ここで、 $\Phi_m(s)$ は $D_m(s)$ と同次の安定な多項式であり、 γ_i ($i = 0, \dots, n_m - 1$)は後述する設計手順により与えられる。また、 $\bar{\mathbf{A}}_m$, $\bar{\mathbf{b}}_m$, $\bar{\mathbf{c}}_m$, $\bar{\mathbf{d}}_m$ は $\bar{G}_m(s)$ を可制御正準形式に変形したときの係数行列であり、 $\bar{\mathbf{P}}_m \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ は変数行列である。 $\bar{\mathbf{A}}_m$, $\bar{\mathbf{b}}_m$ は定数行列、および、定数ベクトルであり、 $\bar{\mathbf{c}}_m$ は設計変数 a_i ($i = 0, \dots, n_m - 1$)に関してアフィンなベクトルである。ここで、 $D_m(s)$ はモニックな多項式であるため、 $\bar{\mathbf{d}}_m = 1$ である。

3.5 PFC の設計手順

以上から、式(3.9)、式(3.14)および式(3.17)の制約の下で γ_1 を最小化することでPFCを設計する。つまり、

$$\min_{\gamma_1, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{P}}_a, \bar{\mathbf{P}}_m} \gamma_1 \quad \text{s.t. Eqs. (3.9), (3.14), (3.17)}. \quad (3.18)$$

を解き、解 \boldsymbol{x} を求め、式 (2.4) の PFC を得る。

式 (3.18) の最適化問題を解くことで、条件 1, 2, 3 を考慮した PFC を設計することができるが、本論文ではさらに評価関数を小さくするための繰り返し計算法を提案する。式 (3.18) を解いて得られた解から $P_m(s) = N_m(s)/D_m(s)$ を構成し、式 (3.11) の分母を $\Phi_a(s) = N_r(s)D_m(s) + N_m(s)D_r(s)$ とし、式 (3.15) の分母を $\Phi_m(s) = D_m(s)$ として再度式 (3.18) の最適化問題を解くことを繰り返すことで、評価関数の値を減少させる解を得ることができる。評価関数の単調減少性は定理 2 に示す。以下に提案する PFC の設計手順をまとめる。

Step 0

- 1) マッチングする周波数 ω_k ($k = 1, \dots, N$), $P_m(s)$ の次数 n_m, m_m , 条件 1 の定数 $\alpha \geq 0$ を決定する。
- 2) 式 (3.2) の多項式 $\Phi(s)$ を決定し、式 (3.8) の $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{g}$ を計算する。
- 3) 式 (3.11) の安定多項式 $\Phi_a(s)$ の初期値を決定し、 $\bar{G}_a(s)$ を可制御正準形式に変形する。
- 4) 式 (3.15) の安定多項式 $\Phi_m(s)$ の初期値を決定し、 $\bar{G}_m(s)$ を可制御正準形式に変形する。

Step 1

式 (3.18) の凸最適化問題を解き設計変数 \boldsymbol{x} を求める。

Step 2

得られた解 \boldsymbol{x} より、 $P_m(s) = N_m(s)/D_m(s)$ を構成する。そして、 $\Phi_a(s) = N_r(s)D_m(s) + N_m(s)D_r(s)$, $\Phi_m(s) = D_m(s)$ と置き、Step 1 に戻り最適化問題を解く。この繰り返しを評価関数が小さくなるまで繰り返す。

定理 2. 上記の Step 1 および 2 による繰り返し計算によって、評価関数 $J_1(\boldsymbol{x})$ は単調減少する。

証明. 上記の繰り返しにおける評価関数の単調減少性は以下のように示せる。 i 回目の繰り返しにおいて Step 1 の最適化問題の制約を満たす集合を $\boldsymbol{\chi}^i$ とする。また、Step 1 の最適化問題を解いて得られる解を $\boldsymbol{x}^i \in \boldsymbol{\chi}^i$ とする。このとき、最適化問題が凸であることから、 $\boldsymbol{x}^i \in \boldsymbol{\chi}^{i+1}$ であれば、繰り返しによる評価関数の劣化はなく単調減少であることがわかる。 i 回目において Step 2 で \boldsymbol{x}^i を用いて $\Phi_a(s)$, $\Phi_m(s)$ を構成しているため、 $i+1$ 回目において \boldsymbol{x}^i を式 (3.11), 式 (3.15) の分子に代入すると分母と分子は同一となり、 $\bar{G}_a(s) = 1$, $\bar{G}_m(s) = 1$ となる。正定数 1 は強正実であるため、式 (3.14), 式 (3.17) を満たす $\bar{\boldsymbol{P}}_a > 0$, $\bar{\boldsymbol{P}}_m > 0$ は必ず存在する。以上から、 $\boldsymbol{x}^i \in \boldsymbol{\chi}^{i+1}$ であるため、 $J_1(\boldsymbol{x}^1) \geq \dots \geq J_1(\boldsymbol{x}^i) \geq J_1(\boldsymbol{x}^{i+1}) \geq \dots$ が保証される。 ■

3.6 設計パラメータの指定方法

Step 0において多項式 $\Phi(s)$, $\Phi_a(s)$, $\Phi_m(s)$ を指定する必要がある。そこで、本論文では制御対象 $P_r(s)$ が安定である場合について、これらの多項式を決定する方法を以下に述べる。まず、以下の定理が成り立つ。

定理 3. 制御対象 $P_r(s)$ は安定であると仮定する。また、 $P_r(s)$ の相対次数を δ_r と定義する。ここで、以下の二つの条件を満たす伝達関数 $P(s) = N(s)/D(s)$ を考える。

1. $P(s)$ の相対次数 δ_p は $\delta_p \leq \delta_r$ である。
2. $P(s)$ は最小位相系である。($N(s)$ は安定多項式である。)

このとき、拡大系 $P_r(s) + KP(s)$ を最小位相化する正定数 K が存在する。

証明. 拡大系 $P_r(s) + KP(s)$ は

$$P_r(s) + KP(s) = (\Delta(s) + 1)KP(s), \quad (3.19)$$

$$\Delta(s) = \frac{P_r(s)}{KP(s)}, \quad (3.20)$$

と変形できる。ここで、 $\delta_p \leq \delta_r$ であるため $\Delta(s)$ はプロパーである。また、 $P(s)$ が最小位相かつ $P_r(s)$ が安定であるため、 $\Delta(s)$ は安定である。以上から、 $\Delta(s) \in RH_\infty$ である。ここで、もし $\|\Delta(s)\|_\infty < 1$ が成り立てば、 $\Delta(s)$ のベクトル軌跡は $-1 + j0$ のまわりを回らない。このとき、ナイキストの安定判別法の導出過程と同様の考えに基づくと（つまり、 $\Delta(s)$ を一巡伝達関数と考えると、閉ループシステムの分母多項式は $\Delta(s) + 1$ の分子多項式と等しいため） $\Delta(s) + 1$ の分子多項式は安定、つまり、 $\Delta(s) + 1$ は最小位相系となることがわかる。さらに、 $P(s)$ が最小位相系であることを考慮すると、式 (3.19) は最小位相系となる。式 (3.20) において、 $|P_r(j\omega)/P(j\omega)|$ は任意の ω で有界であることから、正定数 K を大きくすることで $\|\Delta(s)\|_\infty < 1$ を満たす有界な K が存在することは明らかである。よって、 $P_r(s) + KP(s)$ を最小位相化する正定数 K が存在する。 ■

上記の定理 3 より、以下の手順によって条件を満足する多項式を決定する。はじめに、設計する PFC, $P_m(s) = N_m(s)/D_m(s)$ の次数について、 $N_m(s)$ の次数 m_m と $D_m(s)$ の次数 n_m を $n_m - m_m \leq \delta_r$ を満たすように設定しておく。次に、定理 3 における $P(s)$ の分母 $D(s)$ の次数を n_m 、分子 $N(s)$ の次数を m_m として、 $N(s)$ を安定な多項式に設定する。これにより、定理 3 の仮定は満たされる。 $D(s)$ は $\Phi_m(s)$ として用いるため、ここでは $D(s)$ も安定多項式として設定しておく。次に、拡大系 $P_r(s) + KP(s)$ が最小位相となる K を求める。次に、 $N_K(s) := KN(s)$ と定義し、この $N_K(s)$, $D(s)$ を用いて多項式 $\Phi(s)$, $\Phi_a(s)$, $\Phi_m(s)$ を以下のように指定する。まず、 $\Phi_a(s)$ については、制御対象の分子 $N_r(s)$, 分母 $D_r(s)$, および上記の手

順で設定した $N_K(s)$, $D(s)$ を用いて, $\Phi_a(s) = N_r(s)D(s) + N_K(s)D_r(s)$ と指定する. この $\Phi_a(s)$ は $P_r(s) + KP(s)$ の分子と同一であるため, 安定な多項式である. また, $N_K(s)$, $D(s)$ の次数はそれぞれ $N_m(s)$, $D_m(s)$ と同次であるため, $\Phi_a(s)$ の次数は式 (3.11) の分子と同次である. $\Phi_m(s)$ については, $\Phi_m(s) = D(s)$ と指定する. $D(s)$ は安定な多項式を設定しているため, $\Phi_m(s)$ は安定多項式となる. また, $D(s)$ の次数は $D_m(s)$ と同次であるため, $\Phi_m(s)$ の次数は式 (3.15) の分子と同次である. $\Phi(s)$ は特に満たすべき条件はないが, 式 (3.2) の分子が $D_m(s)$ であることから, $\Phi(s) = D(s)$ とすることで分子と同次の多項式を設定することができる. 以上の手順により, Step 0 における多項式 $\Phi(s)$, $\Phi_a(s)$, $\Phi_m(s)$ を容易に決定できる.

3.7 モデルプラントによる推定性能の検証

3.7.1 制御対象

式 (2.2) において, 以下の係数行列を持つ制御対象を考える.

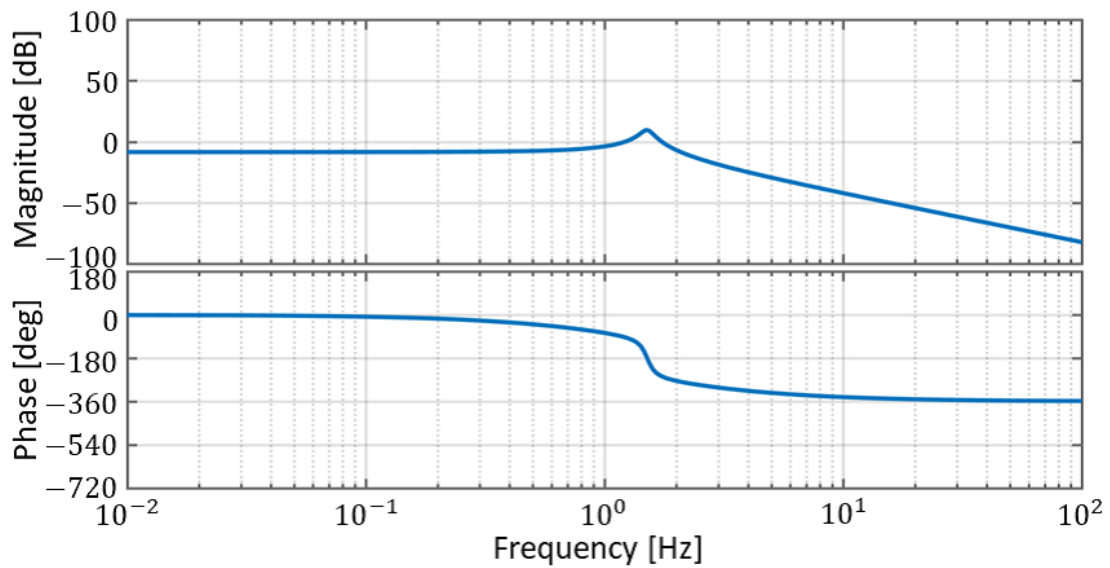
$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -800 & -100 & -10 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_r = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \end{bmatrix}, d_r = 0$$

この制御対象の零点および極を表 3.1 に示す. 表 3.1 より, $P_r(s)$ の零点は 10 であり, 非最小位相系である. 図 3.1 に制御対象のボード線図を示す.

Table 3.1 Zeros and poles of $P_r(s)$

Zeros	Poles
10	-8.882
	$-0.5590 \pm j9.474$

Fig. 3.1 Bode plot of $P_r(s)$ in numerical example

3.7.2 H_∞ 制御理論を用いた低域通過逆システムによる外乱推定手法（従来手法）

本節では、比較対象として非最小位相系にも適用可能な文献¹⁷⁾の方法に基づき外乱を推定する方法を述べる．ここでは、図 3.2 のブロック線図を考え、 $\|\bar{W}(s)(P_r(s)\bar{G}(s) - 1)\|_\infty < 1$ となる $\bar{G}(s)$ を求める．このとき、 $\bar{G}(s)$ は H_∞ ノルム定義型低域通過逆システムと呼ばれる．ここで、 $\bar{W}(s)$ は重み関数であり、 $\bar{G}(s)$ に逆システムの特性を持たせたい帯域において大きなゲインを持つものを設定する． $\|\bar{W}(s)(P_r(s)\bar{G}(s) - 1)\|_\infty < 1$ を満たす $\bar{G}(s)$ は H_∞ 制御理論に基づいて設計することができる． $\bar{G}(s)$ を用いて、図 3.3 のシステムを構成することで、 $\bar{G}(s)$ が逆システムの特性を有している帯域では、外乱の推定値 $\hat{f}_r(t)$ を得ることができる．ここで、 $\tilde{P}_r(s)$ は真の制御対象であり、ここでは、 $\tilde{P}_r(s) = P_r(s)$ とする．

対象が非最小位相系の場合、任意の帯域で逆システムの特性を持たせることは難しい．ここでは検証のために、外乱は低周波数帯域および特定の帯域の周波数成分を有していると仮定し、 $\bar{G}(s)$ を設計する．今回、外乱の周波数は低周波数および 1 Hz 付近であると仮定する．そこで、重み関数は

$$\bar{W}(s) = K_1 G_1(s) \left(\frac{G_2(s)}{G_3(s)} \right)^2 \quad (3.21)$$

$$G_1(s) = \frac{\beta_1 s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + 2\alpha_1 \zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2} \quad (3.22)$$

$$G_i(s) = \frac{1}{T_i s + 1}, \quad i = 2, 3 \quad (3.23)$$

$$K_1 = 4 \cdot 10^4, \quad \omega_1 = 1 \cdot 2\pi, \quad \zeta_1 = 10, \quad \alpha_1 = 1 \times 10^{-4}, \quad \beta_1 = 20 \quad (3.24)$$

$$T_2 = \frac{1}{10^{-3} \cdot 2\pi}, \quad T_3 = \frac{1}{10 \cdot 2\pi} \quad (3.25)$$

と設定した．これは、低周波数帯域および 1 Hz において大きなゲインを持つ関数となっている．この重み関数に対して H_∞ 制御理論により $\bar{G}(s)$ を設計した．設計された $\bar{G}(s)$ 、設定した重み関数 $\bar{W}(s)$ 、および、制御対象の逆関数 $P_r^{-1}(s)$ のボード線図を図 3.4 に示す．破線が $\bar{G}(s)$ 、点線が $\bar{W}(s)$ 、実線が $P_r^{-1}(s)$ である．図 3.4 より、 $\bar{W}(s)$ が大きなゲインを持つ低周波数帯域および 1 Hz 付近では $\bar{G}(s)$ は逆システムの特性を有していることがわかる．よって、この帯域の外乱は図 3.3 のシステムを構成することにより推定可能であると考えられる．以降ではこの方法を従来手法とし、提案手法と比較検討する．

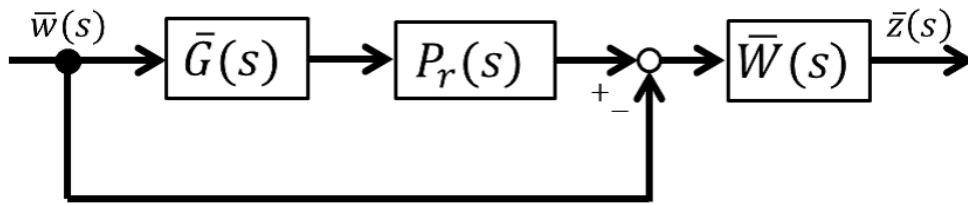


Fig. 3.2 Block diagram of filtered inverse system

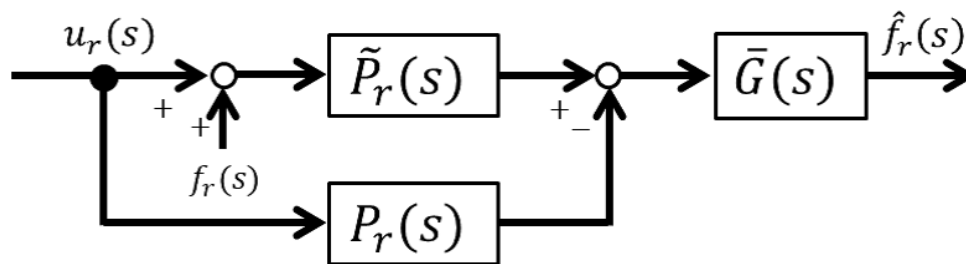


Fig. 3.3 Block diagram of estimation with $\bar{G}(s)$

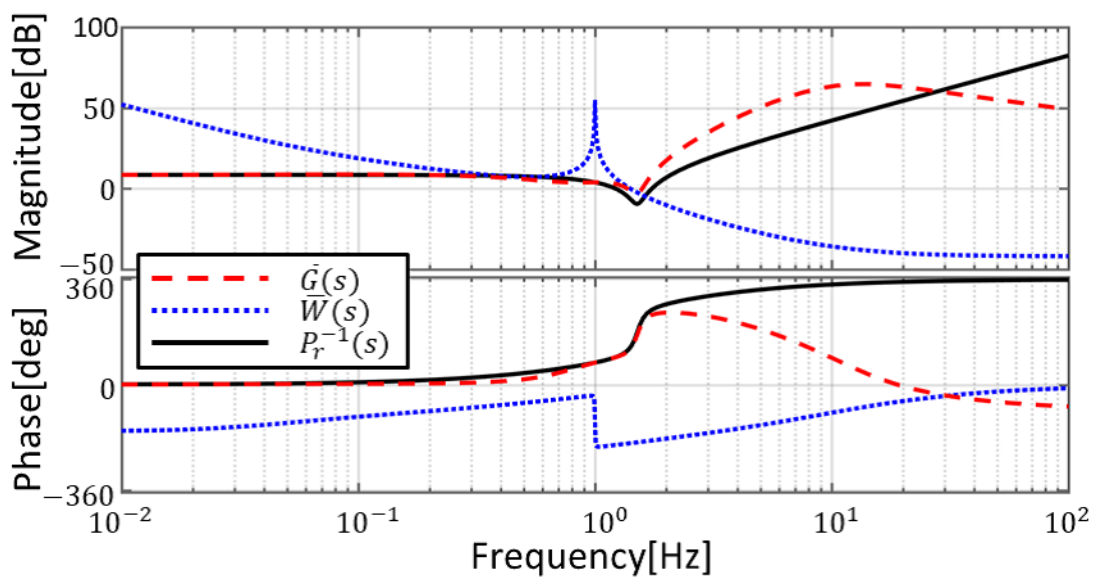


Fig. 3.4 Bode plots of $\bar{G}(s)$, $\bar{W}(s)$ and $P_r^{-1}(s)$

3.7.3 PFC の設計（提案手法：ステップ1）

ここでは、KYP 補題に基づく方法により PFC を設計し、推定性能を検証する。本章では外乱は低周波帯域および 1 Hz の周波数成分を有していると仮定している。そのため、以下の周波数における周波数応答マッチングを考える。

$$\omega_k = 2\pi f_k \quad (3.26)$$

$$f_k \in \{f_k \mid 1 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, \\ 5 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-1}, 1\} \quad (3.27)$$

これは低周波数帯域から 1 Hz までの周波数応答マッチングを意図して設定した。その他に設定したパラメータを以下に示す。

$$\alpha = 1, n_m = 5, m_m = 4 \quad (3.28)$$

$$P(s) = K_2 \frac{N(s)}{D(s)} = K_2 G_4(s) \left(\frac{G_5(s)}{G_6(s)} \right)^2 \quad (3.29)$$

$$G_4(s) = \frac{1}{T_4 s + 1}, G_i(s) = \frac{\omega_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2}, i = 5, 6 \quad (3.30)$$

$$K_2 = 5, T_4 = \frac{1}{10 \cdot 2\pi} \quad (3.31)$$

$$\zeta_5 = 0.1, \omega_5 = 1.5 \cdot 2\pi, \zeta_6 = 0.7, \omega_6 = 4 \cdot 2\pi \quad (3.32)$$

$$N_K = K_2 N(s) \quad (3.33)$$

$$\Phi(s) = \Phi_m(s) = D(s) \quad (3.34)$$

$$\Phi_a(s) = N_r(s)D(s) + N_K(s)D_r(s) \quad (3.35)$$

$P(s)$ は定理 3 の条件を満たす範囲でよい設計結果が得られるものを主に式 (3.30) のカットオフ周波数を変更し試行錯誤的に設定した。また、次節で導入するスライディングモードオブザーバを設計する際に、制御対象の相対次数が 1 である必要がある。そのため、拡大系の相対次数が 1 となるように PFC の相対次数を 1 と設定した。以上のパラメータの下で Step 1 と Step 2 を 50 回繰り返した。図 3.5 に繰り返しによる評価関数の推移を示す。図 3.5 より、繰り返しごとに評価関数が減少していることが確認できる。得られた解 $\mathbf{x} = [\mathbf{a}^T \mathbf{b}^T]$ を以下に示す。

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4.148 \cdot 10^4 \\ 1.082 \cdot 10^4 \\ 1.900 \cdot 10^3 \\ 2.219 \cdot 10^2 \\ 1.603 \cdot 10 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1.556 \cdot 10^4 \\ 2.761 \cdot 10^3 \\ 7.734 \cdot 10 \\ 3.397 \cdot 10 \\ 8.089 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

これにより式 (2.4) の $P_m(s)$ を構成した。 $P_m(s)$ のボード線図を図 3.6 に示す。点線が $P_m(s)$ 、実線が制御対象 $P_r(s)$ のボード線図である。図 3.6 よりおよそ 1 Hz まで $P_m(j\omega) \approx P_r(j\omega)$ が達成できている。

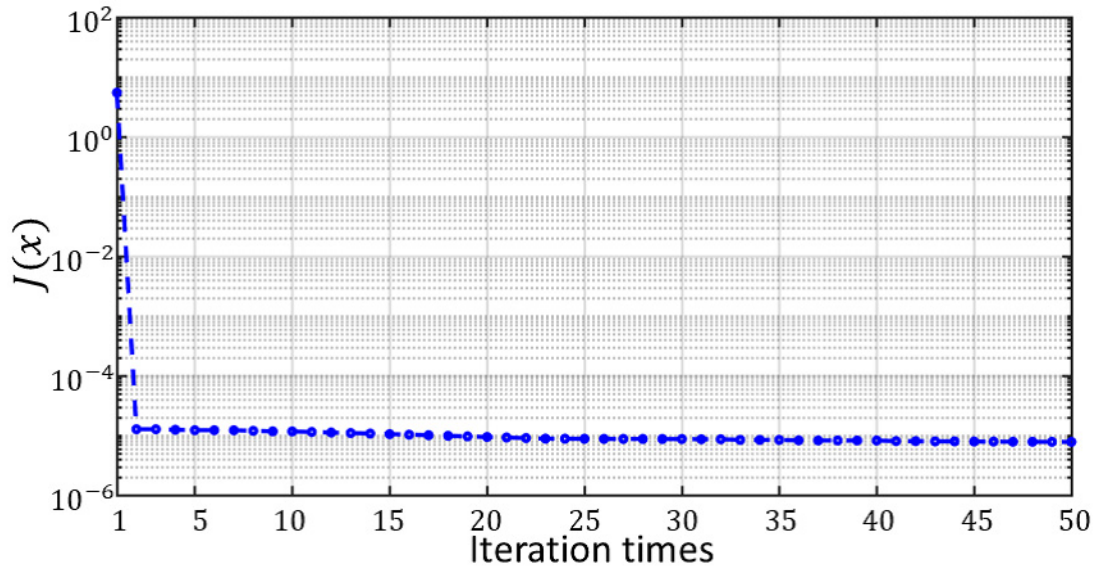


Fig. 3.5 Transition of $J(x)$

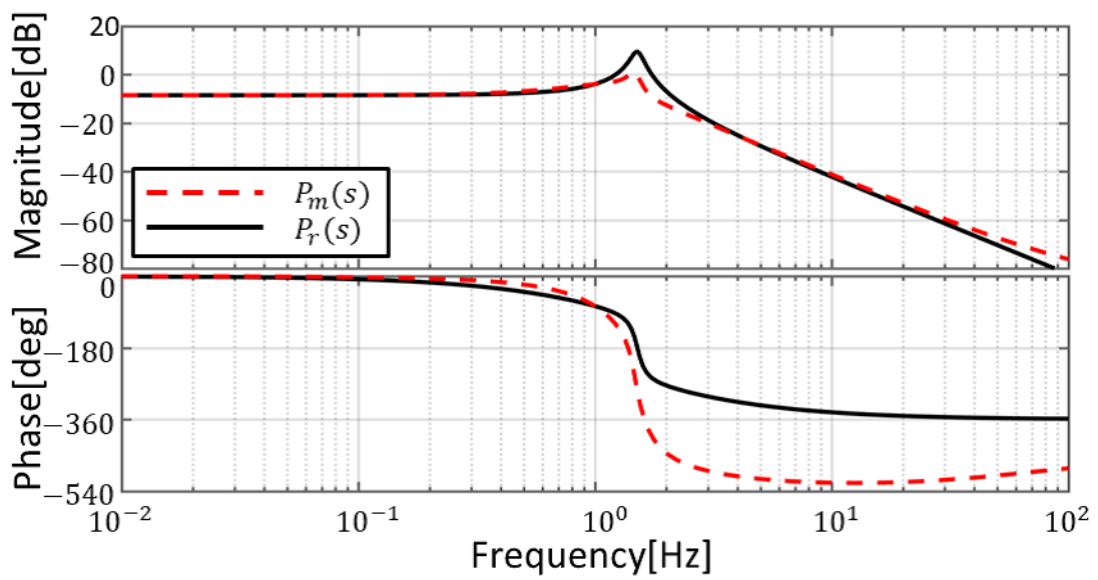


Fig. 3.6 Bode plots of $P_m(s)$ and $P_r(s)$

3.7.4 スライディングモードオブザーバによる外乱推定方法（提案手法：ステップ2）

本章では、最小位相系に対して適用可能な文献⁶⁾のスライディングモードオブザーバを設計し、PFCの有効性を検証する。文献⁶⁾の方法を簡単に述べる。まず、前提条件として制御対象は相対次数が1かつ最小位相系であるとする。3.7.1節の制御対象は非最小位相系であるが、PFCを用いることで最小位相化された拡大系 $G_a(s)$ に対して、スライディングモードオブザーバを適用する。拡大系は適切な座標変換 \mathbf{T} により以下の状態空間表現で表されているとする。

