

信州大学審査学位論文

余剰次元が有効理論に与える影響とその評価

2021 年3 月

西川 侃成

信州大学 総合工学系研究科
物質創成科学専攻

概要

素粒子論や宇宙論においてスカラー場は必要不可欠な存在である。素粒子論の標準模型において、ヒッグス粒子は物質粒子やゲージボソンの質量の起源となり、また、宇宙論におけるインフラトンは宇宙初期の指数関数的な膨張を引き起こす役割を担う。しかしながら、スカラー場はそのポテンシャルに関して、理論上避けることが出来ない微調整問題 (または階層性問題) と呼ばれる問題を抱えていることが知られている。この問題の解決策の1つとしてゲージ・ヒッグス統一理論がある。この模型においてヒッグスポテンシャルは、高次元のゲージ対称性によって有限に保たれると考えられている。但し、これに関する厳密な証明は存在しないため、摂動的に確かめることが重要になる。これまでのところ、 $M^4 \times S^1$ 上の $U(1)$, $SU(n)$ ゲージ理論において2ループレベルでその有限性が確かめられている。本研究では、 $M^4 \times S^1$ 上の量子重力と結合する $U(1)$ ゲージ理論において2ループレベルでその有限性を確認した。このようなゲージ・ヒッグス統一理論におけるヒッグスポテンシャルへの重力子の寄与の評価は、本研究によって初めて行われた試みである。

目次

第 1 章	導入	1
第 2 章	スカラー場の役割と問題点	3
2.1	ヒッグス機構	3
2.2	インフレーション	7
2.3	微調整問題	13
第 3 章	高次元理論とコンパクト化	15
3.1	高次元理論の歴史	15
3.2	高次元理論初歩	17
3.2.1	実スカラー場	17
3.2.2	$U(1)$ ゲージ場	19
3.2.3	$SU(n)$ ゲージ場	20
3.2.4	フェルミオン	21
3.2.5	$U(1)$ ゲージ理論	22
3.3	オービフォールド	24
3.3.1	2 種類の境界条件	25
3.3.2	$SU(n)$ ゲージ理論における内部自己同型な境界条件	28
第 4 章	ゲージ・ヒッグス統一理論	31
4.1	アハラノフ-ボーム効果	31
4.2	ウィルソン線	34