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{A}_{12}x_2(t) \quad (3.37)$$

$$\dot{x}_2(t) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1(t) + A_{22}x_2(t) + \mathbf{b}_2(u_a(t) + f_a(t)) \quad (3.38)$$

$$y_a(t) = x_2(t) \quad (3.39)$$

このとき、以下のシステムを考える。

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1(t) = \mathbf{A}_{11}\hat{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{A}_{12}\hat{x}_2(t) - \mathbf{A}_{12}e_y(t) \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2(t) &= \mathbf{A}_{21}\hat{\mathbf{x}}_1(t) + A_{22}\hat{x}_2(t) + b_2u_a(t) \\ &\quad - (A_{22} - A_{22}^s)e_y(t) + v(t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\hat{y}_a(t) = \hat{x}_2(t) \quad (3.42)$$

ここで、

$$e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t) \quad (3.43)$$

である。また、 A_{22}^s は安定な行列であり設計パラメータである。 $v(t)$ は

$$v(t) = \begin{cases} -\rho \|b_2\| \frac{P_2 e_y(t)}{\|P_2 e_y(t)\| + \delta} & \text{if } e_y \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.44)$$

である。ここで、 P_2 は A_{22}^s に対するリアプノフ行列であり、スカラー ρ は

$$\|f_a(t)\| < \rho \quad (3.45)$$

を満たすように選ばれる定数である。また、式(3.44)の δ は非常に小さい正定数である。このとき、外乱の推定値は

$$\hat{f}_a(t) \approx -\rho \frac{\|b_2\|}{b_2} \frac{P_2 e_y(t)}{\|P_2 e_y(t)\| + \delta} \quad (3.46)$$

と計算することができる。最終的には、もとの状態空間表現において、

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_a(t) = \mathbf{A}_a \hat{\mathbf{x}}_a(t) + \mathbf{b}_a u_a(t) - \mathbf{G}_l e_y(t) + \mathbf{G}_n v(t) \quad (3.47)$$

のオブザーバを構成すればよい。ここで、

$$\mathbf{G}_l = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} \\ A_{22} - A_{22}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_n = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

である。

上記の手順において、設計パラメータを

$$A_{22}^s = -100, \quad \delta = 10^{-7} \quad (3.49)$$

と設定した。 P_2 は $Q = 1$ とし A_{22}^s に対してリアプノフ方程式を解くことにより決定した。ここで、本論文では外乱の大きさがある程度正確に把握できているとする。ここでは、 $\|f_r(t)\| < 12$ ということがわかっているとする。このとき、式 (2.8) の関係および $\alpha = 1$ としているため、式 (3.45) の ρ は $\rho = 6$ とした。

3.7.5 時間応答による検証

外乱として

$$f_r(t) = u_s(t) + \sin(1 \cdot 2\pi \cdot t) \quad (3.50)$$

$$u_s(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 10, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

を印加し、時間応答により推定性能を検証する。ただし、入力 $u_r(t) = 0$ とする。ここで、式 (3.50) より外乱の大きさは $\|f_r(t)\| \leq 11$ である。図 3.7 の点線に外乱 $f_r(t)$ 、実線および破線に提案手法の推定値 $\hat{f}_r(t)$ および従来手法の推定値 $\hat{f}_r(t)$ の時間応答を示す。また、図 3.8 に推定誤差 $f_r(t) - \hat{f}_r(t)$ の時間応答を示す。実線および破線はそれぞれ提案手法の推定誤差および従来手法の推定誤差を表す。図 3.7 のシミュレーション開始の 1 s 間を見ると、どちらの手法も 1 Hz の外乱が推定できていることがわかる。一方、1 s 後にステップ外乱が印加された際に推定値が大きく振動している。これは、制御対象の非最小位相性による逆応答が原因であると考えられる。しかし、提案手法の推定値は第一振幅および第二振幅が従来手法と比べ抑えられていることがわかる。その結果、図 3.8 を見ると、第三振幅では誤差が大きくなってしまっているが、提案手法の方が推定誤差を大幅に低減できていることがわかる。これは、3.7.4 節において外乱の上限値 ρ を適切に設定できているため、推定値がその値より小さく抑えられているからである。このように、外乱の上限値をある程度正確に見積もることができれば、スライディングモードオブザーバを適用することで外乱推定性能を向上させられる場合がある。以上から、時間応答において提案手法により推定性能を向上できることが確認できた。

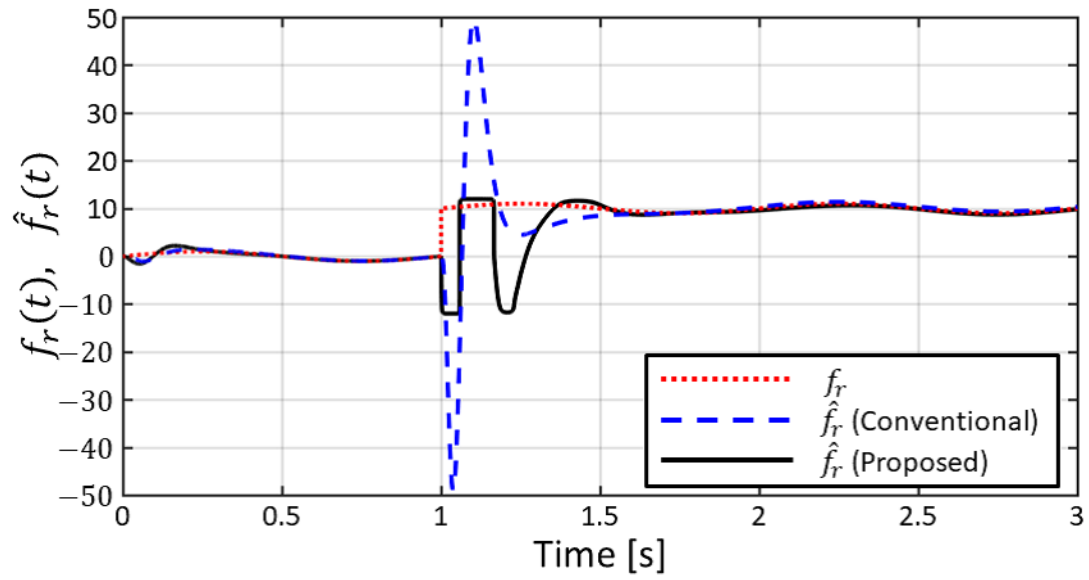


Fig. 3.7 Time responses of $f_r(t)$ and $\hat{f}_r(t)$: simulation

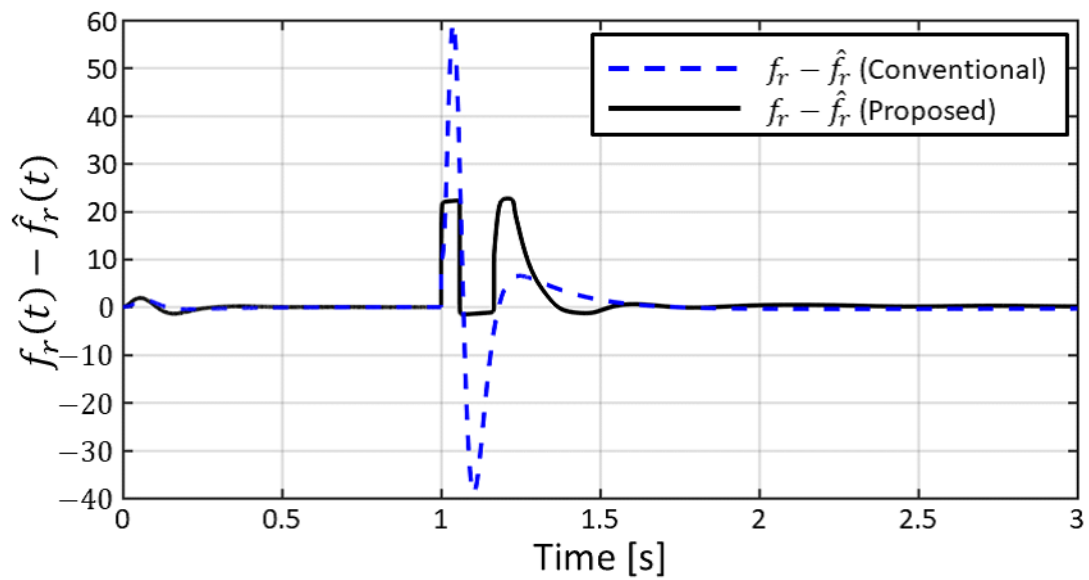


Fig. 3.8 Time responses of $f_r(t) - \hat{f}_r(t)$: simulation

3.8 まとめ

第3章ではPFCの設計問題をKYP補題を用いて凸最適化問題に定式化する方法を述べた。まず、制御対象とPFCの周波数応答誤差を表す評価関数を設計変数に関して凸な形式によって導入した。そして、拡大系の最小位相性およびPFCの安定性をKYP補題を用いて最適化問題の際の制約条件として用いる方法を述べた。そこでは、安定化したい多項式を分子多項式に持つ、安定でバイプロパーな伝達関数を導入した。そして、導入した伝達関数の最小位相性の条件をKYP補題を用いた強正実条件として表現することで、設計変数に関するLMI制約として書き表すことができる。ただし、このLMI制約は本来の設計要求を満足するための十分条件であることに注意する。ここで、導入した伝達関数の分母多項式は事前に与える必要があるが、その多項式の設定指針についても本論文では与えた。これにより、PFC設計問題をLMI表現の凸最適化問題に定式化し、システムティックな設計方法を構築することができた。また、制約の保守性を低減するための繰り返し計算法も述べた。第3章の方法では、多項式を設定する必要があるがPFCの次数を設計者が指定できるという利点がある。そして、数値例を用いた数値シミュレーションにより外乱推定性能の検証を行った。従来手法としては、文献¹⁷⁾の低域通過逆システムを用いた外乱推定手法を採用し、PFCを用いた提案手法としては最小位相性を条件とした文献⁶⁾のスライディングモードオブザーバを適用した。その結果、事前に外乱の上限値がおおよそ正確に見積もることができれば、提案手法のほうが推定値の振動を抑制できることを示した。

第4章 ディスクリプタシステムに基づく方法

4.1 はじめに

本章ではPFCの異なる設計方法として、ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いる方法を提案する。この方法では、事前に設定するものほどの周波数帯域において条件1 ($P_m(j\omega) \approx \alpha P_r(j\omega)$) を達成するかということを指定する重み関数のみであるため、必要とす設計パラメータが少ない利点のほか、より直感的な設計が可能となる。

ここで、条件1, 2について等価な表現を以下に与えておく。条件1は、次の条件と等価である。

条件1' 指定した帯域で可能な限り $P_r(j\omega) + P_m(j\omega) \approx (\alpha + 1)P_r(j\omega)$ を実現する。また、条件2は次の条件と等価である⁴⁵⁾。

条件2' $|M(s)| = 0$ の根の実部はすべて負である。

ここで、

$$M(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a - s\mathbf{I} & \mathbf{b}_a \\ \mathbf{c}_a & d_a \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

である。

本章では、まず、条件1'を満たすために $P_r(s) + P_m(s)$ と $(\alpha + 1)P_r(s)$ との誤差を評価する評価関数を H_∞ ノルムによって定義する。次に、評価入力から評価出力までの H_∞ ノルムが上述の評価関数と等価となるように、適切に一般化プラントを定義する。そして、 H_∞ 制御理論を用いてその H_∞ ノルムを最小化する $P_m(s)$ を設計する。その際、得られた $P_m(s)$ が閉ループ系を安定化させるという性質によって、拡大系が最小位相化されることを示す。これにより、条件2'を満たすことが保証される。最後に、 $P_m(s)$ の極が複素開右半平面に存在した場合、全域通過フィルタを導入して安定なPFCに変換することで条件3を満足するPFCを得る。

4.2 評価関数の導入

ここでは、条件1'を満たすために $P_r(s) + P_m(s)$ と $(\alpha + 1)P_r(s)$ の誤差を表す誤差伝達関数を定義し、その H_∞ ノルムを評価関数として定義する。誤差伝達関

数 $E_2(s)$ として

$$E_2(s) = W_2(s) \left(1 - \frac{(\alpha + 1)P_r(s)}{P_r(s) + P_m(s)} \right) \quad (4.2)$$

と定義し、その H_∞ ノルムを評価関数

$$J_2 = \|E_2(s)\|_\infty \quad (4.3)$$

と定義する¹。ここで、 $W_2(s)$ は

$$W_2(s) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_w(t) = \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w(t) + \mathbf{b}_w u_w(t) \\ y_w(t) = \mathbf{c}_w \mathbf{x}_w(t) + d_w u_w(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

で与える安定な重み関数である。式 (4.2) より、 $E_2(j\omega) \approx 0$ となる帯域では、 $P_r(j\omega) + P_m(j\omega) \approx (\alpha + 1)P_r(j\omega)$ が実現されることがわかる。そのため、 $P_r(j\omega) + P_m(j\omega) \approx (\alpha + 1)P_r(j\omega)$ を達成したい帯域で大きなゲインを持つように重み関数 $W_2(s)$ を設定し、 J_2 を最小化する $P_m(s)$ を求めることで、条件 1' を満たす PFC を得る。

¹式 (4.3) の評価関数が値を持つためには、 $E_2(s) \in RH_\infty$ である必要がある。これは、 $W_2(s)$ が安定である場合、拡大系 $G_a(s)$ が最小位相系であることと等しい。4.4 章で示す定理 5 より、PFC は拡大系が最小位相系となるように設計されるため、 $E_2(s) \in RH_\infty$ は満たされる。

4.3 H_∞ 制御理論による PFC の設計

本節では、式 (4.3) の J_2 を最小化する $P_m(s)$ を H_∞ 制御理論により設計する。まず、式 (4.2) は若干の変形により

$$E_2(s) = W_2(s) \frac{-\alpha + P_r^{-1}(s)P_m(s)}{1 + P_r^{-1}(s)P_m(s)} \quad (4.5)$$

と表すことができる。式 (4.5) の $E_2(s)$ は、図 4.1 において、評価入力 $w(s)$ から評価出力 $z(s)$ までの伝達関数 $G_{zw}(s)$

$$G_{zw}(s) = W_2(s) \frac{-\alpha + P_r^{-1}(s)P_m(s)}{1 + P_r^{-1}(s)P_m(s)} \quad (4.6)$$

と等しい。そこで、 $\|G_{zw}(s)\|_\infty$ を最小化する $P_m(s)$ を H_∞ 制御理論により設計することで条件 1' を考慮した PFC を得る。また、後に示すが $G_{zw}(s)$ を安定化する $P_m(s)$ は拡大系 $P_r(s) + P_m(s)$ を最小位相化することができるため、条件 2' を満たす解となる。

次に、 $\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma_2$ (γ_2 は定数) を満たす $P_m(s)$ を求める。いま、一般に制御対象の逆関数 $P_r^{-1}(s)$ は非プロパーとなるため、状態空間表現で表現することはできない。そこで、ディスクリプタ表現を導入する。制御対象の逆関数はディスクリプタ表現を用いると

$$P_r^{-1}(s) \begin{cases} \mathbf{E}_i \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{b}_i y_r(t) \\ u_r(t) = \mathbf{c}_i \mathbf{x}_i(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{b}_r \\ \mathbf{c}_r & d_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{x}_i(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r(t) \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

と表すことができる。次に、 H_∞ 制御理論を用いるために一般化プラントを求め、図 4.1 において、一般化プラントはディスクリプタ表現を用いると

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_1 w(t) + \mathbf{b}_2 u(t) \quad (4.8)$$

$$z(t) = \mathbf{c}_1 \mathbf{x}(t) \quad (4.9)$$

$$y(t) = \mathbf{c}_2 \mathbf{x}(t) \quad (4.10)$$

で与えられる。ここで、

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_w & (\alpha + 1)\mathbf{b}_w \mathbf{c}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix},$$

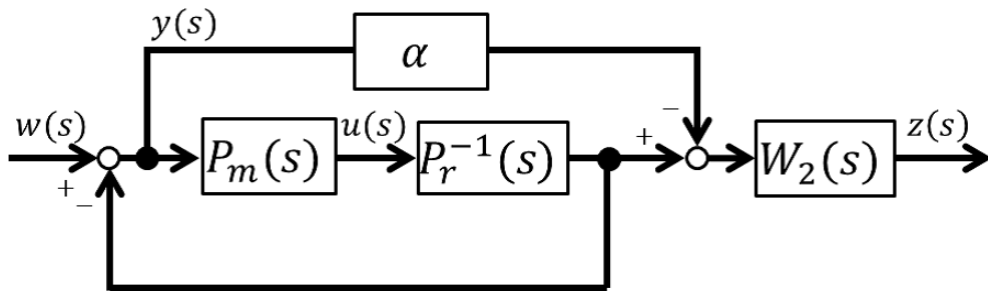


Fig. 4.1 Block diagram for design of $P_m(s)$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -\alpha \mathbf{b}_w \\ \mathbf{0} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_w(t) \\ \mathbf{x}_i(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_w & (\alpha + 1)d_w \mathbf{c}_i & -\alpha d_w & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{c}_i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である。このとき、 $G_{zw}(s)$ のディスクリプタ表現は

$$G_{zw}(s) \begin{cases} \mathbf{E}_c \dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{b}_c w(t) \\ z(t) = \mathbf{c}_c \mathbf{x}_c(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

で与えられる。ここで

$$\mathbf{E}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{b}_m \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_m & \mathbf{A} + \mathbf{b}_2 d_m \mathbf{c}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{x}_c(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix},$$

である。 $\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma_2$ (γ_2 は定数) とする解 $P_m(s)$ は文献³⁰⁾ で示されている以下の定理4により求めることができる。ここで、定理4で用いる行列を以下のように定義する。 $\mathbf{E}_R, \mathbf{E}_L \in \mathbb{R}^{n \times r}$ は列フルランクであり、 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_L \mathbf{E}_R^T$ を満たす行列とする。ただし、 n は \mathbf{E} の次元であり、 r は \mathbf{E} のランクである。さらに、 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ は列フルランクであり、これらの列ベクトルはそれぞれ $\text{Ker } \mathbf{E}^T$, $\text{Ker } \mathbf{E}$ の基底であるとする。 $\mathbf{E}_R, \mathbf{E}_L, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ は唯一ではないが、定理4はこれらの選び方に依存せず成り立つ³⁰⁾。

定理 4. ³⁰⁾ 変数行列 $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $J \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ を考える。ただし、 \mathbf{P}, \mathbf{Q} は $\mathbf{E}_R^T \mathbf{Q} \mathbf{E}_R$, $\mathbf{E}_L^T \mathbf{P} \mathbf{E}_L$ が対称行列になる行列であるとする。そして、これらの変数行列により以下の変数行列を定義する。

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} \mathbf{E} + \mathbf{U} \mathbf{R} \mathbf{V}^T, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Q} \mathbf{E}^T + \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{U}^T \quad (4.12)$$

このとき、式(4.11)の閉ループ系 $G_{zw}(s)$ を安定化し、かつ、ある与えられた正定数 γ_2 に対して $\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma_2$ とする式(2.5)のPFCが存在するための必要十分条件は、式(4.14)、式(4.15)のLMIを満たす解が存在し、かつ、その解から定義される

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{F} - \mathbf{g} \mathbf{c}_2 \mathbf{Y} - \mathbf{X}^T \mathbf{b}_2 \mathbf{h} - \mathbf{X}^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}_2 J \mathbf{c}_2) \mathbf{Y} \quad (4.13)$$

を用いた行列 $\mathbf{V}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{U}$ が正則行列となることである。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_R^T \mathbf{Q} \mathbf{E}_R & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{E}_L^T \mathbf{P} \mathbf{E}_L \end{bmatrix} > 0 \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{b}_2\mathbf{h} + \mathbf{h}^T\mathbf{b}_2^T \\ \mathbf{A}^T + \mathbf{c}_2^T\mathbf{J}^T\mathbf{b}_2^T + \mathbf{F} \\ \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{c}_1\mathbf{Y} \\ \mathbf{A} + \mathbf{b}_2\mathbf{J}\mathbf{c}_2 + \mathbf{F}^T & \mathbf{b}_1 & \mathbf{Y}^T\mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{X}^T\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{g}\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2^T\mathbf{g}^T & \mathbf{X}^T\mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{b}_1^T\mathbf{X} & -1 & 0 \\ \mathbf{c}_1 & 0 & -\gamma_2^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.15)$$

このとき、式(2.5)の係数行列は

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{W}_s^T \mathbf{E}_R^T \{ \Omega - \Omega \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \Omega \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \Omega \} \mathbf{E}_L \mathbf{Z}_s \quad (4.16)$$

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{W}_s^T \mathbf{E}_R^T \{ \mathbf{I} - \Omega \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \Omega \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \} (\mathbf{g} - \mathbf{X}^T \mathbf{b}_2 \mathbf{J}) \quad (4.17)$$

$$\mathbf{c}_m = (\mathbf{h} - \mathbf{J}\mathbf{c}_2\mathbf{Y}) \{ \mathbf{I} - \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \Omega \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T \Omega \} \mathbf{E}_L \mathbf{Z}_s \quad (4.18)$$

$$\mathbf{d}_m = \mathbf{J} - (\mathbf{h} - \mathbf{J}\mathbf{c}_2\mathbf{Y}) \mathbf{U} (\mathbf{V}^T \Omega \mathbf{U})^{-1} \mathbf{V}^T (\mathbf{g} - \mathbf{X}^T \mathbf{b}_2 \mathbf{J}) \quad (4.19)$$

で求められる。ただし、 $\mathbf{W}_s \in \mathbb{R}^{r \times r}$ は任意の正則行列であり、 $\mathbf{Z}_s \in \mathbb{R}^{r \times r}$ は

$$\mathbf{Z}_s = \{ \mathbf{E}_R^T (\mathbf{E}^T - \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{E} \mathbf{Q} \mathbf{E}^T) \mathbf{E}_L \}^{-1} \mathbf{W}_s^{-T} \quad (4.20)$$

である。

以上から、制御対象の逆関数 $P_r^{-1}(s)$ を考え、図4.1において $\|G_{zw}(s)\| < \gamma_2$ とする $P_m(s)$ を定理4により設計することで、 $P_m(s)$ は条件1'を満たすことができる。

4.4 拡大系の最小位相性

次に、条件2'に注目する。 $G_{zw}(s)$ を安定化する $P_m(s)$ に関して以下の定理が成り立つ。

定理5. 式(4.11)の $G_{zw}(s)$ を安定化する $P_m(s)$ は $G_a(s) = P_r(s) + P_m(s)$ を最小位相化する。つまり、式(4.1)の $\mathbf{M}(s)$ に関して、 $|\mathbf{M}(s)| = 0$ の根の実部はすべて負となる。

証明. $|\mathbf{M}(s)| = 0$ の根が式(4.11)の閉ループ系の極にすべて含まれていることを証明する。式(4.11)の閉ループ系の極は $|s\mathbf{E}_c - \mathbf{A}_c| = 0$ の根である。 $s\mathbf{E}_c - \mathbf{A}_c$ を

ブロック要素で表すと

$$s\mathbf{E}_c - \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_m & -\mathbf{b}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w & \mathbf{0} & -(\alpha + 1)\mathbf{b}_w & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_r & -\mathbf{b}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_m & \mathbf{0} & -\mathbf{c}_r & -(d_r + d_m) & d_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & d_m & -d_m & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

である．ここで，式 (4.21) のブロック行列において，第2列は $s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w$ 以外の要素が $\mathbf{0}$ ，第5行は1以外の要素が $\mathbf{0}$ ，第6列は1以外の要素が $\mathbf{0}$ であることに注目すると， $|s\mathbf{E}_c - \mathbf{A}_c| = 0$ の根と

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w| \cdot |\mathbf{N}(s)| = 0 \quad (4.22)$$

の根は一致する．ただし，

$$\mathbf{N}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_m & \mathbf{0} & \mathbf{b}_m \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_r & -\mathbf{b}_r \\ \mathbf{c}_m & -\mathbf{c}_r & -(d_r + d_m) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

と置いた．一方，正則な行列

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

を定義し， $\mathbf{M}(s)$ に対して \mathbf{T}_1 を左側から， \mathbf{T}_2 を右側からかけると $\mathbf{N}(s) = \mathbf{T}_1 \mathbf{M}(s) \mathbf{T}_2$ が成り立つことが確認できる．行列式に関して $|\mathbf{T}_1 \mathbf{M}(s) \mathbf{T}_2| = |\mathbf{T}_1| |\mathbf{M}(s)| |\mathbf{T}_2|$ が成り立つため， $|\mathbf{N}(s)| = 0$ の根と $|\mathbf{M}(s)| = 0$ の根は等しいことがわかる．以上より，閉ループ系の極に $|\mathbf{M}(s)| = 0$ の根，つまり，拡大系の零点がすべて含まれているため，定理4により設計したPFCは拡大系を最小位相化する。 ■

定理5より，式 (4.11) の $G_{zw}(s)$ を安定化する $P_m(s)$ は拡大系 $G_a(s)$ を最小位相化するため，条件 2' を満たす。

4.5 不安定なPFCに対する全域通過フィルタの設計

前節の方法で求めたPFCは安定になるとは限らない．そこでまず， $P_m(s)$ が安定かどうか判別する．安定であった場合はそのPFCを解として設計は終了する．

一方，不安定極が含まれる場合は以下の手順により PFC の不安定極を消去する．ただし，本論文では虚軸上に極は存在しないものとする．

まず，PFC の特性多項式 $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_m|$ を

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_m| = n_{m1}^-(s)n_{m2}^+(s) \quad (4.25)$$

と分解する． $n_{m1}^-(s)$ は安定多項式， $n_{m2}^+(s)$ は不安定多項式を意味する．次に，次式の全域通過フィルタを導入する．

$$G_{ap}(s) = \frac{n_{m2}^+(s)}{n_{m2}^-(s)} \quad (4.26)$$

ここで， $n_{m2}^-(s)$ は $n_{m2}^+(s)$ の根を虚軸対称として安定化した根を持つ安定多項式である． $G_{ap}(s)$ を用いて新たな PFC

$$\hat{P}_m(s) = G_{ap}(s)P_m(s) \quad (4.27)$$

$$= \frac{n_{m2}^+(s)}{n_{m2}^-(s)} \cdot \frac{\mathbf{c}_m \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_m)\mathbf{b}_m}{n_{m1}^-(s)n_{m2}^+(s)} \quad (4.28)$$

$$= \frac{\mathbf{c}_m \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_m)\mathbf{b}_m}{n_{m1}^-(s)n_{m2}^-(s)} \quad (4.29)$$

を定義する． $\hat{P}_m(s)$ には $P_m(s)$ の不安定極が含まれず，安定な多項式 $n_{m2}^-(s)$ に置き換わっている．そこで，図 4.2 に示すように拡大系 $G_a(s)$ 全体に $G_{ap}(s)$ をかけ，図 4.3 の新たな拡大系 $\hat{G}_a(s) = G_{ap}(s)P_r(s) + \hat{P}_m(s)$ を構成する．このとき，以下の命題が成り立つ．

命題 1. 拡大系 $\hat{G}_a(s) = G_{ap}(s)P_r(s) + \hat{P}_m(s)$ は最小位相系であり，評価関数 \hat{J}_2 ，

$$\hat{J}_2 = \left\| \hat{E}_2(s) \right\|_{\infty}, \quad (4.30)$$

$$\hat{E}_2(s) = W_2(s) \left(1 - \frac{G_{ap}(s)P_r(s)}{G_{ap}(s)P_r(s) + \hat{P}_m(s)} \right), \quad (4.31)$$

は，式 (4.3) の J_2 と一致する．

証明. $G_{ap}(s)$ の不安定な分子多項式 $n_{m2}^+(s)$ は式 (4.29) で示したように $P_m(s)$ の極と予め相殺されるため，拡大系 $\hat{G}_a(s) = G_{ap}(s)P_r(s) + \hat{P}_m(s)$ の最小位相性は保存される．また，式 (4.31) において， $\hat{P}_m(s) = G_{ap}(s)P_m(s)$ であることに注意すると， $E_2(s) = \hat{E}_2(s)$ であることがわかる．よって， $J_2 = \hat{J}_2$ が成り立つ． ■

この命題から， $G_{ap}(s)$ の導入においては，条件 2' を保証しつつ条件 1' の性能を劣化させることなく安定な PFC に変換することができる．以上から，図 4.3 のシステムを構成し， $\hat{G}_a(s) = G_{ap}(s)P_r(s) + \hat{P}_m(s)$ に対して外乱推定を行うことで不

安定な $P_m(s)$ への対応が可能となる。図 4.3 では、本来の制御対象の出力を $G_{ap}(s)$ によりフィルタリングした信号を外乱推定に用いている。しかし、外乱推定オブザーバは $G_{ap}(s)$ を含めた $\hat{G}_a(s)$ に対して設計するため、 $G_{ap}(s)$ の位相遅れが生じる帯域においても、式 (4.31) の誤差の範囲で外乱推定器として機能することができる。

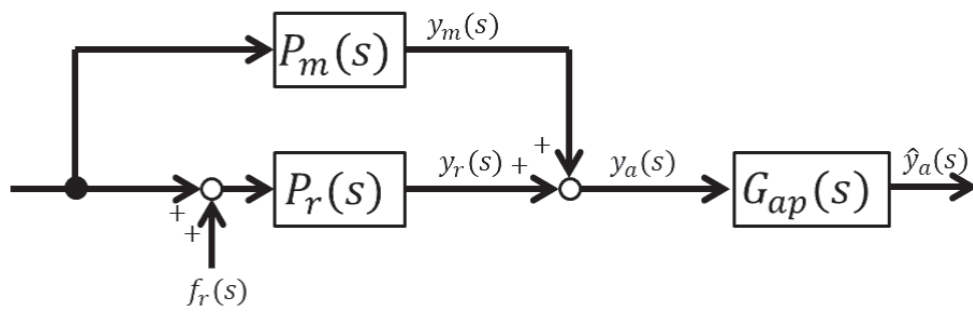


Fig. 4.2 Augmented system $G_a(s)$ with $G_{ap}(s)$

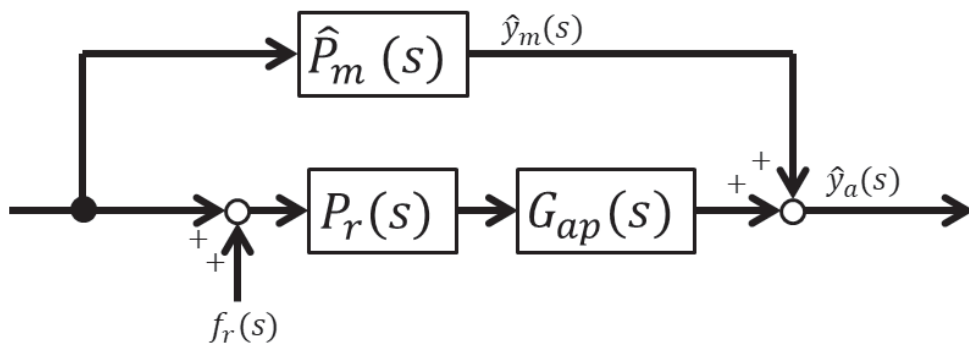


Fig. 4.3 Modified augmented system $\hat{G}_a(s)$

4.6 PFC の設計手順

PFC の設計手順を以下にまとめる.

Step 1 外乱を推定したい帯域で大きなゲインを持つ式 (4.4) の重み関数 $W_2(s)$ を設定する. 条件 1' の定数 $\alpha \geq 0$ を指定する.

Step 2 γ_2 を指定し, 式 (4.14), 式 (4.15) を解く. そして, 得られた解を用いて式 (4.16) から式 (4.19) により $P_m(s)$ を得る.

Step 3 Step 2 で求めた $P_m(s)$ の極を調べ, 安定ならば終了. 不安定ならば, 式 (4.26) の全域通過フィルタ $G_{ap}(s)$ を設定し, 式 (4.29) の $\hat{P}_m(s)$ を得る. そして, 図 4.3 のシステムを構成する.

4.7 モデルプラントによる推定性能の検証

4.7.1 制御対象

3.7.1 節で定義した制御対象と同一のものを対象とする. つまり, 式 (2.2) において, 以下の係数行列を持つ制御対象を考える.

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -800 & -100 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_r = [10 \quad -1 \quad 0], \quad d_r = 0$$

4.7.2 PFC の設計 (提案手法: ステップ 1)

3.7.3 節と同様に低周波数帯域および 1 Hz での推定が可能となる PFC の設計を目指す. そこで, 重み関数を

$$W_2(s) = \bar{W}(s) \tag{4.32}$$

と設定する. これは, 3.7.2 節の従来手法で設定した重み関数である. また, $\alpha = 0$ とした. $\alpha = 0$ とした場合, PFC のゲインが小さい帯域において条件 1' が成り立つ. 次に, $\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_L = [\mathbf{I}_{7 \times 7} \quad \mathbf{0}_{7 \times 3}]^T$, $\mathbf{U} = \mathbf{V} = [\mathbf{0}_{3 \times 7} \quad \mathbf{I}_{3 \times 3}]^T$ と設定し, $\gamma_2 = 1$ と与え, 式 (4.14), 式 (4.15) の LMI を解いた. そして, 式 (4.16) から式 (4.19) により $P_m(s)$ を得た. ただし, $\mathbf{W}_s = \mathbf{I}$ とし, \mathbf{Z}_s は式 (4.20) により求めた. また, 状態空間表現を平衡実現に変換することで数値的に扱いやすい表現となるため⁴⁶⁾, 得られた $P_m(s)$ の状態空間表現を MATLAB のコマンド “balreal” により平衡実現に変換した. 得られた $P_m(s)$, 重み関数 $W_2(s)$, そして制御対象 $P_r(s)$ のボード線図

を図 4.4 に示す。破線が $P_m(s)$ ，点線が重み関数 $W_2(s)$ ，実線が制御対象 $P_r(s)$ である。図 4.4 より，低周波帯域及び 1 Hz における PFC のゲインが小さいことがわかる。また，表 4.1 に拡大系 $G_a(s) = P_r(s) + P_m(s)$ の零点および $P_m(s)$ の極を示す。表 4.1 より，拡大系の零点は安定零点であり最小位相性を有していることがわかる。また，PFC の極も安定である。

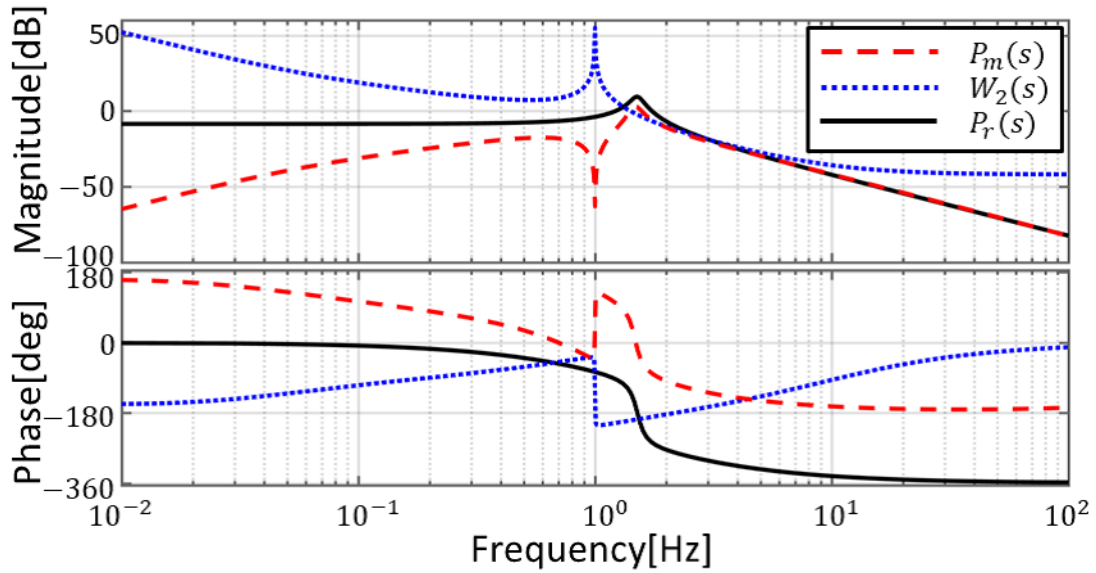


Fig. 4.4 Bode plots of $P_m(s)$, $W_2(s)$ and $P_r(s)$

Table 4.1 Zeros of $G_a(s)$ and poles of $P_m(s)$

Zeros of $G_a(s)$	Poles of $P_m(s)$
$-908.2 \pm j1134$	$-1.103 \cdot 10^4$
$-68.50 \pm j15.43$	$-0.5078 \pm j9.269$
$-21.13 \pm j3.734$	-7.842
$-0.4179 \pm j9.145$	$-3.732 \pm j4.825$
-3.916	-0.3379
-0.3550	

4.7.3 スライディングモードオブザーバによる外乱推定方法（提案手法：ステップ2）

まず，文献⁶⁾のスライディングモードオブザーバでは相対次数が1の対象に限定して設計している．本章で設計したPFC， $P_m(s)$ ，は直達項をもつため拡大系は直達項を持つ．文献⁶⁾の方法をそのまま適用できるようにするために，以下の一次のローパスフィルタ

$$G_{lp}(s) = \frac{1}{T_{lp}s + 1}, \quad T_{lp} = \frac{1}{50 \cdot 2\pi} \quad (4.33)$$

をかけた拡大系 $\bar{G}_a(s) = G_{lp}(s)G_a(s)$ に対してスライディングモードオブザーバを設計する． $G_{lp}(s)$ は今回考えている外乱の周波数帯域に影響を与えないようにカットオフ周波数を 50 Hz とした．

また，3.7.4 節における設計パラメータを

$$A_{22}^s = -100, \quad \delta = 10^{-7} \quad (4.34)$$

と設定した． P_2 は $Q = 1$ とし A_{22}^s に対してリアプノフ方程式を解くことにより決定した．また，式 (3.45) の ρ は $\rho = 12$ とした．

4.7.4 時間応答による検証

外乱として 3.7.5 節と同一のものを印加する．つまり，

$$f_r(t) = u_s(t) + \sin(1 \cdot 2\pi \cdot t) \quad (4.35)$$

$$u_s(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 10, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

を印加し，時間応答により推定性能を検証する．ただし，入力 $u_r(t) = 0$ とする．また，比較対象の従来手法は 3.7.2 節において設計した低域通過逆システムにより外乱推定する手法を意味する．図 4.5 の点線に外乱 $f_r(t)$ ，実線および破線に提案手法の推定値 $\hat{f}_r(t)$ および従来手法の推定値 $\hat{f}_r(t)$ の時間応答を示す．また，図 4.6 に推定誤差 $f_r(t) - \hat{f}_r(t)$ の時間応答を示す．実線および破線はそれぞれ提案手法の推定誤差および従来手法の推定誤差を表す．図 4.5 のシミュレーション開始の 1 s 間を見ると，どちらの手法も 1 Hz の外乱が推定できていることがわかる．一方，1 s 後にステップ外乱が印加された際に推定値が大きく振動している．しかし，提案手法の推定値は第一振幅および第二振幅が従来手法と比べ抑えられていることがわかる．その結果，図 4.6 を見ると，提案手法の方が推定誤差を大幅に低減できている．これも前章と同様に，4.7.3 節において外乱の上限値 ρ を適切に設定できているからである．以上から，時間応答において提案手法により推定性能を向上できることが確認できた．

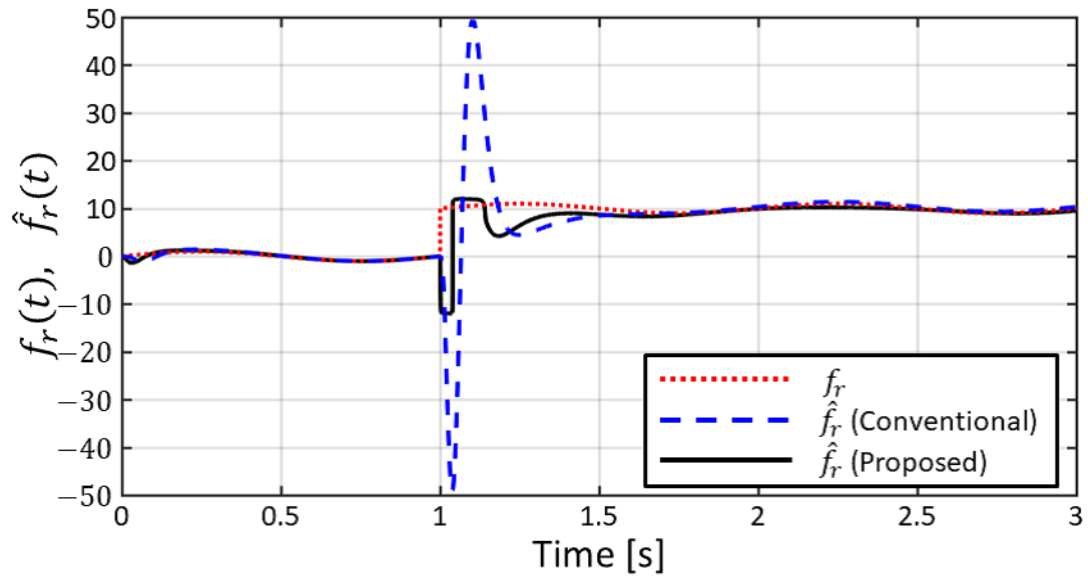


Fig. 4.5 Time responses of $f_r(t)$ and $\hat{f}_r(t)$: simulation

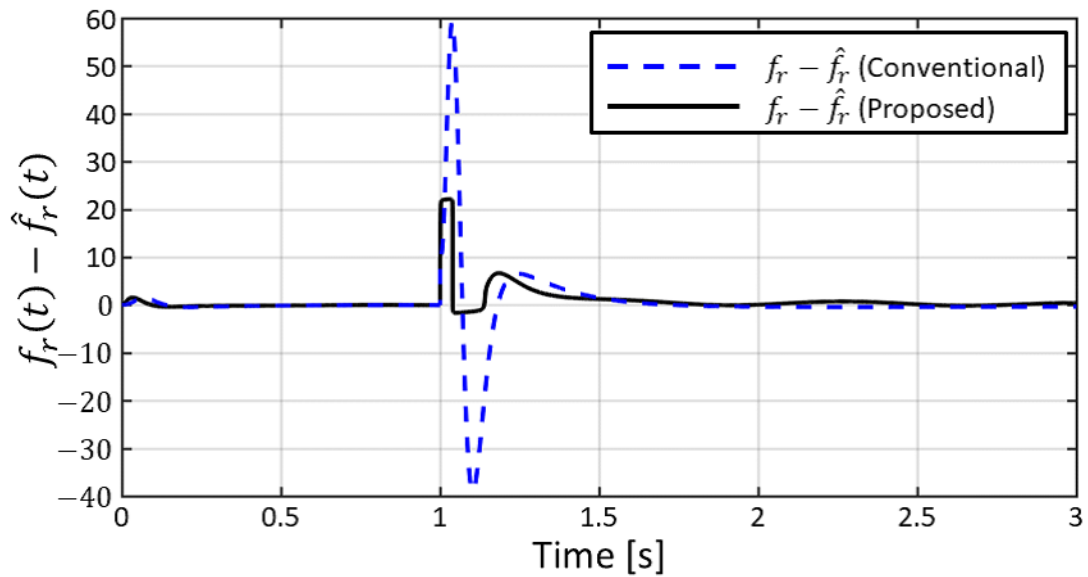


Fig. 4.6 Time responses of $f_r(t) - \hat{f}_r(t)$: simulation

4.8 まとめ

第4章ではPFCの設計問題をディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いて凸最適化問題に定式化する方法を述べた。この方法では制御対象の逆関数に注目し、閉ループ系を安定化するプロパーな制御器をPFCとして設計する。このとき、制御対象の逆関数は一般に非プロパーとなるため、ディスクリプタ表現を導入した。そして、ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いることでPFCを設計し、設計されたPFCが拡大系を最小位相化することを証明した。そして、PFCが安定か否かを判別し、不安定であった場合は全域通過フィルタを導入することで安定なPFCに変換する方法を述べた。この方法では H_∞ 制御理論を用いるため、PFCの次数は高次になる傾向があるが、設定するパラメータは周波数重み関数だけであり、直感的に設計することができるという利点がある。この章においても数値シミュレーションによりPFCを導入することによって推定性能が向上できることを確認した。

第5章 各手法の制約条件の関係性

5.1 はじめに

ここでは、3章、4章の各手法の関係性について考察する。具体的には、拡大系の最小位相性を保証する条件について考察する。4章の“ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づく方法”では、拡大系の最小位相性を保証した最適化問題を解き、その後、求めたPFCが不安定であった場合に安定なPFCに変換している。一方で、3章の“KYP補題に基づく方法”では、拡大系の最小位相性とPFCの安定性を同時に保証した最適化問題を解いている。ここでは、簡単のために拡大系を保証するための条件に限定し考察する。つまり、3章の“KYP補題に基づく方法”において、拡大系の最小位相性のみを保証した最適化問題を解く場合を考える。この場合、PFCの安定性は保証されないが、求めたPFCが不安定であった場合、4章で示した方法により安定なPFCに変換することができる。

5.2 拡大系の最小位相性を保証する条件の関係性

KYP補題を用いて拡大系の最小位相性を保証する場合、

$$\bar{G}_a(s) = \frac{N_r(s)D_m(s) + N_m(s)D_r(s)}{\Phi_a(s)} \quad (5.1)$$

の強正実性を保証することにより、間接的に拡大系の最小位相性を保証している。強正実とは、 $\bar{G}_a(s)$ が安定である場合、

$$\bar{G}_a(j\omega) + \bar{G}_a(j\omega)^* \geq 0 \quad (\forall \omega \in \mathbb{R}) \quad (5.2)$$

が成り立つことである⁴²⁾。ここで、式(5.2)より、 $\Phi_a(s)$ によって式(5.1)が強正実となる設計パラメータの範囲が異なることがわかる。つまり、 $\bar{G}_a(s)$ が強正実となる設計パラメータの集合を χ とすると、 χ は $\Phi_a(s)$ によって決まるため $\chi(\Phi_a)$ と書ける。

ここで、重み関数 $W_2(s)$ を指定したときの4章の“ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づく方法”により求めたPFCを

$$P_m^\infty(s) = \frac{N_m^\infty(s)}{D_m^\infty(s)} \quad (5.3)$$

$$= \frac{b_m^\infty s^{m_m} + b_{m-1}^\infty s^{m_m-1} \dots + b_0^\infty}{s^{n_m} + a_{n_m-1}^\infty s^{n_m-1} + \dots + a_0^\infty} \quad (5.4)$$

とし、この解 $\mathbf{x}^\infty = [\mathbf{a}^{\infty T} \ \mathbf{b}^{\infty T}]$, $\mathbf{a} = [a_0^\infty, \dots, a_{n_m-1}^\infty]^T$, $\mathbf{b} = [b_0^\infty, \dots, b_{m_m}^\infty]$ を用いて、

$$\Phi_a^\infty(s) = N_r(s)D_m^\infty(s) + N_m^\infty(s)D_r(s) \quad (5.5)$$

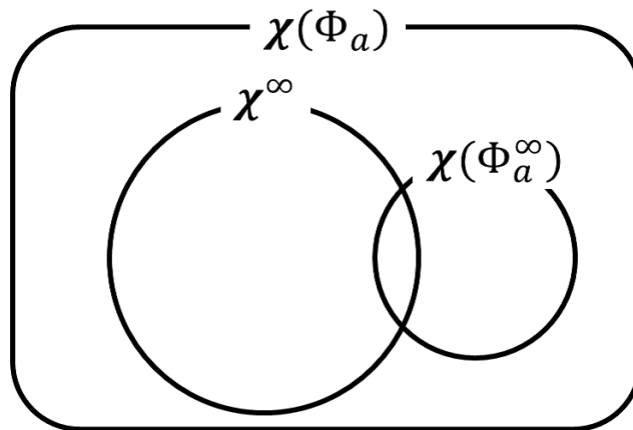
と定義する。このとき、 $\mathbf{x}^\infty \in \chi(\Phi_a^\infty)$ であることがわかる。なぜなら、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\infty$, かつ、 $\Phi_a(s)$ が式 (5.5) で与えられているとき、 $\bar{G}_a(s) = 1$ となり強正実となるからである。つまり、設定する多項式 $\Phi_a(s)$ の選択によっては、“ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づく方法” の最適解を制約条件の中にも含めることができる。

また、“KYP 補題に基づく方法” では PFC の次数を指定することができる。そのため、低次の PFC を指定できる一方で、高次の PFC を指定することで求める解の集合を広げることができると考えられる。

以上の関係を表した図を図 5.1 に示す。ここで、 χ^∞ は“ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づく方法”において重み関数 $W_2(s)$ を指定したときの制約条件の解の集合を意味する。図 5.1 より、“KYP 補題に基づく方法”は多項式 $\Phi_a(s)$ の設定次第で“ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づく方法”では考慮できない範囲で設計パラメータを探索することができる。ただし、 $\bar{G}_a(s)$ の強正実性を保証する方法は拡大系が最小位相となるための十分条件であるため、ある特定の多項式 $\Phi_a(s)$ を指定した際の解の集合の範囲は、必要十分条件である“ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づく方法”の解の集合 χ^∞ よりも狭いと考えられる。また、多項式を適切に設定することは一般に難しい場合が多く、“ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づく方法”の方がシステムティックな設計が可能であると考えられる。

5.3 まとめ

第5章では第3章および第4章の各手法における拡大系の最小位相性を保証する制約条件の関係を考察した。第3章の KYP 補題を用いる方法の方が PFC の次数を任意に設定でき、さらに、多項式の設定の自由度があるため、第4章のディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いる方法では考慮できない範囲の設計パラメータを探索できることを示した。ただし、一般に KYP 補題の制約条件に用いる多項式を適切に設定することは難しい場合が多い。そのため、高次の PFC を許容できるのであれば、ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づく方法の方がシステムティックに PFC が得られると考えられる。

Fig. 5.1 Sets of $\chi(\Phi_a)$, χ^∞ and $\chi(\Phi_a^\infty)$

第6章 実機実験による検証

6.1 はじめに

この章では、実験機に対して3章、4章の方法を用いてPFCを設計し、実機実験により外乱推定性能の検証をする。実験機に対して外乱推定器を設計することで実応用の観点から有用性を示すことができる。外乱推定手法としては、非最小位相系に対しても適用可能な文献⁴⁷⁾のLuenberger observerに基づく外乱推定オブザーバを用いる。文献⁴⁷⁾の外乱推定オブザーバを用いる理由は、設計が容易であり、かつ、重み行列により外乱推定性能のハイゲイン化などが容易に行えるからである。文献⁴⁷⁾の外乱推定オブザーバをそのまま適用する方法とPFC導入による最小位相化された拡大系に対して文献⁴⁷⁾の外乱推定オブザーバを適用した方法の推定性能を比較する。

6.2 Luenberger observerに基づく外乱推定手法

ここでは、文献⁴⁷⁾のLuenberger observerに基づく外乱推定方法を述べる。外乱 $f_r(t)$ の発生システムとして

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{w}}(t) = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{w}(t) \\ f_r(t) = \boldsymbol{h}\boldsymbol{w}(t) \end{cases} \quad (6.1)$$

を考える。ここで、 $\boldsymbol{w}(t)$ は外乱を表す状態変数である。本章では、外乱は一定であると仮定し外乱オブザーバを設計する。つまり、 $\boldsymbol{\Gamma} = 0$ 、 $\boldsymbol{h} = 1$ として外乱オブザーバを設計する。このとき、式(2.2)の制御対象は

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \tilde{\boldsymbol{b}}u_r(t) \\ y_r(t) = \tilde{\boldsymbol{c}}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \tilde{d}u_r(t) \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_r & \boldsymbol{b}_r \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_r \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_r(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_r & d_r \end{bmatrix}, \tilde{d} = d_r \quad (6.4)$$

と表せる。式(6.2)に対して同次元オブザーバを設計し、外乱 $\hat{f}_r(t)$ を推定する。その際、 $\tilde{d} \neq 0$ の場合は、新たに $\tilde{y}(t) = y_r(t) - \tilde{d}u_r(t)$ を出力とすることで直達項

のない制御対象として扱うことができる。以下に外乱オブザーバの状態方程式を示す。

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = (\tilde{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{l}\tilde{\boldsymbol{c}})\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{l}\tilde{y}(t) + \tilde{\boldsymbol{b}}u_r(t) \\ \hat{f}_r(t) = \hat{\boldsymbol{c}}\hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

ここで、 \boldsymbol{l} はオブザーバゲインである。本論文では、重み \boldsymbol{Q} , r を設定し、最適レギュレータの双対問題を解くことによりオブザーバゲイン \boldsymbol{l} を設計する。

6.3 拡大系に対する外乱推定器設計

文献⁴⁷⁾の方法に基づく拡大系に対する外乱オブザーバの設計方法を述べる。まず、6.2節において、制御対象 $P_r(s)$ を拡大系 $G_a(s)$ に置き換えることで同様にオブザーバゲインを設計する。そして、式(6.5)として

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_a(t) = (\tilde{\boldsymbol{A}}_a - \boldsymbol{l}_a\tilde{\boldsymbol{c}}_a)\hat{\boldsymbol{x}}_a(t) + \boldsymbol{l}_a\tilde{y}_a(t) + \tilde{\boldsymbol{b}}_au_a(t) \\ \hat{f}_a(t) = \hat{\boldsymbol{c}}_a\hat{\boldsymbol{x}}_a(t) \\ \hat{f}_r(t) = (\alpha + 1)\hat{f}_a(t) \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\hat{\boldsymbol{c}}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

とすることで、制御対象に対する外乱推定値 $\hat{f}_r(t)$ を推定することができる。ここで、

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_a & \boldsymbol{b}_a \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{c}}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_a & d_a \end{bmatrix}, \quad \tilde{d}_a = d_a \quad (6.9)$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_a(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_a(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{y}_a(t) = y_a(t) - \tilde{d}_au_a(t) \quad (6.10)$$

であり、 \boldsymbol{l}_a はオブザーバゲインである。

6.4 制御対象

提案手法の外乱推定性能を実験システムにより検証する。制御対象は図6.1、図6.2に示す三慣性軸ねじり振動系である。この振動系はイナーシャおよび板ばねで構成され、ACサーボモータで駆動される。また、同軸上に3つのエンコーダが取り付けられ、3つのイナーシャの回転角度を観測量として計測している。式(6.11)に制御対象の運動方程式を、表6.1に各種パラメータを示す。式(6.11)より求めた制御対象の伝達関数 $P_r(s)$ を式(6.12)に示す。ここで、対象が非最小位相系

となる様に $P_r(s)$ を設定するため、制御対象の出力は便宜的に設定している。すなわち、制御対象が不安定な零点を持つ非最小位相系となるように観測量は回転角度 $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ とその微分値 $\dot{\theta}_1(t)$, $\dot{\theta}_2(t)$ を用いて式 (6.12) のように設定した。一方、操作量はサーボモータのトルク $u_r(t)$ である。制御対象の周波数応答を図 6.3 に示す。

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1(t) &= -K_1(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - C_1\dot{\theta}_1(t) + u_r(t) \\ J_2\ddot{\theta}_2(t) &= K_1(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - K_2(\theta_2(t) - \theta_3(t)) - C_2\dot{\theta}_2(t) \\ J_3\ddot{\theta}_3(t) &= K_2(\theta_2(t) - \theta_3(t)) - C_3\dot{\theta}_3(t) \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} P_r(s) &= \frac{(1 + 0.5s)\theta_1(s) + (2 - s)\theta_2(s)}{U(s)} \\ &= \frac{(1 + 0.5s)(A_2A_3 - K_2^2) + (2 - s)K_1A_3}{A_1(A_2A_3 - K_2^2) - K_1^2A_3} \\ &=: \frac{\bar{N}_r(s)}{s\bar{D}_r(s)} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\bar{N}_r(s) := 67.93(s + 25.34)(s - 11.81)(s - 8.446)(s^2 + 1.201s + 2284)$$

$$\bar{D}_r(s) := (s + 2.07)(s^2 + 1.993s + 987.4)(s^2 + 2.126s + 3198)$$

$$\begin{cases} A_1 &= J_1s^2 + C_1s + K_1 \\ A_2 &= J_2s^2 + C_2s + K_1 + K_2 \\ A_3 &= J_3s^2 + C_3s + K_2 \end{cases}$$

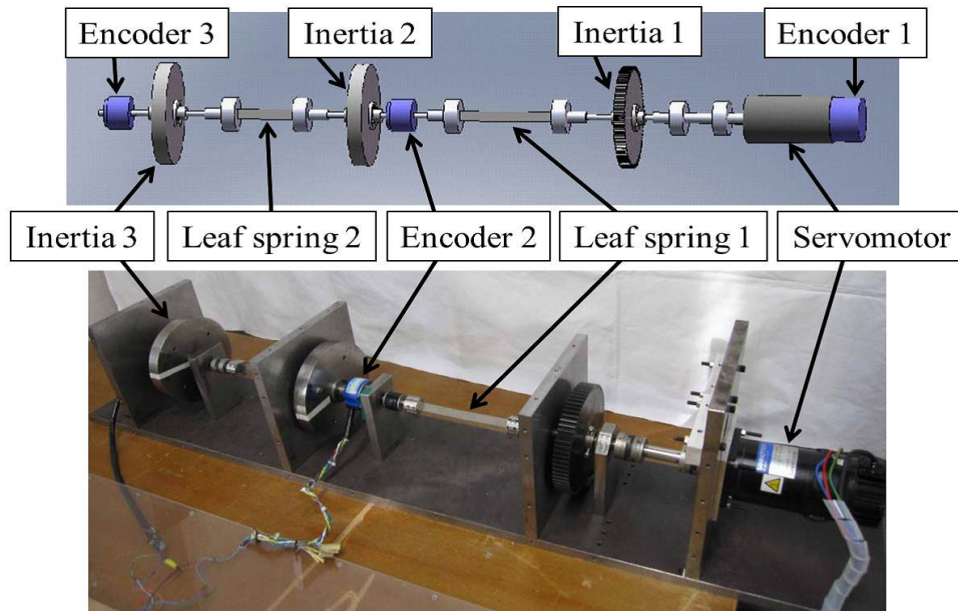


Fig. 6.1 View of the experimental system

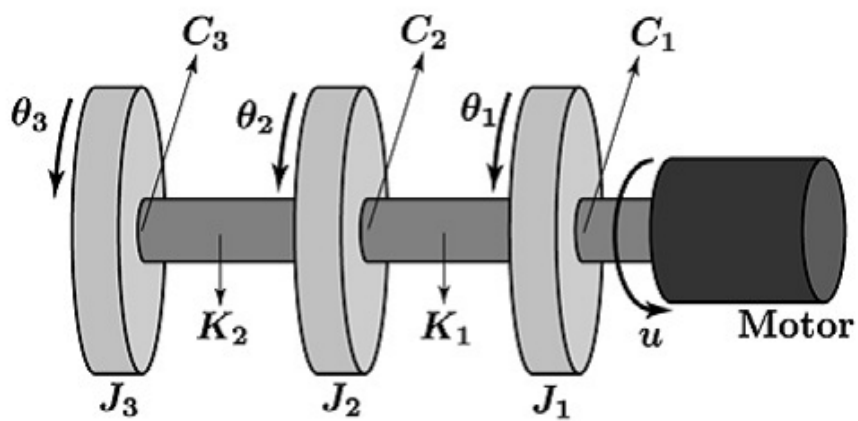
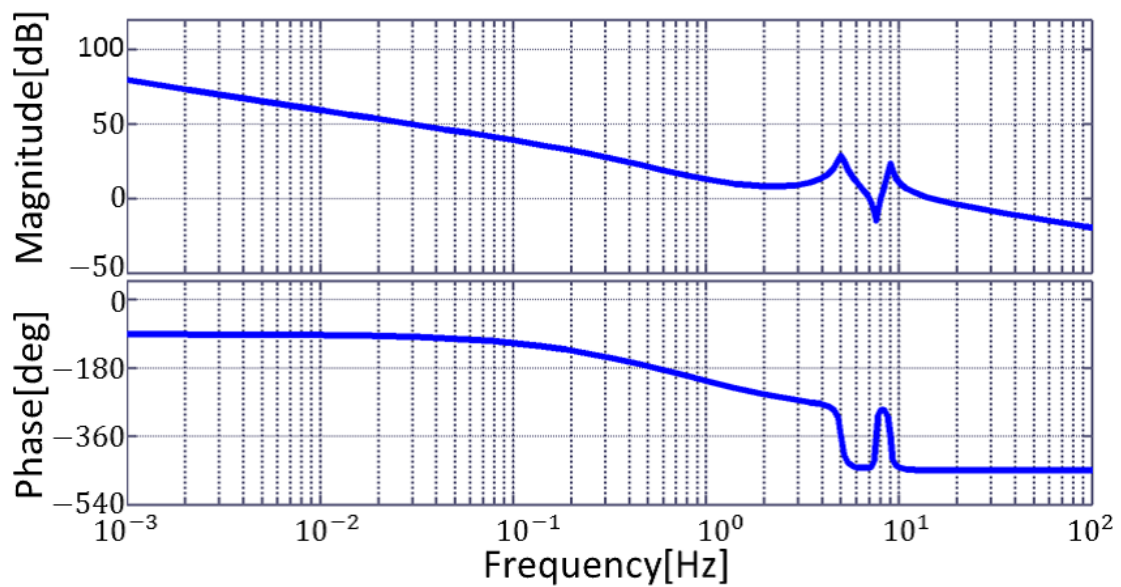


Fig. 6.2 Experimental system

Table 6.1 Parameters of the experimental model

	Description	Values	Units
J_1	Inertia	7.36×10^{-3}	[kgm ²]
J_2	Inertia	8.40×10^{-3}	[kgm ²]
J_3	Inertia	8.40×10^{-3}	[kgm ²]
K_1	Constant of twisted spring	6.21	[Nm/rad]
K_2	Constant of twisted spring	10.93	[Nm/rad]
C_1	Friction of bearing	0.014	[Nms/rad]
C_2	Friction of bearing	0.018	[Nms/rad]
C_3	Friction of bearing	0.018	[Nms/rad]

Fig. 6.3 Bode plot of $P_r(s)$

6.5 従来手法の外乱推定器設計

まず、式 (6.12) の制御対象に対する従来の外乱推定器を設計し、その性能を検証する。設定した重み行列を以下に示す。

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_c := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 10^3 \end{bmatrix}, \quad r = r_c := 1 \quad (6.13)$$

オブザーバゲインは

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 95.32 & 95.71 & 94.73 & 392.7 & 378.5 & 379.2 & 31.62 \end{bmatrix}^T \quad (6.14)$$

となった。ハイゲイン化すれば推定帯域を広げることができるが、モデル化誤差やセンサーノイズに敏感になる。そこで、広い帯域で推定可能となるように考えつつ、実験においてモデル化誤差の影響が顕著に現れない程度にトレードオフをとりながら試行錯誤的に重みを設定した。外乱 $f_r(t)$ から推定誤差 $f_r(t) - \hat{f}_r(t)$ までのゲイン特性を図 6.4 に示す。図 6.4 のゲインが小さい帯域の外乱ほど、推定性能が高いことを意味している。図 6.4 から、0.3 Hz までの外乱と 4 Hz~5 Hz 付近の外乱は推定できるが 0.3 Hz~3 Hz の帯域においては外乱の推定性能が悪いことがわかる。この帯域は不安定零点による位相遅れが顕著な帯域であり、オブザーバゲインをハイゲイン化しても推定性能を向上させることはできなかった。これは、一般に外乱推定器は制御対象の逆関数の特性を有している必要があり、これを安定な推定器で実現する場合、不安定零点による位相遅れがある帯域ではその逆関数の特性を実現できず、推定性能の向上が難しいためだと考えられる。

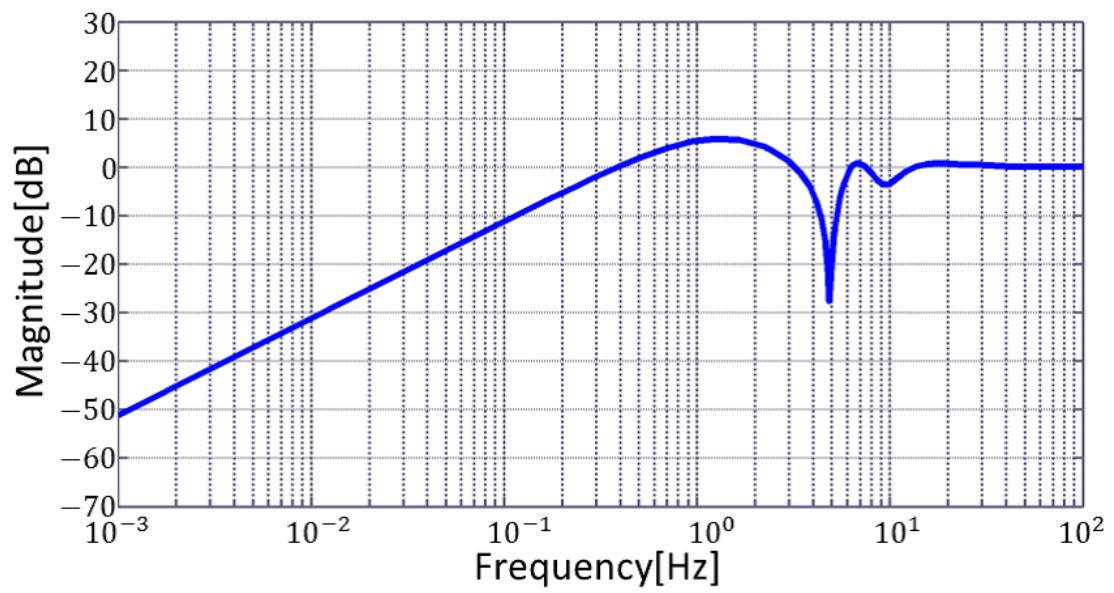


Fig. 6.4 Gain characteristic of $f_r(s) \rightarrow f_r(s) - \hat{f}_r(s)$ of the conventional method

6.6 KYP 補題に基づく PFC の設計

6.6.1 低周波帯域および 3 Hz に注目した PFC の設計 (Case 1)

従来手法では推定できない帯域での推定性能向上を目指し、PFC の設計を行う。ただし、 $P_r(s)$ は原点極を含んでいるため、低周波帯域のマッチングをする場合は $P_m(s)$ も原点極を含むことが望ましい。しかし、その場合は条件 3) が満たされなくなる。そこで、 $P_r(s)$ から原点極を取り除いた新たな制御対象 $\bar{P}_r(s) = sP_r(s) (= \bar{N}_r(s)/\bar{D}_r(s))$ に対して周波数応答マッチングを行い、 $\bar{P}_m(s)$ を設計する。その後、原点極を加えた $P_m(s) = \bar{P}_m(s)/s$ を PFC として用いる。つまり、図 6.5 のブロック線図を考え、安定な $\bar{P}_r(s)$ に対して PFC, $\bar{P}_m(s)$ を設計する。

まず、以下の周波数点で式 (3.7) の評価関数を定義し周波数応答のマッチングを目論む。

$$\omega_k = 2\pi f_k, f_k \in \{f_k | 0.001, 0.01, 2.7, 3, 3.3\}.$$

これは、低周波帯域と 3 Hz 付近における周波数応答のマッチングを意図して設定している。最適化を解く際に設定したその他のパラメータを以下に示す。

$$\alpha = 1, n_m = 5, m_m = 5, \quad (6.15)$$

$$N(s) = 67.93(s + 25.34)(s + 11.81)(s + 8.446)(s^2 + 1.201s + 2284), \quad (6.16)$$

$$D(s) = \bar{D}_r(s), \quad (6.17)$$

$$K = 10, \quad (6.18)$$

$$N_K(s) = KN(s), \quad (6.19)$$

$$\Phi(s) = \Phi_m(s) = D(s), \quad (6.20)$$

$$\Phi_a(s) = \bar{N}_r(s)D(s) + N_K(s)\bar{D}_r(s). \quad (6.21)$$

ここで、 $N(s)$ は $\bar{P}_r(s)$ の分子 $\bar{N}_r(s)$ の不安定零点を虚軸対称に移動させた多項式であり、 $D(s)$ は $\bar{P}_r(s)$ の分母 $\bar{D}_r(s)$ である。式 (3.18) の最適化問題を 3.5 節の手順に従い 10 回繰り返し解いた。繰り返しによる評価関数の推移を図 6.6 に示す。図 6.6 より、繰り返しごとに評価関数が減少していることが確認できる。得られた解 $\mathbf{x} = [\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T]^T$ を以下に示す。

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1.028 \cdot 10^6 \\ 4.892 \cdot 10^5 \\ 5.029 \cdot 10^3 \\ 1.879 \cdot 10^3 \\ 2.793 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6.139 \cdot 10^7 \\ 3.702 \cdot 10^7 \\ 8.527 \cdot 10^5 \\ 2.658 \cdot 10^5 \\ 1.959 \cdot 10^3 \\ 4.692 \cdot 10^2 \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

これにより、 $\bar{P}_{m1}(s)$ を構成し、原点極を加え $P_{m1}(s) = \bar{P}_{m1}(s)/s$ を得る。 $P_r(s)$ と $P_{m1}(s)$ の周波数応答を図 6.7 に示す。図より、低周波帯域から 0.01 Hz および 3 Hz

付近で周波数応答が一致していることがわかる．拡大系 $G_a(s) = P_r(s) + P_{m1}(s)$ を次式に示す．

$$G_a(s) = \frac{537.2(s + 4.421)(s^2 + 1.665 \cdot 10^{-7}s + 154.7) \cdot (s + 2.121)(s^2 + 7.672 \cdot 10^{-8}s + 313.6) \cdot (s^2 + 1.74s + 1063)(s^2 + 1.918s + 3093)}{s(s + 2.07)(s^2 + 1.993s + 987.4) \cdot (s^2 + 2.126s + 3198)(s + 2.111) \cdot (s^2 + 0.6795s + 310.8)(s^2 + 0.002081s + 1567)} \quad (6.23)$$

式 (6.23) の分子の因数分解された係数がすべて正であることから $G_a(s)$ は最小位相系であることがわかる．以上により設計した $P_{m1}(s)$ を用いれば，低周波帯域および 3 Hz 付近における外乱推定が期待できる．

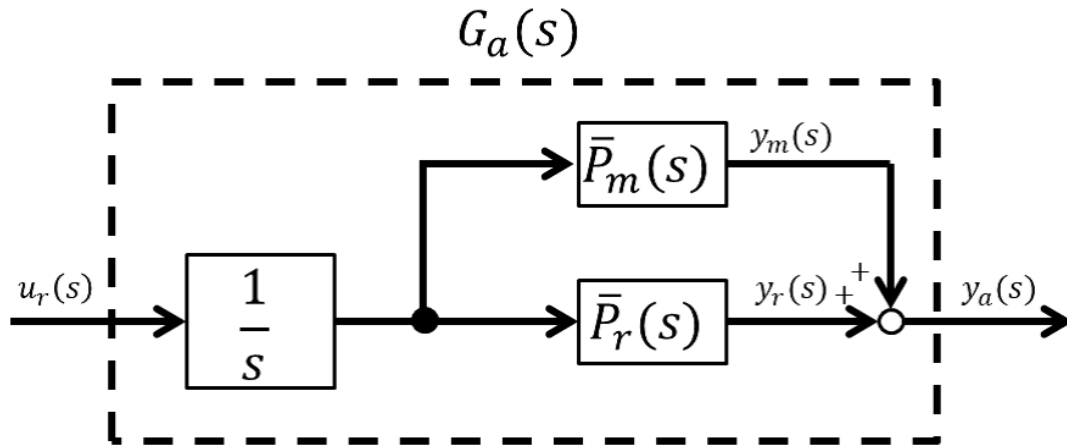


Fig. 6.5 Block diagram for design $\bar{P}_m(s)$

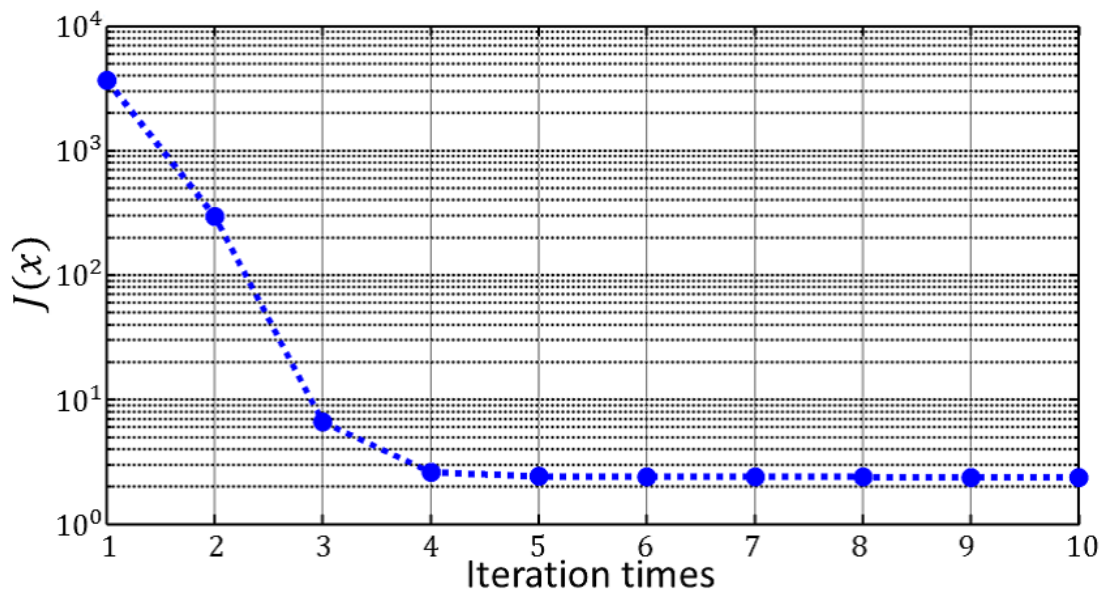


Fig. 6.6 Transition of $J(x)$

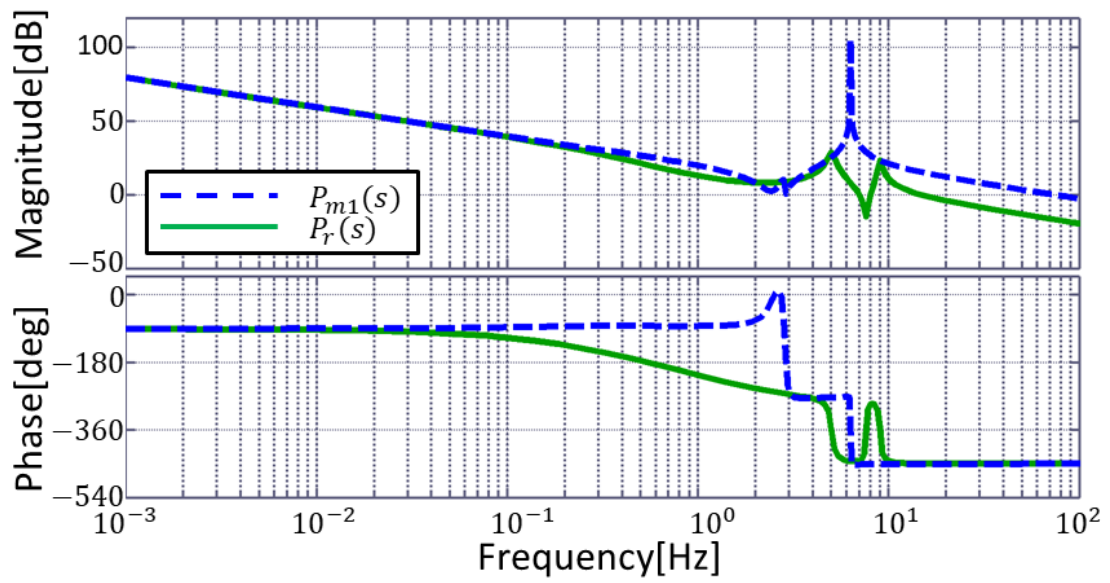


Fig. 6.7 Bode plots of $P_r(s)$ and $P_{m1}(s)$

6.6.2 拡大系に対する外乱推定器設計 (Case 1)

式 (6.23) の拡大系 $G_a(s)$ を状態空間表現に変換し外乱推定オブザーバを式 (6.7) に基づき設計する. 設定した重み行列を以下に示す.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11 \times 11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 10^3 \end{bmatrix}, r = 1 \quad (6.24)$$

また設計されたオブザーバゲインは

$$\mathbf{l}_a = \begin{bmatrix} -70.75 & 1.408 & -56.78 & 0.7797 & 14.36 & -1.059 & 1.970 \\ -3.317 & -3.416 & 11.47 & -0.04824 & 31.62 \end{bmatrix}^T \quad (6.25)$$

である. 図 6.8 に外乱 $f_r(t)$ から推定誤差 $f_r(t) - \hat{f}_r(t)$ までのゲイン特性を示す. 実線は提案手法の Case 1 の $P_{m1}(s)$ を用いた場合を示し, 破線は従来手法を示す. 図 6.8 から, Case 1 は 5 Hz 付近の性能は劣化しているが, 低周波帯域および 3 Hz 付近で高い推定性能を有していることがわかる. ただし, 低周波帯域では従来手法の推定性能以上の性能は見られなかった. これは, 図 6.7 を見ると 0.01 Hz 付近から位相がずれ始めており, この誤差が原因で低周波帯域では従来手法と同等の推定性能になったと考えられる.

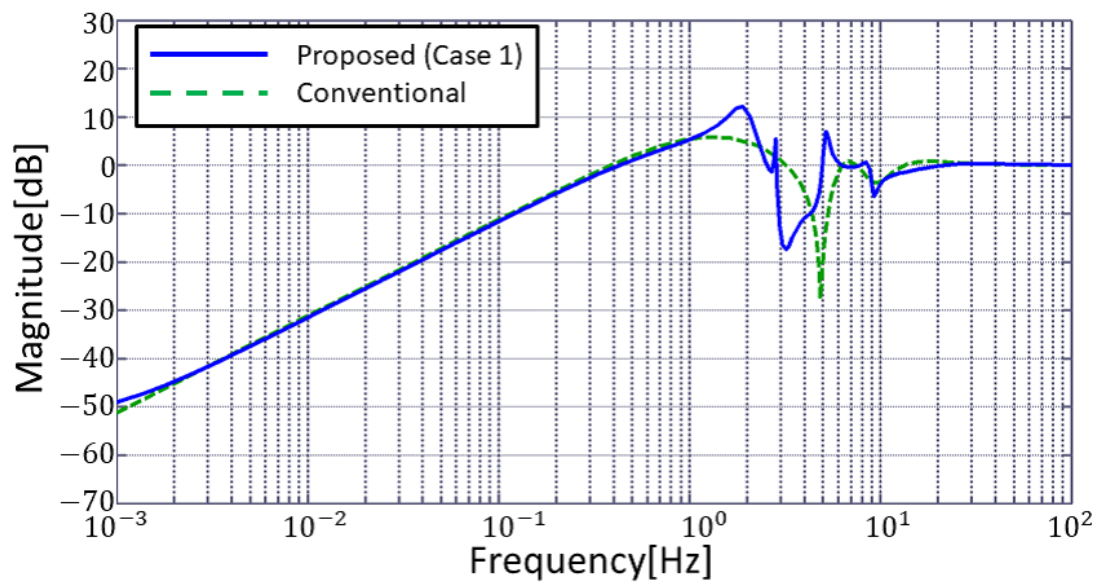


Fig. 6.8: Gain characteristic of $f_r(s) \rightarrow f_r(s) - \hat{f}_r(s)$ of the proposed method based on KYP lemma : experiment in Case 1

6.6.3 低周波帯域および高周波帯域に注目したPFCの設計 (Case 2)

前節では低周波帯域および3 Hz付近の外乱推定を目的にPFCを設計したが、他の周波数帯域でも $P_m(j\omega) \approx \alpha P_r(j\omega)$ を達成することができれば、そこでの外乱推定が可能となる。そこで、次の帯域での周波数応答マッチングを行う。

$$\omega_k = 2\pi f_k, f_k \in \{f_k | 0.001, 0.01, 0.1, 10, 100\}.$$

これは、低周波帯域における周波数応答を近似する帯域を広げ、かつ、高周波帯域においても周波数応答を近似することを意図して設定した。その他のパラメータは式(6.15)~式(6.21)と同一である。式(3.18)の最適化問題を10回繰り返し解いて $P_{m2}(s)$ を求めた。得られた解の数値は省略するが、 $P_r(s)$ と $P_{m2}(s)$ の周波数応答を図6.9に示す。図より低周波帯域から0.2 Hz付近までと8 Hz付近より高周波帯域側で周波数応答を近似できていることがわかる。よって、その周波数帯域での外乱推定性能の向上が期待できる。

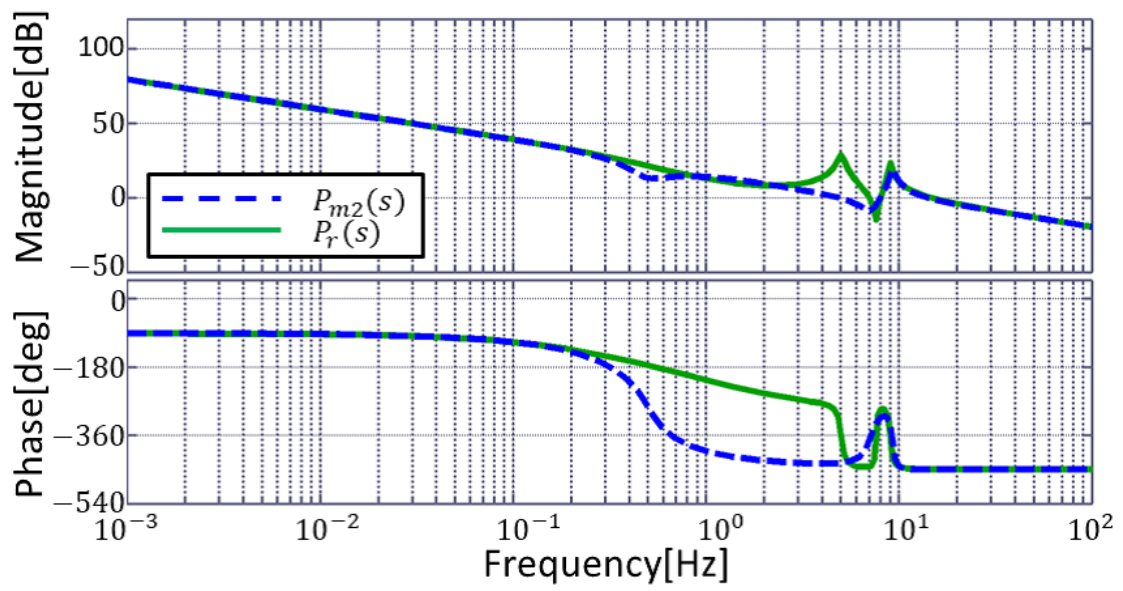


Fig. 6.9 Bode plots of $P_r(s)$ and $P_{m2}(s)$

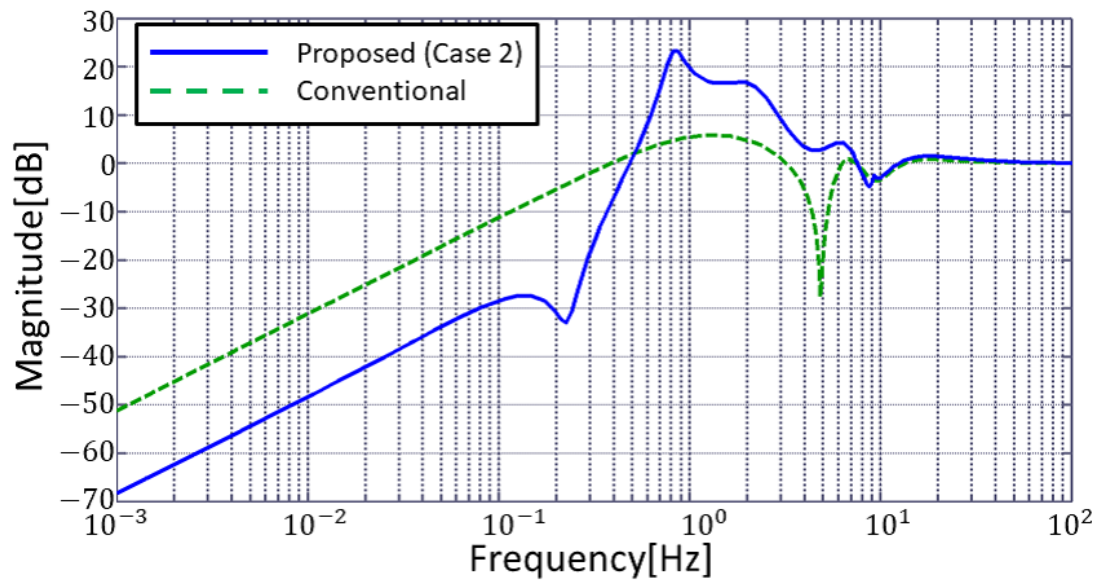


Fig. 6.10: Gain characteristic of $f_r(s) \rightarrow f_r(s) - \hat{f}_r(s)$ of the proposed method based on KYP lemma : experiment in Case 2

6.6.5 数値シミュレーション

本節では、時間応答シミュレーションにより外乱推定性能を検証する。実機実験においてはDSP(Digital Signal Processor)によって制御するため、離散時間系の推定器を設計する必要がある。本論文では、デジタル再設計によって離散時間系の推定器を設計する。これは、以下の二つの理由による。一つは、外乱推定に対するPFCの設計方法は連続時間系の方が考えやすく、設計方法としてもそのように与えられていること。もう一つは、サンプリング周期を十分小さくとれる場合、離散化しても高周波帯域まで周波数特性を保存することができるため、離散時間系においても連続時間系の推定性能を保存できることである。本論文では、サンプリング周期を $T_s = 1 \text{ ms}$ とした。まず、制御対象をサンプリング周期 T_s でゼロ次ホールドにより離散化した。PFCおよび外乱推定オブザーバは周波数特性の保存を念頭に置き、双一次変換により離散化した。この変換によって、低周波帯域から約200 Hzまで周波数応答が保存されていることが確認できたため、離散化による性能劣化はないと期待できる。また、このデジタル再設計ではPFCおよび外乱推定オブザーバの安定性は保存されている。このときの、外乱 $f_r[k]$ から推定誤差 $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$ までのゲイン特性を図6.11に示す。実線が提案手法 (Case 1)、破線が従来手法である。ただし、Case 2については省略した。図6.11より、連続時間系と同様に、提案手法は低周波帯域および3 Hz付近で高い推定性能を有していることがわかる。提案手法の有効性を数値シミュレーションによって検証するために、 $f_r[k]$ は低周波および3 Hzの正弦波とした。設定した入力 $u_r[k]$ および外乱 $f_r[k]$ を以下に示す。

$$u_r[k] = 0, \quad (6.28)$$

$$f_r[k] = \sum_{i=1}^3 \sin(f_i \cdot 2\pi k T_s), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.29)$$

$$f_1 = 0.05, \quad f_2 = 0.1, \quad f_3 = 3.$$

数値シミュレーション結果を図6.12に示す。図6.12の実線が外乱 $f_r[k]$ 、破線、一点鎖線がそれぞれ従来手法と提案手法 (Case 1) の外乱推定値 $\hat{f}_r[k]$ である。図6.12より、提案手法の推定値の方が真値に近いことがわかる。図6.13に推定誤差 $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$ を示す。破線が従来手法、実線が提案手法 (Case 1) である。図6.13からも、提案手法の推定誤差が小さく抑えられていることが確認できる。

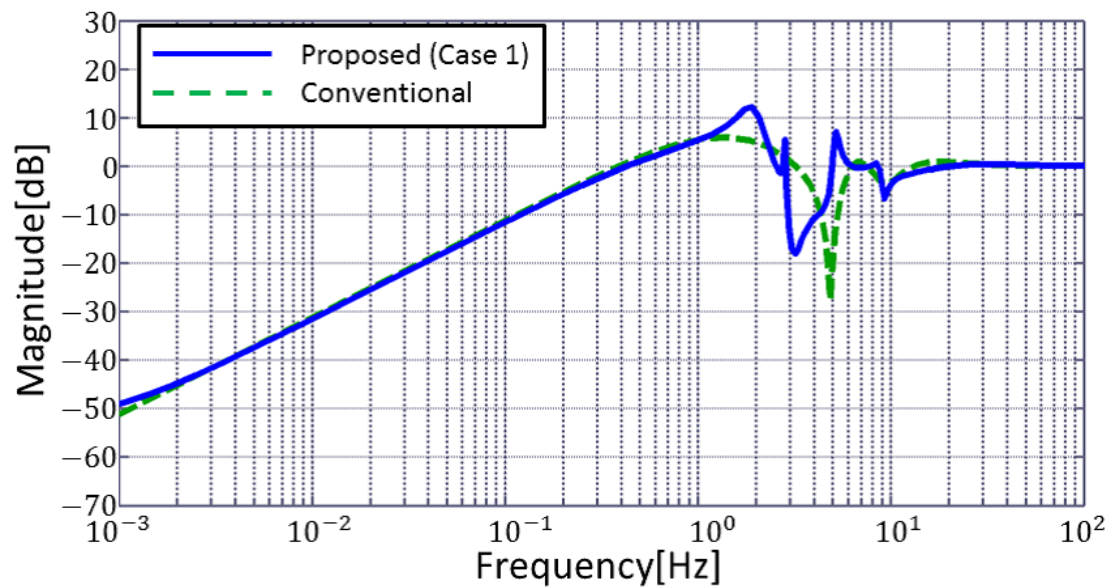


Fig. 6.11: Gain characteristics of $f_r[z] \rightarrow f_r[z] - \hat{f}_r[z]$ of the proposed method and the conventional method in discretized system

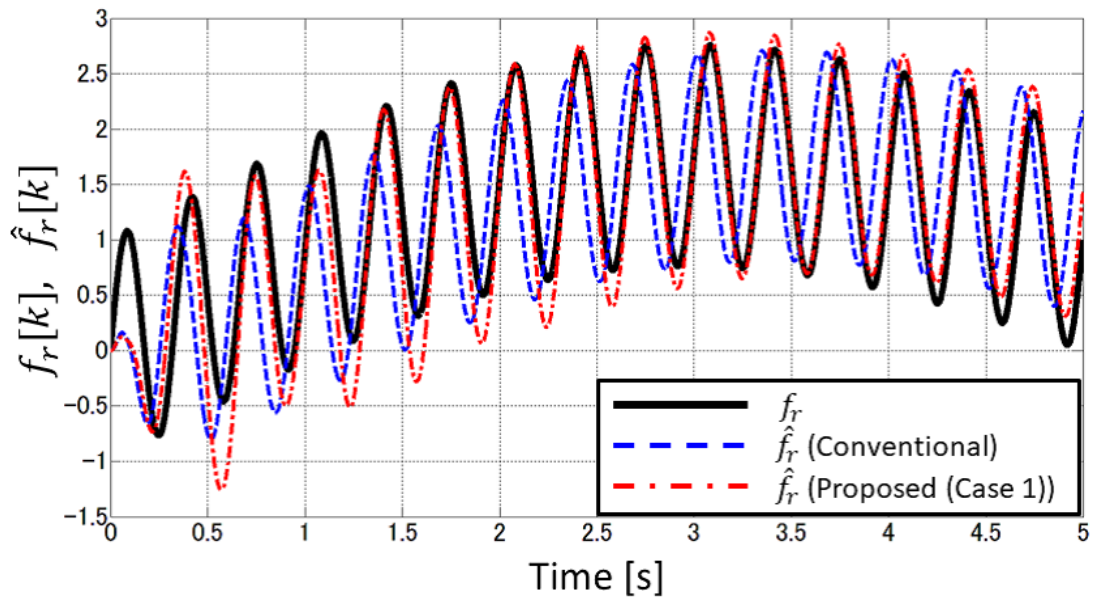


Fig. 6.12 Time responses of $f_r[k]$ and $\hat{f}_r[k]$: simulation

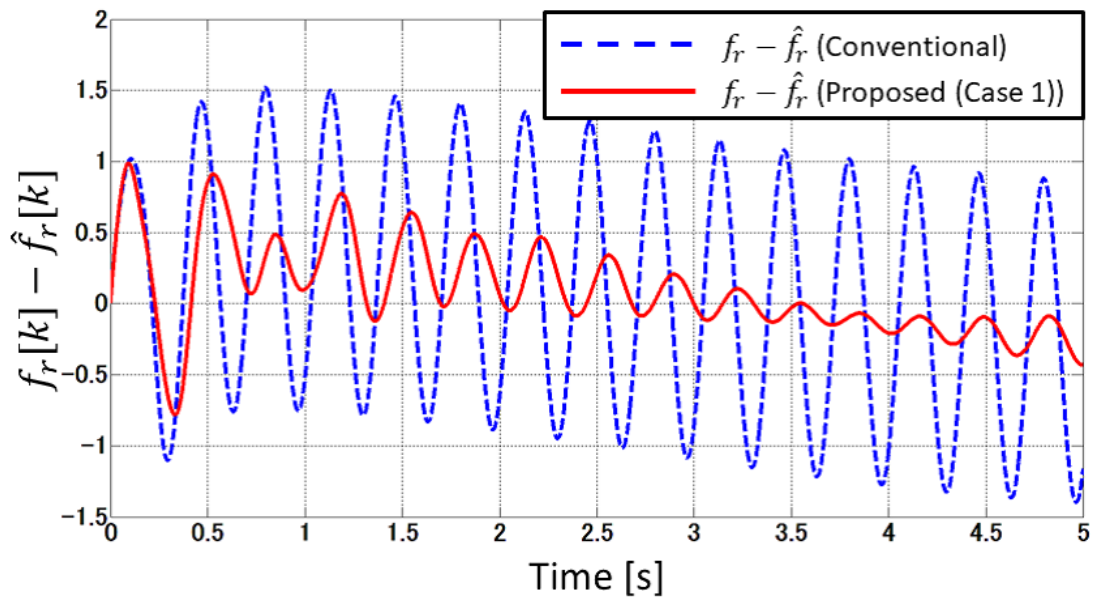


Fig. 6.13 Time responses of $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$: simulation

6.6.6 実験検証

図6.1の実験装置に対して外乱推定を行う。用いた未知外乱推定器は従来手法と提案手法 (Case 1) である。ここで、制御対象 $P_r(s)$ の出力 $y_r(t)$ は角速度 $\dot{\theta}_1(t)$, $\dot{\theta}_2(t)$ を用いて構成しているが、速度信号は直接観測することはできない。そこで、次式の近似微分器 $F(s)$ をサンプリング周期 T_s で双一次変換により離散化したフィルタ $F[z]$ を用いて生成する。

$$F(s) = \frac{s}{T_F s + 1}, \quad T_F = \frac{1}{20 \cdot 2\pi}. \quad (6.30)$$

つまり、角度信号を $F[z]$ に通したものを速度信号として扱う。印加する入力および外乱を式 (6.31), 式 (6.32) に示す。

$$u_r[k] = 0, \quad (6.31)$$

$$f_r[k] = \sin(3 \cdot 2\pi k T_s), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.32)$$

$f_r[k]$ は性能差が顕著に現れる 3 Hz の正弦波とした。実験結果を図6.14に示す。図6.14の実線が外乱 $f_r[k]$, 破線, 一点鎖線がそれぞれ従来手法と提案手法 (Case 1) の外乱推定値 $\hat{f}_r[k]$ である。また, 図6.15に外乱推定誤差 $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$ を示す。破線が従来手法, 実線が提案手法 (Case 1) である。数値シミュレーションと同様に提案手法の方が推定誤差を小さく抑えられていることがわかる。以上から, 実験においても PFC を用いた外乱推定の有効性を確認することができた。

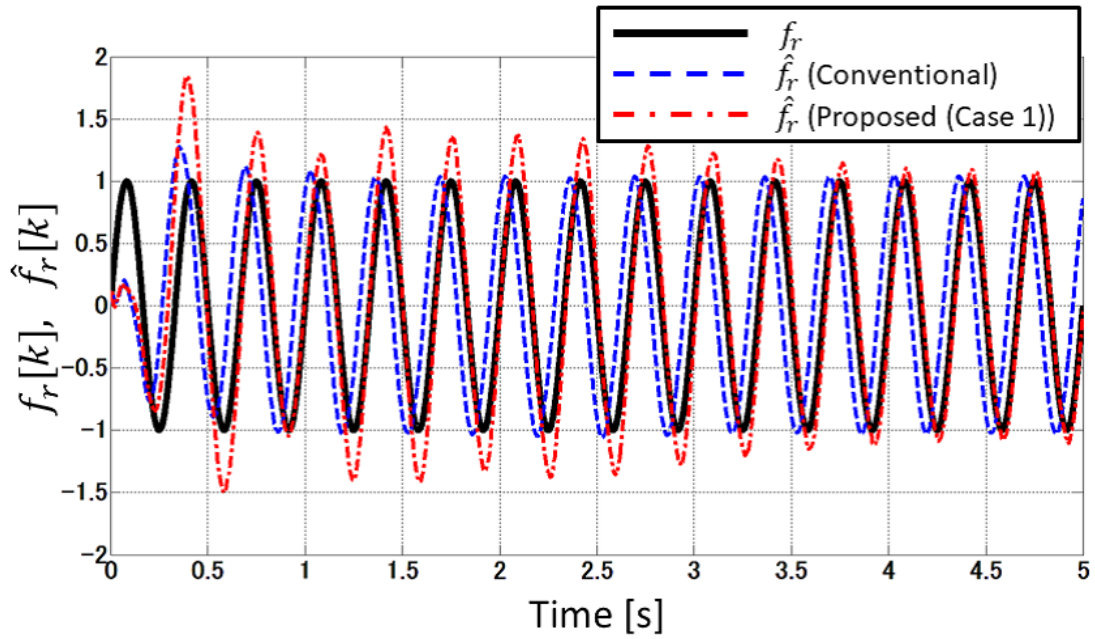


Fig. 6.14 Time responses of $f_r[k]$ and $\hat{f}_r[k]$: experiment

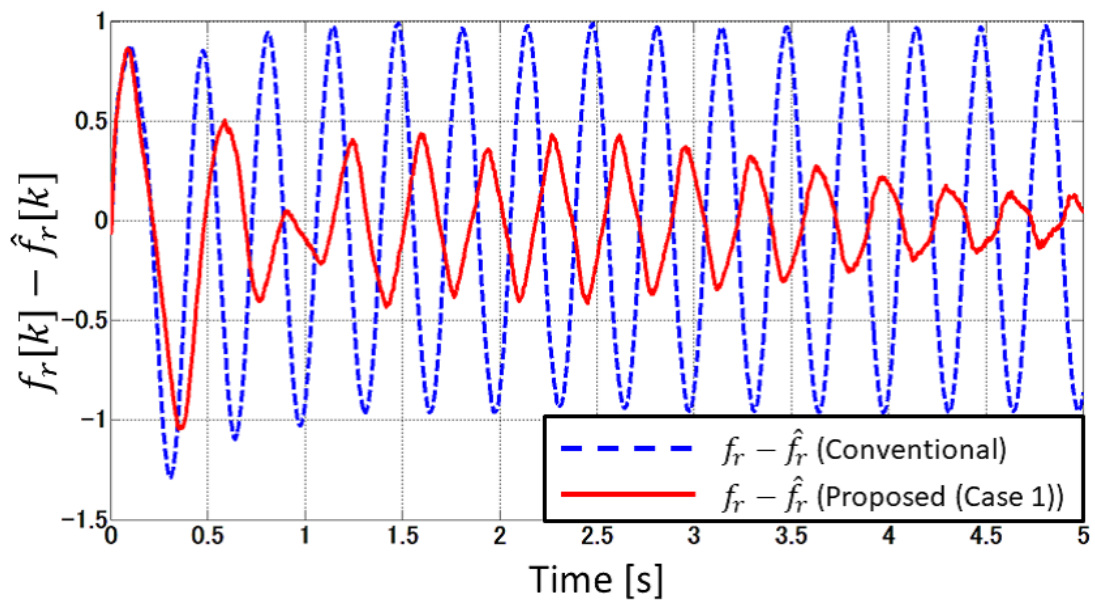


Fig. 6.15 Time responses of $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$: experiment

6.7 ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づく PFC の設計

6.7.1 低周波帯域および 3 Hz に注目した PFC の設計 (Case 1)

6.4 節で示した三慣性軸ねじり振動系に対して、4 章の方法により PFC を設計する。ここでは、低周波帯域および 3 Hz の周波数帯域に注目し、そこでの $P_r(j\omega) + P_m(j\omega) \approx (\alpha + 1)P_r(j\omega)$ を実現することを目指す。そこで、重み関数を

$$W_2(s) = K_3 G_6(s) G_7(s) \quad (6.33)$$

$$G_6(s) = \frac{1}{T_6 s + 1}, \quad T_6 = \frac{1}{10^{-4} \cdot 2\pi} \quad (6.34)$$

$$G_7(s) = \frac{\omega_9^2}{s^2 + 2\zeta_9 \omega_9 s + \omega_9^2}, \quad \zeta_9 = 0.01, \quad \omega_9 = 3 \cdot 2\pi \quad (6.35)$$

$$K_3 = 1800 \quad (6.36)$$

と設定する。また、 $\alpha = 0$ とした。次に、 $\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_L = [\mathbf{I}_{9 \times 9} \quad \mathbf{0}_{9 \times 3}]^T$, $\mathbf{U} = \mathbf{V} = [\mathbf{0}_{3 \times 9} \quad \mathbf{I}_{3 \times 3}]^T$ と設定し、 $\gamma_2 = 1$ と与え、式 (4.14), 式 (4.15) の LMI を解いた。そして、式 (4.16) から式 (4.19) により $P_{m1}(s)$ を得た。ただし、 $\mathbf{W}_s = \mathbf{I}$ とし、 \mathbf{Z}_s は式 (4.20) により求めた。また、得られた $P_{m1}(s)$ の状態空間表現を MATLAB のコマンド “balreal” により平衡実現に変換した。このときの拡大系 $G_a(s) = P_r(s) + P_{m1}(s)$ の零点および $P_{m1}(s)$ の極を表 6.2 に示す。表 6.2 により、拡大系の零点は安定零点であり最小位相性を有しているが、PFC は不安定極を有している。そこで、式 (4.26) の全域通過フィルタとして

$$G_{ap}(s) = \frac{(s^2 - 7.714s + 624.1)(s^2 - 17.47s + 1473)(s^2 - 2.975s + 3591)}{(s^2 + 7.714s + 624.1)(s^2 + 17.47s + 1473)(s^2 + 2.975s + 3591)} \quad (6.37)$$

と設定する。そして、式 (4.29) により $\hat{P}_{m1}(s)$ を求め、図 4.3 のシステムを構成する。ここで、 $\hat{P}_{m1}(s)$, 重み関数 $W_2(s)$, そして $G_{ap}(s)P_r(s)$ のボード線図を図 6.16 に示す。破線が $\hat{P}_{m1}(s)$, 点線が $W_2(s)$, 実線が $G_{ap}(s)P_r(s)$ である。図 6.16 より、低周波帯域及び 3 Hz 付近における $\hat{P}_{m1}(s)$ のゲインが小さくなっており、その帯域での外乱推定性能の向上が期待できる。

Table 6.2 Zeros of $G_a(s)$ and poles of $P_{m1}(s)$

Zeros of $G_a(s)$	Poles of $P_{m1}(s)$
$-9.771 \cdot 10^5$	$-1.189 \cdot 10^2$
-88.47	-2.041
-53.16	$-7.707 \cdot 10^{-9}$
-25.33	$1.488 \pm j59.91$
$-3.628 \pm j55.44$	$8.733 \pm j37.37$
$-0.6009 \pm j47.78$	$3.857 \pm j24.68$
$-3.672 \pm j26.49$	
$-15.89 \pm j16.21$	
-7.477	
-1.998	
$-7.707 \cdot 10^{-9}$	

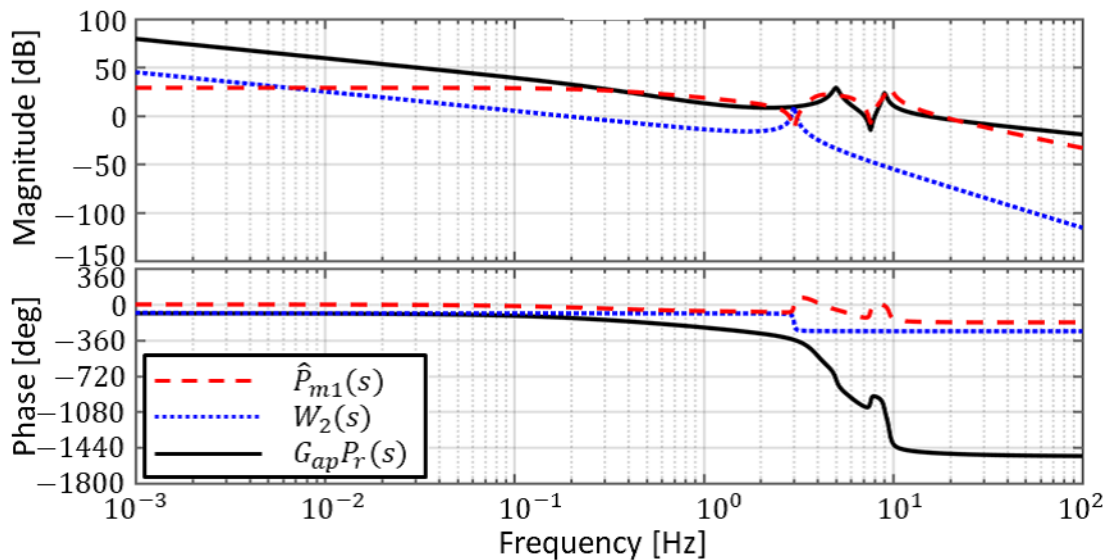


Fig. 6.16 Bode plots of $\hat{P}_{m1}(s)$, $W_2(s)$ and $G_{ap}(s)P_r(s)$

6.7.2 拡大系に対する外乱推定器設計 (Case 1)

拡大系 $\hat{G}_a(s) = G_{ap}(s)P_r(s) + \hat{P}_{m1}(s)$ に対して外乱推定オブザーバを式 (6.7) に基づき設計する. 設定した重み行列を以下に示す.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{21 \times 21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 10^5 \end{bmatrix}, r = 1 \quad (6.38)$$

また設計されたオブザーバゲインは

$$\mathbf{l}_a = \begin{bmatrix} 0.5219 & 2.468 & 1.725 & 5.494 & -1.736 & 3.523 & 2.203 \\ 0.1615 & -0.2250 & 420.3 & 23.08 & -22.39 & 0.06537 & -1.982 \\ 883.4 & 10.79 & 568.7 & 1049 & 1107 & 7.955 & 27.68 & 316.2 \end{bmatrix}^T \quad (6.39)$$

である. 図 6.17 に外乱 $f_r(t)$ から推定誤差 $f_r(t) - \hat{f}_r(t)$ までのゲイン特性を示す. 実線は提案手法の Case 1 の $\hat{P}_{m1}(s)$ を用いた場合を示し, 破線は 6.5 節において設計した従来手法を示す. 図 6.17 より, 低周波数帯域では従来手法と同等の推定性能を有しているのに対して, 3 Hz 付近では高い推定性能を有していることがわかる.

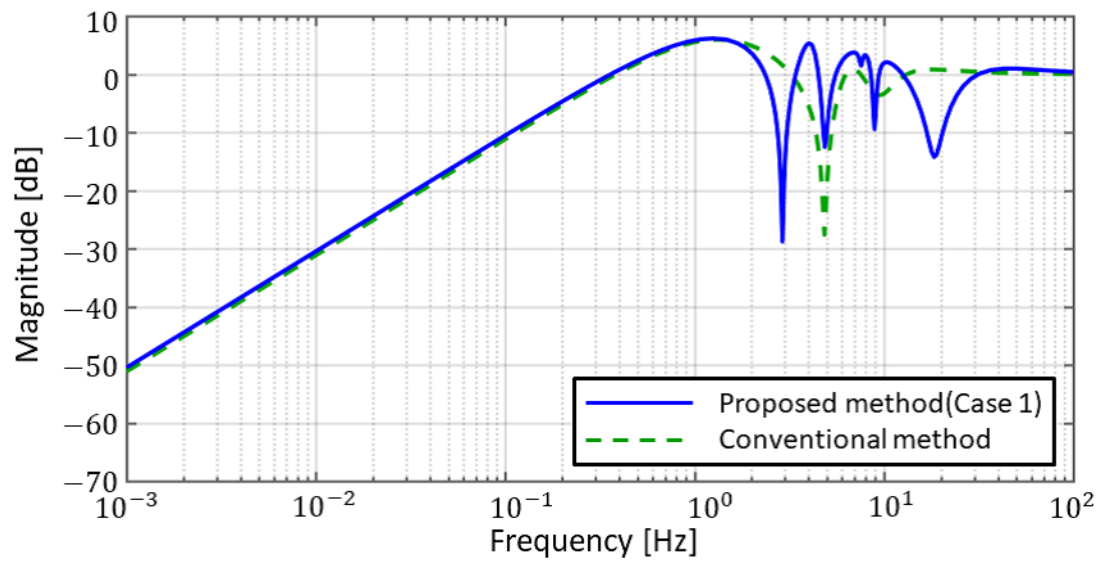


Fig. 6.17: Gain characteristic of $f_r(s) \rightarrow f_r(s) - \hat{f}_r(s)$ of the proposed method based on descriptor system : experiment in Case 1

6.7.3 低周波帯域および高周波帯域に注目したPFCの設計 (Case 2)

本項では低周波数帯域における $P_r(j\omega) + P_m(j\omega) \approx (\alpha + 1)P_r(j\omega)$ とする帯域を広げ、かつ、高周波数帯域においても $P_r(j\omega) + P_m(j\omega) \approx (\alpha + 1)P_r(j\omega)$ を実現することを旨とする。そこで、重み関数として

$$W_2(s) = K_4 \left(\frac{G_8(s)}{G_9(s)} \right)^2 \left(\frac{G_{10}(s)}{G_{11}(s)} \right)^2 \quad (6.40)$$

$$G_i(s) = \frac{1}{T_i s + 1}, \quad i = 8, 9, 10, 11 \quad (6.41)$$

$$T_8 = \frac{1}{10^{-2} \cdot 2\pi}, \quad T_9 = \frac{1}{1 \cdot 2\pi}, \quad T_{10} = \frac{1}{50 \cdot 2\pi}, \quad T_{11} = \frac{1}{10 \cdot 2\pi} \quad (6.42)$$

$$K_4 = 350 \quad (6.43)$$

と設定する。また、 $\alpha = 0$ とした。次に、 $\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_L = [\mathbf{I}_{10 \times 10} \quad \mathbf{0}_{10 \times 3}]^T$, $\mathbf{U} = \mathbf{V} = [\mathbf{0}_{3 \times 10} \quad \mathbf{I}_{3 \times 3}]^T$ と設定し、 $\gamma_2 = 1$ と与え、式(4.14)、式(4.15)のLMIを解いた。そして、式(4.16)から式(4.19)により $P_{m2}(s)$ を得た。ただし、 $\mathbf{W}_s = \mathbf{I}$ とし、 \mathbf{Z}_s は式(4.20)により求めた。また、得られた $P_{m2}(s)$ の状態空間表現をMATLABのコマンド“balreal”により平衡実現に変換した。得られた $P_{m2}(s)$ 、重み関数 $W_2(s)$ 、そして制御対象 $P_r(s)$ のボード線図を図6.18に示す。破線が $P_{m2}(s)$ 、点線が重み関数 $W_2(s)$ 、実線が制御対象 $P_r(s)$ である。図6.18より、低周波帯域及び高周波帯域における $P_{m2}(s)$ のゲインが小さいことがわかる。また、表6.3に拡大系 $G_a(s) = P_r(s) + P_{m2}(s)$ の零点および $P_{m2}(s)$ の極を示す。表6.3より、拡大系の零点は安定零点であり最小位相性を有していることがわかる。また、PFCの極も安定である。

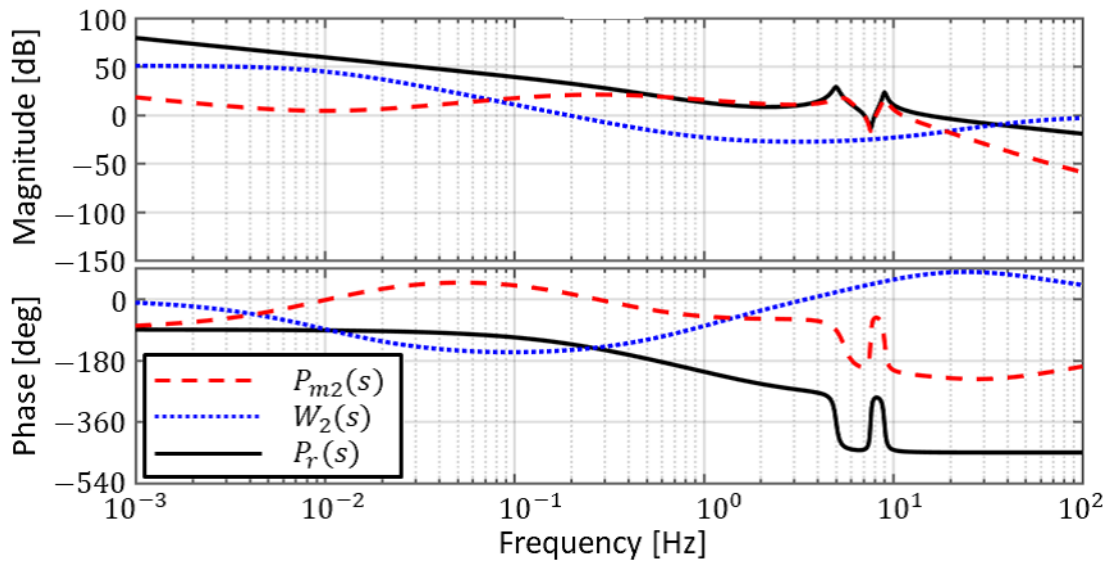


Fig. 6.18 Bode plots of $P_{m2}(s)$, $W_2(s)$ and $P_r(s)$

Table 6.3 Zeros of $G_a(s)$ and poles of $P_{m2}(s)$

Zeros of $G_a(s)$	Poles of $P_{m2}(s)$
$-4.521 \cdot 10^5$	$-102.7 \pm j53.54$
$-72.96 \pm j34.64$	$-1.298 \pm j56.73$
-54.56	$-3.249 \pm j34.42$
-25.33	-36.50
$-1.448 \pm j56.52$	$-1.080 \cdot 10^{-6}$
$-0.6013 \pm j47.78$	-1.892
-6.995 ± 29.16	-1.564
-12.22	
-6.507	
$-2.552 \pm j0.5576$	
$-1.079 \cdot 10^{-6}$	

6.7.4 拡大系に対する外乱推定器設計 (Case 2)

拡大系 $G_a(s) = P_r(s) + P_{m2}(s)$ に対して外乱推定オブザーバを式 (6.7) に基づき設計する。設定した重み行列を以下に示す。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{16 \times 16} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 10^5 \end{bmatrix}, r = 1 \quad (6.44)$$

また設計されたオブザーバゲインは

$$\mathbf{l}_a = \begin{bmatrix} 2.775 & 0.3106 & -0.4183 & 463.5 & 40.82 & -39.58 & 0.7823 \\ 25.67 & 0.8935 & 0.8102 & -3.823 & 21.93 & 0.5232 & -5.154 \\ 0.1764 & -0.001144 & 316.2 \end{bmatrix}^T \quad (6.45)$$

である。図 6.19 に外乱 $f_r(t)$ から推定誤差 $f_r(t) - \hat{f}_r(t)$ までのゲイン特性を示す。実線は提案手法の Case 2 の $P_{m2}(s)$ を用いた場合を示し、破線は従来手法を示す。図 6.19 より、低周波帯域において従来手法よりも推定性能の向上を確認することができた。また、図 6.19 では高周波側の推定性能の向上は見られないが、設定した重み \mathbf{Q} , r を変更することによって、オブザーバゲインをハイゲイン化することで高周波帯域側も推定性能を向上させられると考えられる。

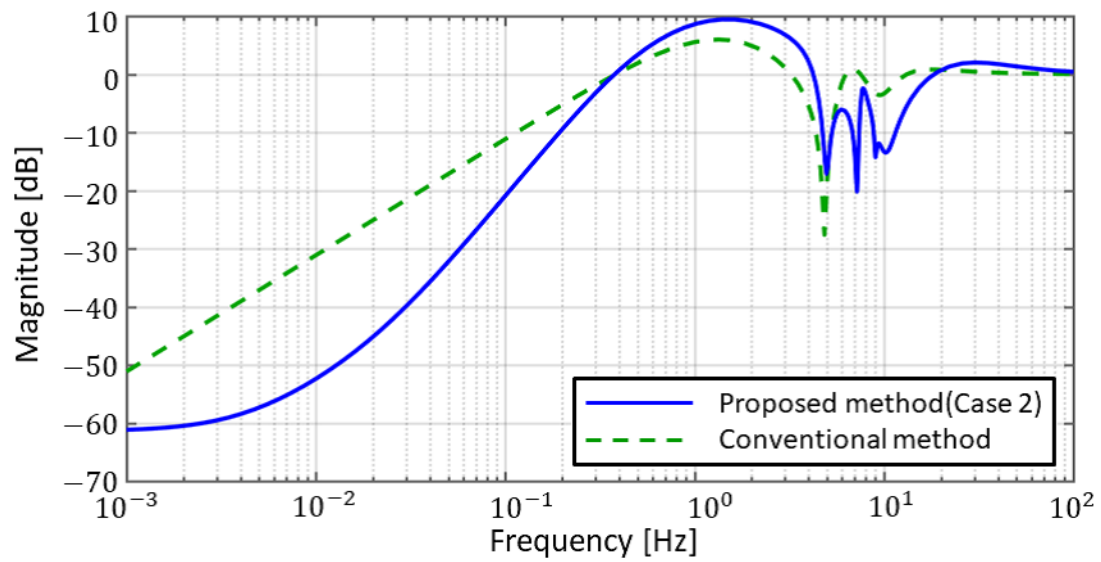


Fig. 6.19: Gain characteristic of $f_r(s) \rightarrow f_r(s) - \hat{f}_r(s)$ of the proposed method based on descriptor system : experiment in Case 2

6.7.5 数値シミュレーション

本節では設計した制御器を離散化し数値シミュレーションにより外乱推定性能を検証する。ただし、Case 1 の $\hat{P}_{m1}(s)$ を用いて検証する。制御対象 $P_r(s)$ はサンプリング周期 $T_s = 1$ ms でゼロ次ホールドにより離散化した。また、 $\hat{P}_{m1}(s)$, $G_{ap}(s)$, および外乱推定オブザーバは周波数特性の保存を念頭に置き、双一次変換により離散化した。

設定した入力 $u_r[k]$ および外乱 $f_r[k]$ を以下に示す。

$$u_r[k] = 0, \quad (6.46)$$

$$f_r[k] = \sum_{i=1}^3 \sin(f_i \cdot 2\pi k T_s), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.47)$$

$$f_1 = 0.05, \quad f_2 = 0.1, \quad f_3 = 3.$$

図 6.20 の実線が外乱 $f_r[k]$, 破線, 一点鎖線がそれぞれ従来手法と提案手法 (Case 1) の外乱推定値 $\hat{f}_r[k]$ である。図 6.20 より, 提案手法の推定値の方が真値に近いことがわかる。図 6.21 に推定誤差 $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$ を示す。破線が従来手法, 実線が提案手法 (Case 1) である。図 6.21 から, 提案手法の推定誤差が小さく抑えられていることが確認できる。

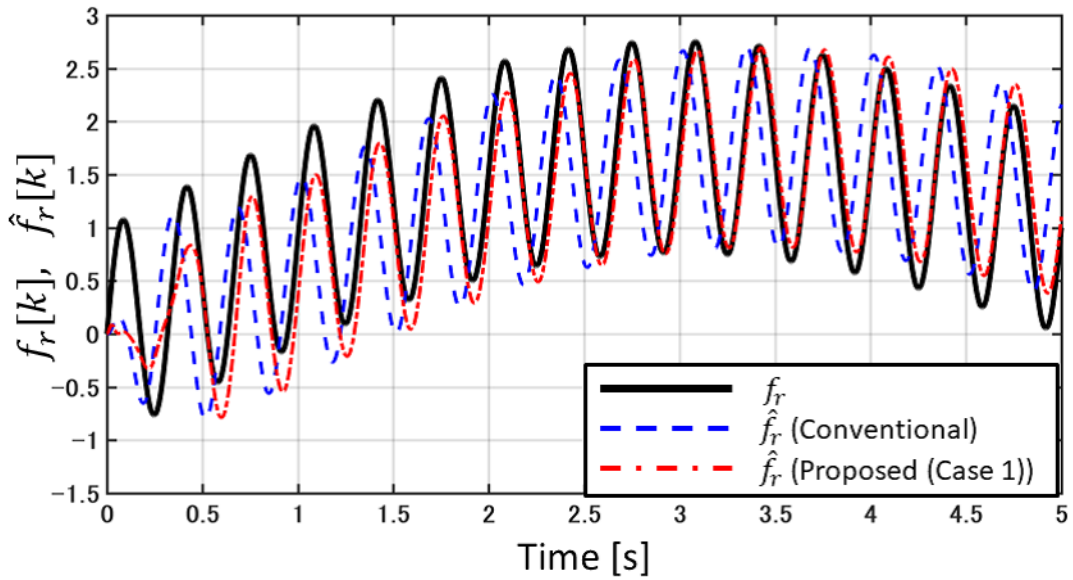


Fig. 6.20 Time responses of $f_r[k]$ and $\hat{f}_r[k]$: simulation

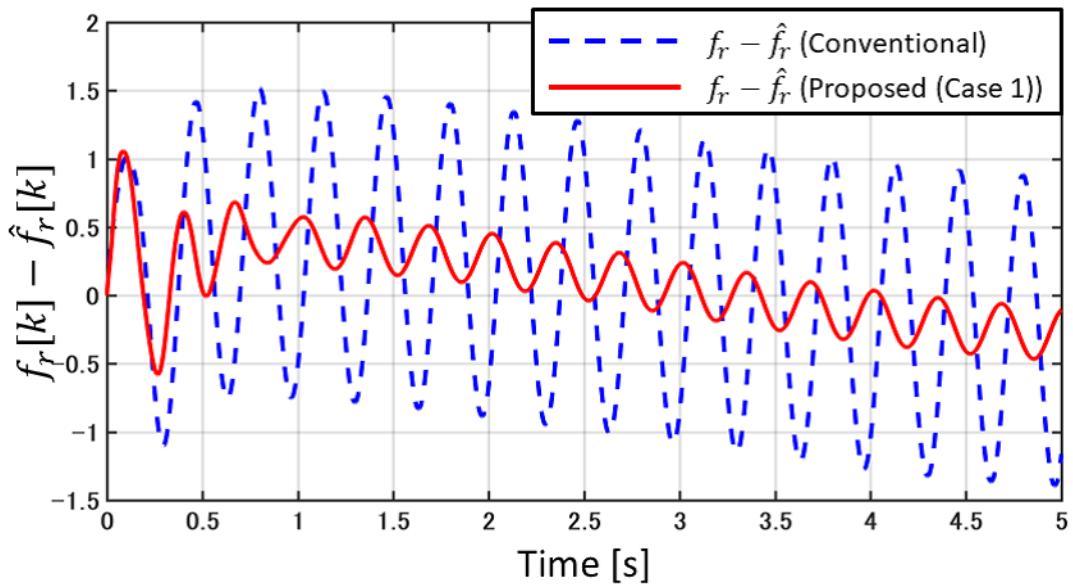


Fig. 6.21 Time responses of $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$: simulation

6.7.6 実験検証

図6.1の実験装置に対して外乱推定を行う。用いた未知外乱推定器は従来手法と提案手法 (Case 1) である。また、出力信号は6.6.6節と同様に、式(6.30)の近似微分器を用いて速度信号を得ることにより構成した。入力および外乱は式(6.31)および式(6.32)と同じ以下のものを印加する。

$$u_r[k] = 0, \quad (6.48)$$

$$f_r[k] = \sin(3 \cdot 2\pi k T_s), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.49)$$

実験結果を図6.22に示す。図6.22の実線が外乱 $f_r[k]$ 、破線、一点鎖線がそれぞれ従来手法と提案手法 (Case 1) の外乱推定値 $\hat{f}_r[k]$ である。また、図6.23に外乱推定誤差 $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$ を示す。破線が従来手法、実線が提案手法 (Case 1) である。提案手法の方が推定誤差を小さく抑えられていることがわかる。以上から、ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づく方法においても実験により PFC を用いた外乱推定の有効性を確認することができた。

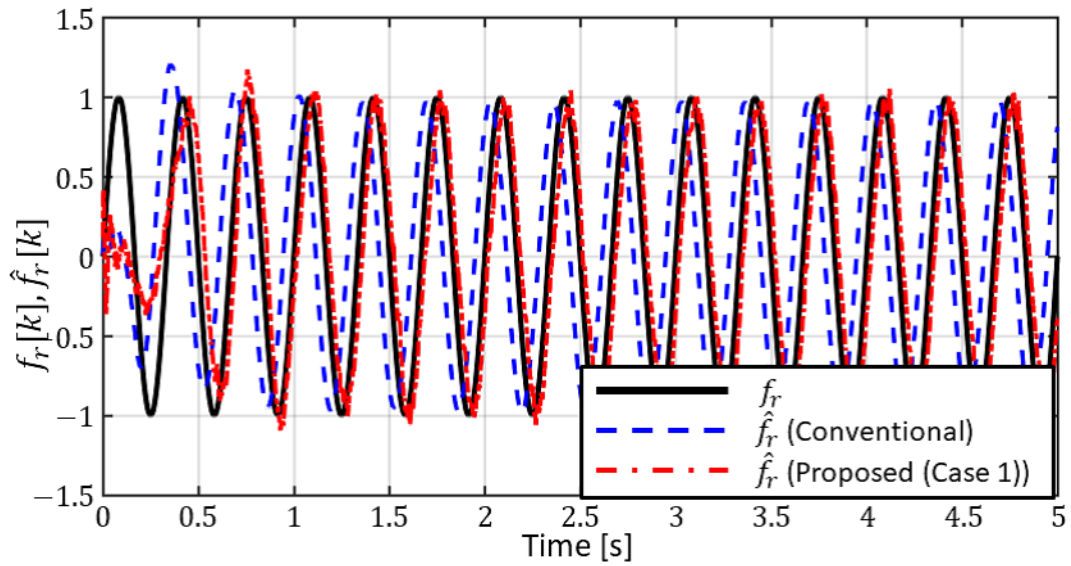


Fig. 6.22 Time responses of $f_r[k]$ and $\hat{f}_r[k]$: experiment

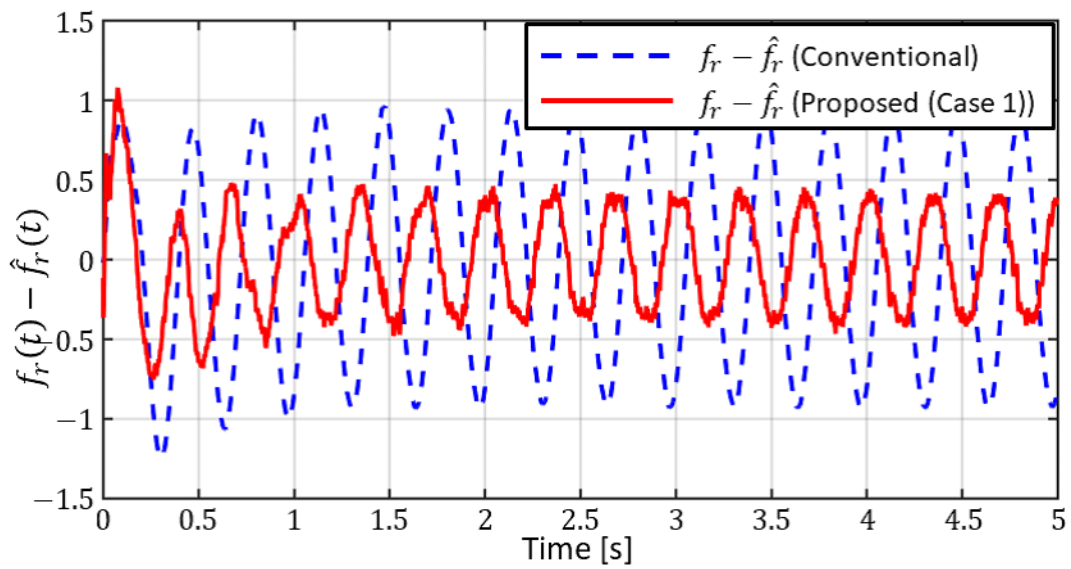


Fig. 6.23 Time responses of $f_r[k] - \hat{f}_r[k]$: experiment

6.8 まとめ

この章では3慣性軸ねじり振動系に対してPFCを用いた外乱推定手法を検討した。外乱推定手法としては、非最小位相系に対しても適用でき、設計が容易な文献⁴⁷⁾の外乱推定オブザーバを適用した。そして、非最小位相系である制御対象にそのまま文献⁴⁷⁾の外乱推定オブザーバを適用した場合を従来手法とし、PFC導入による効果を実験を通して検証した。その結果、PFCを導入することによって外乱推定性能の向上が図れることを確認できた。これにより、実応用の観点から有用性を示すことができた。

第7章 BMI制約を伴う2次評価関数最小化問題のLMI化による解法

7.1 はじめに

これまでの章では一入出力系に対するPFCの設計方法を述べてきたが、多入出力系の制御対象に対してもPFCの設計方法を構築することは重要である。その一つの可能性として、制約付きのシステム同定法³²⁻³⁵⁾の考え方を応用して多入出力系におけるPFCの設計を行うアプローチが考えられる。制約付きのシステム同定問題とは推定するパラメータに制約を設けて最適化問題を解き、制約を満たす範囲内で、制御対象の応答を近似するパラメータを得る手法であり、これらの手法は多入出力系の制御対象に対して適用可能である。そこで、拡大系を最小位相とする制約の範囲内で理想的な周波数特性となるPFCを設計する、というPFC設計問題を制約付きのシステム同定問題と捉え定式化することで多入出力系のPFCの設計が可能となると考えられる。

本論文では、そのはじめの取り組みとして、BMI制約のもとでの2次評価関数最小化問題の解法に関する方法を検討する。例えば、線形システムにおいてゲインの切り替えを伴う制御系のゲイン設計問題^{36,37)}が本論文で扱う最適化問題に帰着できる。また、本論文で提案するBMI制約のもとでの2次評価関数最小化問題の解法を応用することで制約付きのシステム同定問題にも適用が可能となる。

一般にBMI制約のもとでの2次評価関数最小化問題は非凸最適化問題のため扱いにくい問題である。そこで本論文では、文献³⁸⁻⁴¹⁾のLMI化法に注目する。文献³⁸⁻⁴¹⁾では、混合 H_2/H_∞ 制御問題などの非線形最適化問題を変形し、制約条件の非線形要素を変数の2次の項としてあらわす。そして、十分条件によって最適化問題をLMI化している。本論文においても、BMI制約のもとでの2次評価関数最小化問題を適切に変形することで、最適化問題の制約条件の非線形要素を変数の2次の項として表現する。そして、本論文では新たな十分条件により、LMI表現の凸最適化問題に帰着させる。この条件は文献³⁸⁻⁴¹⁾とは異なり、繰り返し計算を行わずに最適解を得る。本論文で提案したLMI化手法は、切り替えシステムに対するフィードバックゲインの設計および数値シミュレーションによって検証する。

7.2 問題設定

本章では次の最適化問題について考える.

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{X}} J_3(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad C_{BMI}(\mathbf{x}, \mathbf{X}), \quad (7.1)$$

ここで, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ は決定変数ベクトル, $J_3(\mathbf{x})$ は評価関数, $C_{BMI}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ は \mathbf{x} と \mathbf{X} に関する BMI 制約を表しており, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ は BMI 制約に関する行列変数である. このとき, 式 (7.1) の最適化問題は次の二つの仮定を満たしているとする.

仮定 1

評価関数 $J_3(\mathbf{x})$ は以下の \mathbf{x} に関する二次評価関数として表されているとする.

$$\begin{aligned} J_3(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c, \quad \mathbf{A} > 0, \\ \mathbf{A} &\in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

仮定 2

$C_{BMI}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ は変数変換

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{X})\mathbf{x}, \quad \mathbf{Y}(\mathbf{X}) > 0, \quad (7.3)$$

を施すことによって, \mathbf{y} と $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ に関する LMI 制約 $C_{LMI}(\mathbf{y}, \mathbf{Y})$ に変換可能である. ここで, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ は新しい変数ベクトルであり, $\mathbf{Y}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ は \mathbf{X} に関してアフィンの正定対称行列である. $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ は, 例えば,

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

である.

式 (7.1) の最適化問題は $C_{BMI}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ が非凸制約であるため, そのまま解くことは容易ではない. 本論文では, この非凸最適化問題を十分条件を用いて LMI 表現の凸最適化問題に変換する方法を提案する.

7.3 LMI化方法

7.3.1 概要

まず, 平方完成することにより $J_3(\mathbf{x})$ の一次の項を消去する. すなわち, 平方完成により $J_3(\mathbf{x})$ を 2 次と定数の項のみの形式に変形する. 次に, 変数変換により BMI 制約 $C_{BMI}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ を LMI 制約 $C_{LMI}(\mathbf{y}, \mathbf{Y})$ に変換する. そして, 変数変換された変数を評価関数に代入する. このとき, シュール補題によって評価関数最小化に関する行列不等式を導出する. ただし, この行列不等式は変数行列の 2 次の項を含んでいるため, 非凸な制約である. そこで, その不等式を満たすための LMI 表現の十分条件を提案する.

7.3.2 平方完成と変数変換

$J_3(\mathbf{x})$ の一次の項 $\mathbf{b}^T \mathbf{x}$ を消去するために、 $J_3(\mathbf{x})$ を平方完成する。まず、制約を考慮しない場合の式(4.3)の評価関数 $J_3(\mathbf{x})$ を最小とする解 \mathbf{x}_{opt} を求める。式(4.3)を \mathbf{x} に関して微分する。

$$\frac{dJ_3(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (7.5)$$

\mathbf{A} は正定対称行列であるため \mathbf{A} の逆行列が存在し、式(7.5)より、 \mathbf{x}_{opt} は式(7.6)と求まる。

$$\mathbf{x}_{opt} = -\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (7.6)$$

そして、 \mathbf{x} から \mathbf{x}_{opt} までの誤差を $\Delta\mathbf{x}$ とし、 $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{opt}$ を式(4.3)の評価関数 $J_3(\mathbf{x})$ に代入すると

$$J_3(\Delta\mathbf{x}) = \Delta\mathbf{x}^T \mathbf{A} \Delta\mathbf{x} - \frac{1}{4}\mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c \quad (7.7)$$

が導出される。これにより、評価関数は新たな変数 $\Delta\mathbf{x}$ の2次の項と定数項のみで表すことができる。これに伴い $C_{BMI}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ は $\Delta\mathbf{x}$ と \mathbf{X} に関する制約条件 $C_{BMI}(\Delta\mathbf{x}, \mathbf{X})$ として書くことができる。次に、制約条件 $C_{BMI}(\Delta\mathbf{x}, \mathbf{X})$ をLMI化するために式(7.8)の変数変換をする。

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{X})\Delta\mathbf{x} \quad (7.8)$$

ここで、 $C_{LMI}(\mathbf{y}, \mathbf{Y})$ はLMIであり、 $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ は \mathbf{X} に関してアフィンな正定対称行列であるとする。仮定2より、制約条件 $C_{BMI}(\Delta\mathbf{x}, \mathbf{X})$ をLMI化する変数変換が存在する。このとき、式(7.7)の評価関数を \mathbf{y} 、 \mathbf{Y} を用いて書き直すと式(7.9)となる。

$$J_3(\mathbf{y}, \mathbf{Y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{4}\mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + c \quad (7.9)$$

評価関数最小化のための行列不等式を導出するために、 $\gamma_3 > J_3(\mathbf{y}, \mathbf{Y})$ となる γ_3 を導入する。このとき $\gamma_3 > J_3(\mathbf{y}, \mathbf{Y})$ はシュール補題を適用することで

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & \gamma_3 + \frac{1}{4}\mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} - c \end{bmatrix} > 0 \quad (7.10)$$

となる。式(7.10)において γ_3 を最小化することと評価関数 $J_3(\mathbf{y}, \mathbf{Y})$ を最小化することは等価である。最後に、式(7.1)の最適化問題は、式(7.11)と書き直すことができる。

$$\min_{\gamma_3, \mathbf{y}, \mathbf{Y}} \gamma_3 \quad \text{s.t. Eq. (7.10) and } C_{LMI}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}) \quad (7.11)$$

$C_{LMI}(\mathbf{y}, \mathbf{Y})$ はLMIであるが、式(7.10)は(1,1)成分に \mathbf{Y} の二次の項が含まれるため非凸である。そこで、式(7.10)を満たすためのLMI表現の十分条件を提案する。

7.3.3 LMI表現の十分条件

式(7.10)に関して次の定理が成り立つ。

定理 6. 式(7.12), 式(7.13)を満たす $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$, $\gamma_3 \in \mathbb{R}$ が存在するとき, それらの変数は式(7.10)を満たす。

$$\mathbf{Y} > \alpha \mathbf{A} \quad (7.12)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \mathbf{Y} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & \gamma_3 + \frac{1}{4} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} - c \end{bmatrix} > 0 \quad (7.13)$$

ただし, $\alpha > 0$ はある正定数である。

証明. 式(7.12)より, $\mathbf{A}^{-1} > \alpha \mathbf{Y}^{-1}$ が成り立つため,

$$\mathbf{Y} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y} > \mathbf{Y} \alpha \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Y} \quad (7.14)$$

$$= \alpha \mathbf{Y} \quad (7.15)$$

が成り立つ。このとき, $\mathbf{Y} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y} - \alpha \mathbf{Y} =: \mathbf{Z} (> 0)$ と置くと, 式(7.10)は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & \gamma_3 + \frac{1}{4} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{Y} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & \gamma_3 + \frac{1}{4} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} - c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

となる。式(7.13)より式(7.16)の右辺第一項は正定対称行列であり, $\mathbf{Z} > 0$ より第二項は半正定対称行列である。よって, 式(7.16)は正定対称行列となり, 式(7.10)が満たされる。 ■

以上より, 式(7.11)の代わりに式(7.17)の凸最適化問題を解く。

$$\min_{\gamma_3, \mathbf{y}, \mathbf{Y}(\mathbf{X})} \gamma_3 \quad \text{s.t. Eqs. (7.12) - (7.13) and } C_{LMI}(\mathbf{y}, \mathbf{Y}) \quad (7.17)$$

ただし, $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ は \mathbf{X} の従属変数となっていることに注意する。式(7.17)は変数に関して凸性を有しているため, 式(7.17)の大域的最適解 $\hat{\gamma}_3, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{X}})$ は容易に得ることができる。得られた解より

$$\Delta \hat{\mathbf{x}} := \hat{\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{X}})^{-1} \hat{\mathbf{y}} \quad (7.18)$$

を計算し, 制約 $C_{BMI}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ を満たす最適解 $\hat{\mathbf{x}}_{opt}$ を次式により得る。

$$\hat{\mathbf{x}}_{opt} = \mathbf{x}_{opt} + \Delta \hat{\mathbf{x}} \quad (7.19)$$

7.4 切り換えシステムにおけるフィードバックゲイン設計

7.4.1 制御対象と制御系

式(7.20)の離散時間系, N 個のフィードバック制御された一入力切替システムを考える.

$$\mathbf{x}_g[k+1] = \mathbf{A}_{gi}\mathbf{x}_g[k] + \mathbf{b}_{gi}u_g[k] \quad (7.20)$$

$$u_g[k] = -\mathbf{f}_{gi}^T \mathbf{x}_g[k], \quad i = 1, \dots, N \quad (7.21)$$

$$\mathbf{A}_{gi} \in R^{n_g \times n_g}, \quad \mathbf{b}_{gi} \in R^{n_g \times 1}, \quad \mathbf{f}_{gi} \in R^{n_g \times 1}$$

本節では式(7.21)のフィードバックゲイン \mathbf{f}_{gi} の設計方法について述べる.

7.4.2 状態フィードバックゲイン設計

式(7.21)による切り換えシステムが安定となるための十分条件は次式を満たす行列 $\mathbf{P} \in R^{n_g \times n_g}$ が存在することである⁴⁸⁾.

$$(\mathbf{A}_{gi} - \mathbf{b}_{gi}\mathbf{f}_{gi}^T)^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_{gi} - \mathbf{b}_{gi}\mathbf{f}_{gi}^T) - \mathbf{P} < 0, \quad \mathbf{P} > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (7.22)$$

式(7.22)を満たす \mathbf{f}_{gi} を設計することで, 式(7.20), 式(7.21)の切り替え系は安定となる. さらに, 高い制御性能を有するゲインを設計するために評価関数を導入する. 本論文では, 目標となるゲイン \mathbf{f}_{gi}^* , $i = 1, \dots, N$ を設定し, そのゲインとの誤差を小さくすることで高い制御性能を有するゲインを設計する. そこで, 次式の二次式で表現される評価関数を導入する.

$$J_3(\mathbf{f}_g) = (\mathbf{f}_g - \mathbf{f}_g^*)^T \mathbf{M} (\mathbf{f}_g - \mathbf{f}_g^*) \quad (7.23)$$

$$= \mathbf{f}_g^T \mathbf{M} \mathbf{f}_g - 2\mathbf{f}_g^T \mathbf{M} \mathbf{f}_g^* + \mathbf{f}_g^{*T} \mathbf{M} \mathbf{f}_g^*, \quad (7.24)$$

$$\mathbf{f}_g := \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{g1}^T & \dots & \mathbf{f}_{gN}^T \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{f}_g^* := \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{g1}^{*T} & \dots & \mathbf{f}_{gN}^{*T} \end{bmatrix}^T$$

ここで, $\mathbf{M} > 0$ は重み行列である. 以上より, 次式の最適化問題を解くことで式(7.20), 式(7.21)の切り替え系を安定化し, 高い制御性能を有するゲイン \mathbf{f}_{gi} を得ることができる.

$$\min_{\mathbf{f}_g, \mathbf{P}} J_3(\mathbf{f}_g) \quad \text{s.t. Eq. (7.22)} \quad (7.25)$$

しかし, 式(7.25)の最適化問題は \mathbf{f}_g , \mathbf{P} に関して非凸な最適化問題である. 次節で, 提案した十分条件により式(7.25)をLMI表現による凸最適化問題に帰着する.

7.4.3 提案手法によるLMI化

まず, 式(7.5), 式(7.6)により $\Delta \mathbf{f}_g$ は

$$\Delta \mathbf{f}_g = \mathbf{f}_g - \mathbf{f}_g^* =: \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f}_{g1} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{f}_{gN} \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

と計算され, 式(7.24)の評価関数は

$$J_3(\Delta \mathbf{f}_g) = \Delta \mathbf{f}_g^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{f}_g \quad (7.27)$$

と書ける. $\Delta \mathbf{f}_g$ を用いて式(7.22)を書き直すと

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{gi}^* - \mathbf{b}_{gi} \Delta \mathbf{f}_{gi}^T)^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_{gi}^* - \mathbf{b}_{gi} \Delta \mathbf{f}_{gi}^T) - \mathbf{P} < 0, \quad \mathbf{P} > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (7.28) \\ \mathbf{A}_{gi}^* := \mathbf{A}_{gi} - \mathbf{b}_{gi} \mathbf{f}_{gi}^{*T} \end{aligned}$$

と書ける. ここで, 式(7.28)をLMI制約とするために式(7.29)の変数変換をする.

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X} \Delta \mathbf{f}_{gi}, \quad \mathbf{X} := \mathbf{P}^{-1} \quad (7.29)$$

このとき, シュール補題を用いると式(7.28)は次のように変数に関してLMIとなる.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{A}_{gi}^* \mathbf{X} - \mathbf{b}_{gi} \mathbf{y}_i^T \\ \mathbf{X} \mathbf{A}_{gi}^{*T} - \mathbf{y}_i \mathbf{b}_{gi}^T & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (7.30)$$

このとき, 式(7.27)の評価関数は

$$J_3(\mathbf{y}, \mathbf{Y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{y}, \quad (7.31)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) := \begin{bmatrix} \mathbf{X} & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{X} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} := \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

となる. $\gamma_3 > J_3(\mathbf{y}, \mathbf{Y})$ となる γ_3 を導入し, シュール補題を適用すると $\gamma_3 > J_3(\mathbf{y}, \mathbf{Y})$ は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Y} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & \gamma_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (7.33)$$

となる．式(7.33)において γ_3 を最小化することによって評価関数 $J_3(\mathbf{y}, \mathbf{Y})$ を最小化できるが，式(7.33)は \mathbf{Y} の積が含まれるためLMIではない．そこで，定理6より以下の十分条件を用いる．

$$\mathbf{Y} > \alpha \mathbf{M} \quad (7.34)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \mathbf{Y} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & \gamma_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (7.35)$$

ただし， $\alpha > 0$ はある正定数である．以上より，式(7.36)の最適化問題を解くことによりフィードバックゲインを設計する．

$$\min_{\gamma_3, \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}(\mathbf{X})} \gamma_3 \quad \text{s.t. Eq. (7.34), Eq. (7.35) and Eq. (7.30)} \quad (7.36)$$

ただし， \mathbf{Y} と \mathbf{y} は式(7.32)によって定義される．式(7.36)を解いて得られた解 $\hat{\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{X}})$ ， $\hat{\mathbf{y}}$ より

$$\Delta \hat{\mathbf{f}}_g := \hat{\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{X}})^{-1} \hat{\mathbf{y}} \quad (7.37)$$

を計算し

$$\hat{\mathbf{f}}_g = \mathbf{f}_g^* + \Delta \hat{\mathbf{f}}_g \quad (7.38)$$

によりフィードバックゲイン $\hat{\mathbf{f}}_g =: [\hat{\mathbf{f}}_{g1}^T \cdots \hat{\mathbf{f}}_{gN}^T]^T$ を得る．

7.5 数値例におけるフィードバックゲインの設計と制御性能の検証

7.5.1 制御対象と設計結果

式(7.20)において， $N = 3$ とし，各行列を

$$\mathbf{A}_{g1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{g2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{g3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad (7.39)$$

$$\mathbf{b}_{g1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{g2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{g3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

とする．このとき，以下の重み

$$\mathbf{Q}_1 = \text{diag}[10, 10], \quad r_1 = 1 \quad (7.41)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \text{diag}[10, 1], \quad r_2 = 1 \quad (7.42)$$

$$\mathbf{Q}_3 = \text{diag}[1, 10], \quad r_3 = 1 \quad (7.43)$$

を設定し、最適制御に基づきフィードバックゲイン

$$\mathbf{f}_{g1}^* = \begin{bmatrix} -0.6180 \\ 0.3820 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{g2}^* = \begin{bmatrix} 1.9993 \\ -3.0000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{g3}^* = \begin{bmatrix} 0.0500 \\ -0.2500 \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

を設計した。ここで、 \mathbf{f}_{gi}^* に関して式(7.22)の共通リアプノフ解 \mathbf{P} は存在しない。その他の設定したパラメータを以下に示す。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (7.45)$$

$$\alpha = 1 \quad (7.46)$$

以上の準備の下、式(7.36)を解いて得られた解を以下に示す。

$$\hat{\mathbf{f}}_{g1} = \begin{bmatrix} -0.6555 \\ 0.3445 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_{g2} = \begin{bmatrix} 1.9993 \\ -2.9257 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_{g3} = \begin{bmatrix} 0.0500 \\ -0.2519 \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

このとき、 $\hat{\gamma}_3$ は $\hat{\gamma}_3 = 0.0124$ であり、式(7.47)における式(7.24)の評価関数の値は $J_3(\hat{\mathbf{f}}_g) = 0.0058$ であった。これより、この例において十分条件の保守性は小さいことが確認できた。

7.5.2 コスト保証制御との比較

本論文では、コスト保証⁴⁹⁻⁵¹⁾に基づきフィードバックゲインを設計した場合と制御性能を比較する。文献⁵¹⁾より、以下の不等式制約

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_i + \mathbf{G}_i^T - \mathbf{S}_i & \mathbf{G}_i \mathbf{A}_{gi}^T - \mathbf{v}_i \mathbf{b}_{gi} & \mathbf{G}_i^T & \mathbf{v}_i^T \\ \mathbf{A}_{gi} \mathbf{G}_i - \mathbf{b}_{gi} \mathbf{v}_i^T & \mathbf{S}_j & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_i & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_i^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & r_i^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad (7.48)$$

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$$

を満たす正定対称行列 $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^{n_g \times n_g}$ 、ベクトル $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{1 \times n_g}$ 、行列 $\mathbf{G}_i \in \mathbb{R}^{n_g \times n_g}$ を用いて、フィードバックゲインを $\mathbf{f}_{gi} = \mathbf{G}_i^{-T} \mathbf{v}_i^T$ とすることによって切り換えシステムについて以下の関係。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ \mathbf{x}_g[k]^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_g[k] + u_g[k] r_i u_g[k] \} < \mathbf{x}_g[0]^T \mathbf{S}_{r_0}^{-1} \mathbf{x}_g[0] \quad (7.49)$$

が保証される．ここで， r_0 は初期のサブシステムを意味する．そこで，初期のサブシステム r_0 と状態の初期値 $\mathbf{x}_g[0]$ が既知の場合，以下の最適化問題を解くことで式 (7.49) を小さくするフィードバックゲインが設計できる．

$$\min_{\tau, \mathbf{S}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{G}_i} \tau \quad \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} -\tau & \mathbf{x}_g[0]^T \\ \mathbf{x}_g[0] & -\mathbf{S}_{r_0} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{and Eq. (7.48)} \quad (7.50)$$

式 (7.48) における行列 \mathbf{Q}_i , r_i は式 (7.41), 式 (7.42), 式 (7.43) とし, $r_0 = 2$, $\mathbf{x}_g[0] = [1 \ 0.5]^T$ とし, 式 (7.50) の最適化問題を解き次式のフィードバックゲイン $\mathbf{f}_{g_i}^{cost}$

$$\mathbf{f}_{g1}^{cost} = \begin{bmatrix} -0.7175 \\ 0.2825 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{g2}^{cost} = \begin{bmatrix} 2.065 \\ -1.737 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{g3}^{cost} = \begin{bmatrix} 0.0500 \\ -0.2809 \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

を得た．式 (7.51) のゲイン $\mathbf{f}_{g_i}^{cost}$ を用いて制御性能を比較する．

7.5.3 時間応答による検証

サンプリング周期 T_s を $T_s = 0.01$ s, $\mathbf{x}_g[k]$ の初期値を $\mathbf{x}_g[0] = [1 \ 0.5]^T$ とし, 数値シミュレーションを行った．切り換え信号は図 7.1 のようにランダムに与えた． $u_g[k]$ を図 7.2 に $x_{g1}[k]$, $x_{g2}[k]$ をそれぞれ図 7.3, 図 7.4 に示す．実線が提案手法により設計したフィードバックゲインを用いた場合, 破線がコスト保証により設計したフィードバックゲインを用いた場合である．図 7.3, 図 7.4 から提案手法の方が振動を抑制できていることがわかる．これより, 提案した最適化問題を解くことで制御性能の高いフィードバックゲインが設計できることが確認できた．

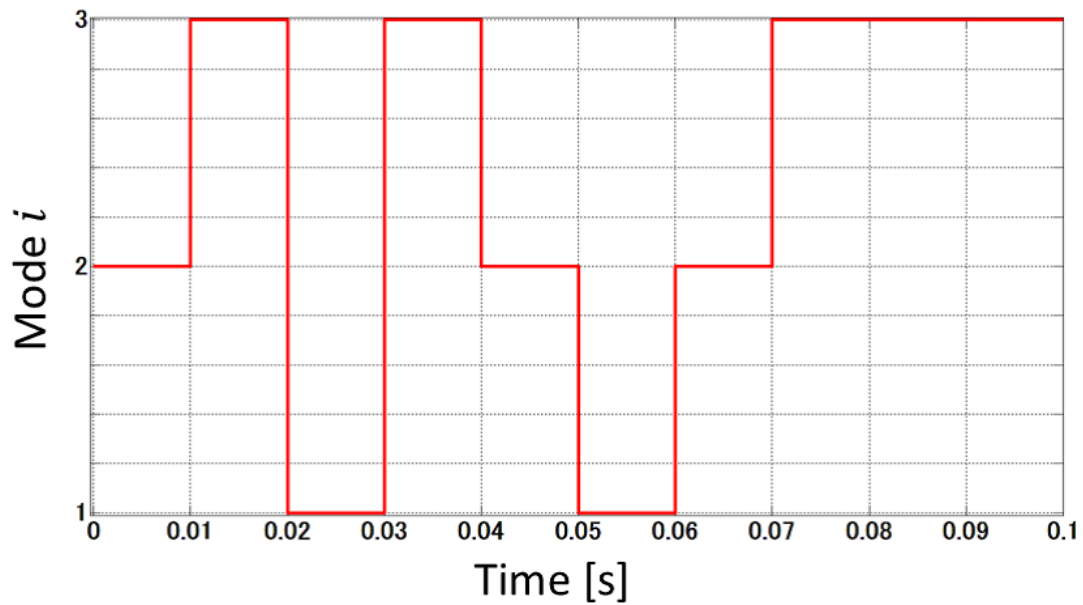
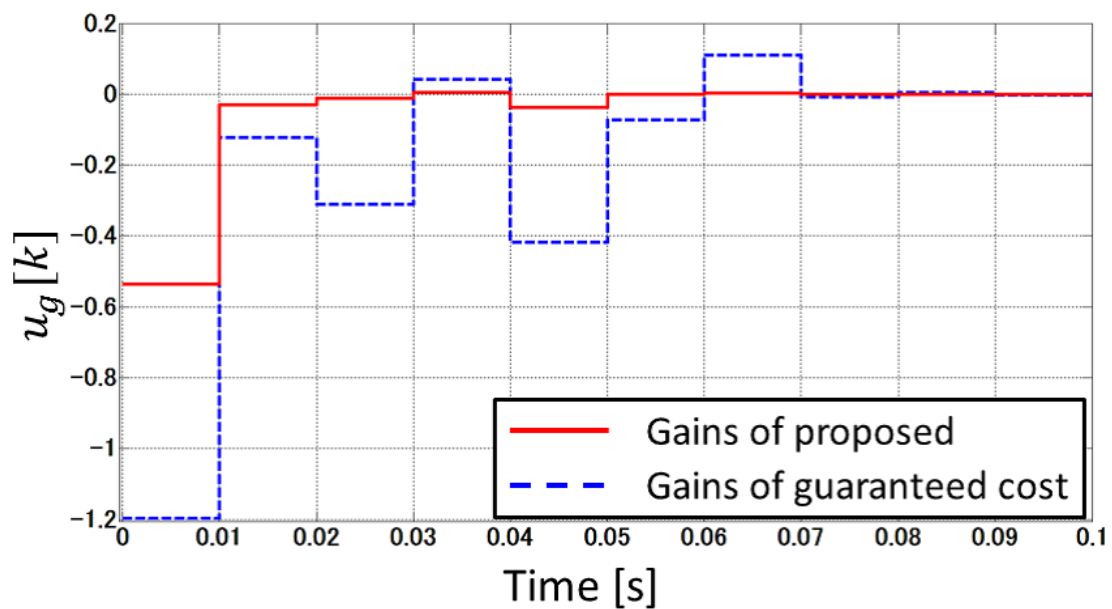


Fig. 7.1 Switching signal

Fig. 7.2 Time histories of input $u_g[k]$

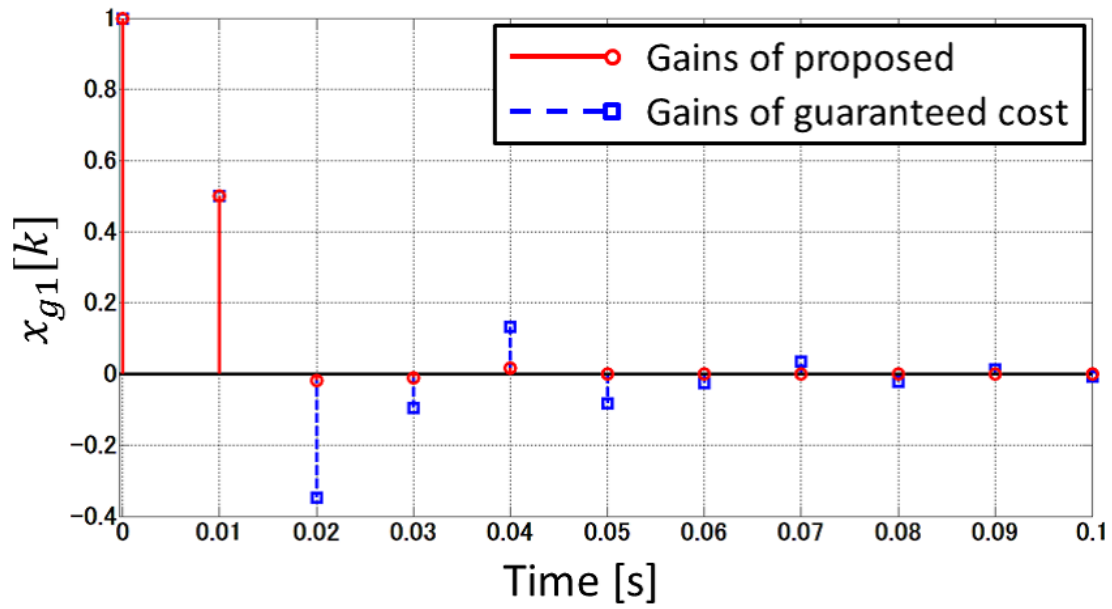


Fig. 7.3 Time responses of $x_{g1}[k]$

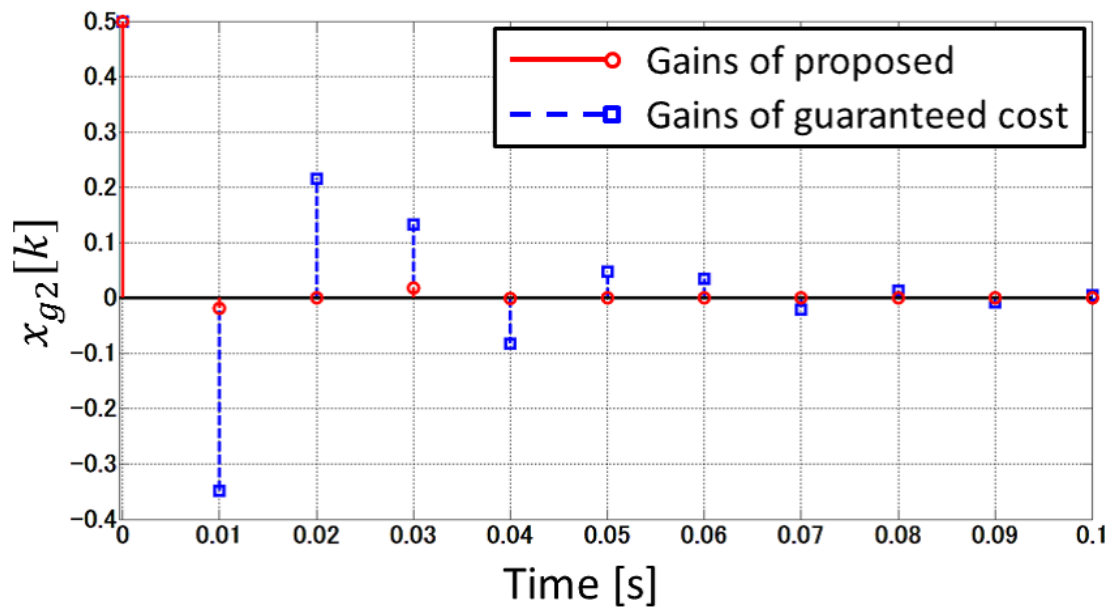


Fig. 7.4 Time responses of $x_{g2}[k]$

7.6 まとめ

第5章ではBMI制約のもとでの2次評価関数最小化問題のLMI化方法を述べた。ここでは、変数変換および平方完成を施すことにより十分条件が適用できる形式に最適化問題を変形した。そして、その最適化問題をLMI化する十分条件を示し、証明を与えた。提案したLMI化法を切り替えシステムに対するフィードバックゲインの設計に適用し、数値シミュレーションによって有効性を確認することができた。本論文で提案した十分条件と文献³⁸⁻⁴¹⁾で提案されている十分条件との関係性を明らかにすることが今後の課題である。

第8章 結論

本論文では、PFCの導入による非最小位相系に対する外乱推定性能の向上を目的とし、PFCの設計問題に関して

1. KYP補題を用いた凸最適化問題への定式化
2. ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いた凸最適化問題への定式化

を行った。さらに、数値例および三慣性軸ねじり振動系に対して提案した手法によりPFCを設計した。そして、数値シミュレーションおよび実機実験により外乱推定性能の向上が図れる場合があることを示した。また、多入出力系に対するPFC設計方法の構築を目指し、そのはじめの取り組みとして、BMI制約のもとでの2次評価関数最小化問題をLMI化する方法の検討を行った。以下に、本研究で得られた結論を各章ごとに示す。

第1章では研究の背景と目的、本論文の構成を述べた。

第2章では本研究で扱う外乱推定問題を定式化した。そして、PFCの導入方法とPFCの三つの設計要求をまとめた。

第3章ではPFCの設計問題をKYP補題を用いて凸最適化問題に定式化する方法を述べた。まず、制御対象とPFCの周波数応答誤差を表す評価関数を設計変数に関して凸な形式によって導入した。そして、拡大系の最小位相性およびPFCの安定性をKYP補題を用いて最適化問題の際の制約条件として用いる方法を述べた。そこでは、安定化したい多項式を分子多項式に持つ、安定でバイプロパーな伝達関数を導入した。そして、導入した伝達関数の最小位相性の条件をKYP補題を用いた強正実条件として表現することで、設計変数に関するLMI制約として書き表すことができる。ただし、このLMI制約は本来の設計要求を満足するための十分条件であることに注意する。ここで、導入した伝達関数の分母多項式は事前に与える必要があるが、その多項式の設定指針についても本論文では与えた。これにより、PFC設計問題をLMI表現の凸最適化問題に定式化し、システムティックな設計方法を構築することができた。また、制約の保守性を低減するための繰り返し計算法も述べた。第3章の方法では、多項式を設定する必要があるがPFCの次数を設計者が指定できるという利点がある。そして、数値例に対して適用し、数値シミュレーションにより推定性能の向上が図れることを示した。

第4章ではPFCの設計問題をディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いて凸最適化問題に定式化する方法を述べた。この方法では制御対象の逆関数

に注目し、閉ループ系を安定化するプロパーな制御器をPFCとして設計する。このとき、制御対象の逆関数は一般に非プロパーとなるため、ディスキリプタ表現を導入した。そして、ディスキリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いることでPFCを設計し、設計されたPFCが拡大系を最小位相化することを証明した。そして、PFCが安定か否かを判別し、不安定であった場合は全域通過フィルタを導入することで安定なPFCに変換する方法を述べた。この方法では H_∞ 制御理論を用いるため、PFCの次数は高次になる傾向があるが、設定するパラメータは周波数重み関数だけであり、直感的に設計することができるという利点がある。ディスキリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いた方法の有効性は数値例によって検証し、推定性能の向上を確認できた。

第5章では第3章および第4章の各手法における拡大系の最小位相性を保証する制約条件の関係を考察した。第3章のKYP補題を用いる方法の方がPFCの次数を任意に設定でき、さらに、多項式の設定の自由度があるため、第4章のディスキリプタシステムに対する H_∞ 制御理論を用いる方法では考慮できない範囲の設計パラメータを探索できることを示した。ただし、一般にKYP補題の制約条件に用いる多項式を適切に設定することは難しい場合が多い。そのため、高次のPFCを許容できるのであれば、ディスキリプタシステムに対する H_∞ 制御理論に基づく方法の方がシステムティックにPFCが得られると考えられる。

第6章では実験機の三慣性軸ねじり振動系に対して外乱推定を行いPFCの導入の効果を検証した。各手法においてそれぞれPFCを設計し外乱推定することで、従来手法よりも外乱推定性能の向上が図れる場合があることを実機実験により確認した。

第7章では多入出力系におけるPFC設計を目的とし、そのはじめの取り組みとして、BMI制約のもとでの2次評価関数最小化問題のLMI化方法を述べた。ここでは、変数変換および平方完成を施すことにより十分条件が適用できる形式に最適化問題を変形した。そして、その最適化問題をLMI化する十分条件を示し、証明を与えた。提案したLMI化法は、切り替えシステムに対するフィードバックゲインの設計に適用し、数値シミュレーションによって有効性を確認することができた。

謝辞

信州大学工学部 機械システム工学科 千田有一教授には、6年間の研究室生活においてあらゆる面でお世話になりました。学部4年生の頃、研究への取り組み方や成果報告のまとめ方に関して何もわからなかった私に対して、丁寧に一から教えていただきました。そして、研究の本質を見定め、研究に関して様々なご指導を受け賜りました。また、進路や研究の考え方について悩んでいた際に、親身になって相談に乗っていただきアドバイスをいただきました。そのおかげでここまでたどり着くことができたと思います。謹んで、感謝申し上げます。

信州大学工学部 機械システム工学科 池田裕一元助教（現湘南工科大学講師）には、研究や研究生活についての様々なアドバイスをいただきました。深く感謝いたします。

本論文の審査において、大変有益なご指導とご教示をいただいた、熊本大学工学部 機械システム工学科 水本郁朗准教授，信州大学工学部 機械システム工学科 深田茂生教授，酒井悟准教授，高山潤也准教授に深く感謝いたします。

千田研究室事務補佐員 山岸彩子殿には、事務手続きおよび英文校正において多くの助力をいただきました。また、研究のことに限らず多くのことで相談に乗っていただきました。深くお礼申し上げます。

千田研究室元事務補佐員 ハービー牧子殿には、論文執筆の際の英文校正において多大な助力をいただきました。ここに深く感謝いたします。

研究および研究室生活について多くのご指導をいただいた研究室の先輩，ともに切磋琢磨できる良い仲間として支えて頂いた同輩，そして，気さくに話し相手になって様々な議論をさせていただいた後輩に心から感謝いたします。

これまで私を支え，応援していただいた両親に深く感謝いたします。両親の全面的なサポートのおかげで学生生活に励むことができました。

最後に，本研究の一部はJSPS 科研費 16J07805 の助成を受けたものです。記して謝意を表します。

多くの皆様に支えられて博士論文を執筆することができました。ここに，厚くお礼申し上げます。

参考文献

- 1) 本家, 井上, 西田, 西村: 外乱オブザーバを用いた弾性ロボットの運動と振動の制御 (弾性振動を考慮した外乱オブザーバの適用), 日本機械学会論文集 (C編), **60**-577, 3045/3050 (1994)
- 2) 山口, 平田, 藤本: ナノスケールサーボ制御 高速・高精度に位置を決める技術, 280, 東京電機大学出版局 (2007)
- 3) 平田光男: H_∞ 制御によるモーションコントロール, 計測と制御, **39**-10, 635/638 (2000)
- 4) X. Chen, S. Guo and T. Fukuda: A VSS Disturbance Observer and Its Applications, Proc. 1998 IEEE Int. Conf. Control Appl., **1**, 403/407 (1998)
- 5) X. Chen, S. Komada and T. Fukuda: Design of a nonlinear disturbance observer, IEEE Trans. Ind. Electron., **47**-2, 429/437 (2000)
- 6) C. Edwards, S. K. Spurgeon and R. J. Patton: Sliding mode observers for fault detection and isolation, Automatica, **36**-4, 541/553 (2000)
- 7) H. Shim and Y.-J. Joo: State space analysis of disturbance observer and a robust stability condition, Proc. 46th IEEE Conf. Decision and Control, 2193/2198 (2007)
- 8) H. Shim and N. H. Jo: An almost necessary and sufficient condition for robust stability of closed-loop, Automatica, **45**-1, 296/299 (2009)
- 9) C.-F. Lin and W.-C. Su: Linear observer design using the inverse method for systems with matched disturbances, Proc. 2010 Amer. Control Conf., 617/622 (2010)
- 10) Y. Joo, G. Park, J. Back and H. Shim: Embedding Internal Model in Disturbance Observer With Robust Stability, IEEE Trans. Autom. Control, **61**-10, 3128/3133 (2015)

- 11) N. H. Jo, C. Jeon and H. Shim: Noise Reduction Disturbance Observer for Disturbance Attenuation and Noise Suppression, *IEEE Trans. Ind. Electron.*, **64-2**, 1381/1391 (2017)
- 12) D. Soffker, T.-J. Y. and P. C. Muller: State estimation of dynamical systems with nonlinearities by using proportional-integral observer, *Int. J. of Syst. Sci.*, **26-9**, 1571/1582 (1995)
- 13) H. Shim, N. H. Jo and Y.-I. Son: A new disturbance observer for non-minimum phase linear systems, *Amer. Control Conf.*, 3385/3389 (2008)
- 14) M.-S. Chen, S.-Y. Lin, M.-L. Tseng, Y.-L. Yeh and J.-Y. Yen: Robust State-and-Disturbance Observer Design for Linear Non-minimum-phase Systems, *Asian J. of Control*, **18-3**, 1135/1141 (2016)
- 15) H.-T. Seo, K.-S. Kim and S. Kim: Generalized design of disturbance observer for non-minimum phase system using an H-infinity approach, 2013 13th Int. Conf. Control, Automation and Syst., 1/4 (2013)
- 16) L. Wang and J. Su: Disturbance rejection control for non-minimum phase systems with optimal disturbance observer, *ISA Trans.*, **57**, 1/9 (2015)
- 17) 佐藤昌之: 低域通過逆システムの一設計法- H_∞ ノルムの観点から-, 計測自動制御学会論文集, **36-12**, 1180/1182 (2000)
- 18) Y. Chida, S. Sekiguchi, H. Kobayashi and Y. Ikeda: Unknown disturbance estimator design for non-minimum phase plants using parallel feed-forward model, *Proc. 2013 ASME DSCC*, 1/8 (2013)
- 19) 熱海, 有坂, 清水, 山口: ハードディスク装置の機構共振制振サーボ技術, 日本機械学会論文集 C 編, **68-675**, 3298/3305 (2002)
- 20) 川福, 大津, 岩崎, 平井, 小林, 奥山: ハードディスク装置の高精度位置決め制御 第一報: 偏分反復法を用いた高精度シミュレータの構築, 電気学会論文誌 D, **125-12**, 1069/1075 (2005)
- 21) 土屋, 柏瀬: 大規模宇宙構造物 (LSS) の制御, 計測と制御, **26-10**, 855/862 (1987)
- 22) 吉田和夫: 柔軟構造物のモデリングと制御理論, 計測と制御, **32-4**, 276/283 (1993)
- 23) 武井, 藤本, 堀: 昇圧コンバータにおける平滑コンデンサの小型化を目的とした負荷電流フィードフォワード制御, 電気学会論文誌 D, **135-5**, 457/466 (2015)

- 24) 萩原, 荒木: サンプル値系の極限零点の性質について, 電気学会論文誌 C, **110-4**, 235/244 (1990)
- 25) 阿部, 延山: むだ時間系の制御, 計測と制御, **42-4**, 316/319 (2003)
- 26) 阿部, 延山: むだ時間システムの制御-入門から最近の動向まで 第一回: むだ時間システム入門 I-伝達関数からのアプローチ-, 計測と制御, **44-11**, 799/804 (2005)
- 27) H. Kim, S. Kim, J. Back, H. Shim and J. H. Seo: Design of stable parallel feedforward compensator and its application to synchronization problem, *Automatica*, **64**, 208/216 (2016)
- 28) L. I. Allerhand, D. Schwarzmann and J. Missler: Performance guarantees and performance optimization of MRAC for non-minimum phase systems, 2015 IEEE 54th Annu. Conf. Decision and Control (CDC), 5642/5647 (2015)
- 29) I. Bar-Kana: Parallel feedforward and simplified adaptive control, *Int. J. of Adaptive Control and Signal Process.*, **1-2**, 95/109 (1987)
- 30) M. Inoue, T. Wada, M. Ikeda and E. Uezato: State-space H^∞ controller design for descriptor systems, *Automatica*, **59**, 164/170 (2015)
- 31) 岡島, 一政, 松永: 非最小位相系に対するモデル誤差抑制補償器の設計, 計測自動制御学会論文集, **51-11**, 794/801 (2015)
- 32) J. B. Hoagg, S. L. Lacy, R. S. Erwin and D. S. Bernstein: First-order-hold sampling of positive real systems and subspace identification of positive real models, *Proc. 2004 Amer. Control Conf.*, 861/866 (2004)
- 33) D. N. Miller and R. A. D. Callafon: Subspace identification with eigenvalue constraints, *Automatica*, **49-8**, 2468/2473 (2013)
- 34) 阿部, 井上, 松林, 足立: 周波数領域における事前情報を考慮した部分空間同定法, 計測自動制御学会論文集, **52-1**, 11/18 (2016)
- 35) F. Demourant and C. P. Vassal: A new frequency-domain subspace algorithm with restricted poles location through LMI regions and its application to a wind tunnel test, *International Journal of Control*, **90-4**, 779/799 (2017)
- 36) S. Kumata, K. Narumi, T. Iida, N. Maruyama, M. Tanemura and Y. Chida: Control design for a pneumatic isolation table including different time delays dependent on control input polarity, *IFAC* (2017)

- 37) Y. Nakamura, K. Hirata, K. Sugimoto and K. Kogiso: Cooperative networked control with gain switching observer, 2007 *Intelligent Control Symp. Int. Conf. (Singapore)* 184-9
- 38) 下村, 玉越, 藤井: LMI 非共通解による多目的制御系設計-反復計算による方法-, 計測自動制御学会論文集, **36-11**, 943/951 (2000)
- 39) T. Shimomura and T. Fujii: Multiobjective Control Design via Successive Over-bounding of Quadratic Terms, Proc. 39th IEEE Conf. Decision and Control, 2763/2768 (2000)
- 40) 下村卓: 線形行列不等式の非共通解を用いた多目的制御系設計, 計測と制御, **41-11**, 811/818 (2002)
- 41) J. Wang and D. A. Wilson: Continuous-time H_2/H_∞ control with non-common Lyapunov variables via convergent iterations, European Control Conference (ECC), 405/410 (2003)
- 42) 蛭原義雄: LMI によるシステム制御 ロバスト制御系設計のための体系的アプローチ, 236, 森北出版株式会社 (2012)
- 43) 岩崎徹也: LMI と制御, 216, 昭晃堂 (1997)
- 44) 岩井, 水本, 大塚: 単純適応制御 SAC, 212, 森北出版株式会社 (2008)
- 45) 須田信英: 制御系における零点 [1] 極と零点の定義, 計測と制御, **29-2**, 157/165 (1990)
- 46) 藤本, J. M. A Scherpen: 非線形系の特異値解析と平衡実現, 計測と制御, **42-10**, 814/820 (2003)
- 47) 岩井, 井上, 川路: オブザーバ, 255, コロナ社 (1988)
- 48) Hai L and Antsaklis P J: Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results, 2009 *IEEE Trans. Automat. Contr.* **54** 308-22
- 49) G.-H. Yang, J. L. Wang and Y. C. Soh: Guaranteed cost control for discrete-time linear systems under controller gain perturbations, 2000 *Linear algebra and its applications* **312** 161-80
- 50) H. Mukaidani, Y. Ishii, B. Nan and T. Tsuji: LMI based neurocontroller for guaranteed cost control of discrete-time uncertain system, 2004 *IEEE Decision and Control* **1** 809-14

-
- 51) Z. Ying, D. Guangren and F. Yanming: Guaranteed Cost Control for Uncertain Discrete-time Switched Systems, 2006 *IEEE Intelligent Control and Automation Proc. Cong. (Dalian)* **1** 1309-13

研究業績

学位申請に用いる原著論文

1. 種村昌也, 千田有一: ディスクリプタ形式を用いた並列フィードフォワード補償器の設計と非最小位相系の外乱推定性能の向上, 計測自動制御学会論文集, **54-4** (2018年4月号に掲載予定)
2. 種村昌也, 千田有一, 関口彰太, 小林弘幸: 並列モデルを用いた非最小位相系の最小位相化による未知外乱推定器の設計と実験検証, 計測自動制御学会論文集, **53-2**, 152/161 (2017)
3. M. Tanemura and Yuichi Chida: Linear Matrix Inequality Method for a Quadratic Performance Index Minimization Problem with a class of Bilinear Matrix Inequality Conditions, Journal of Physics, **744-1**, 1/8 (2016)
4. M. Tanemura, Yuichi Chida, Hiroyuki Kobayashi and Mitsuo Hirata: Parallel Feedforward Model for Improving Estimates of Unknown Disturbances to Non-Minimum-Phase Systems, SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration (JCMSI), **8-5**, 354/361 (2015)

学位論文のテーマに直接関係しない原著論文

5. 種村昌也, 千田有一: 単純適応制御における周波数応答マッチングに基づくPFCの設計, 計測自動制御学会論文集, **51-8**, 579/586 (2015)
6. Masaya Tanemura and Yuichi Chida: PFC design method for SAC based on the stability theorem of the descriptor system and frequency response fitting, The Japan Society of Mechanical Engineers(JSME), **2-3**, 14-00547 (2015)
7. 種村昌也, 山城始之, 千田有一, 丸山直人: 反共振を含む制御対象におけるSACの問題点とPFCの設計による改善, 日本機械学会論文集, **81-824**, 14-00474 (2015)

学位論文のテーマに直接関係しない国際会議発表論文（査読付き，発表者*）

8. Masaya Tanemura*, Yuichi Chida, Hiroyuki Kobayashi and Mitsuo Hirata : Parallel feedforward design using LMI for unknown disturbance estimation of non-minimum phase system, Proceedings of SICE annual conference 2014, pp.1998-2003 (2014)
9. Masaya Tanemura*, Yuichi Chida, Yuichi Ikeda : PFC design method based on frequency response fitting -Assurance of minimum phase property by stability theorem of descriptor system-, Proceedings of the 12th international conference on motion and vibration control (2014)
10. Satoshi Kumata*, Kenta Narumi, Tomoharu Iida, Naoto Maruyama, Masaya Tanemura and Yuichi Chida : Control design for a pneumatic isolation table including different time delays dependent on control input polarity, Proceedings of IFAC 2017, Vol.50, No.1, pp.6029-2034 (2017)

関連する主な国内会議発表（発表者*）

11. 種村昌也*, 千田有一 : BMI 制約を伴う 2 次評価関数最小化問題の解法とその応用, 第 4 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 3D2-5 (2017)
12. 種村昌也*, 千田有一 : 最小位相性を保存したモデル低次元化法の提案, SICE 中部支部シンポジウム 2014 (2014)
13. 種村昌也*, 千田有一, 池田裕一 : LMI を用いた PFC 設計方法の提案, 第 56 回自動制御連合講演会 (2013)
14. 種村昌也*, 千田有一, 池田裕一 : LMI による並列フィードフォワード補償器の設計方法, SICE 中部支部シンポジウム 2013 (2013)
15. 種村昌也*, 千田有一, 池田裕一 : SAC における分散型 PSO を用いた PFC 設計方法の提案, MOVIC2013 (2013)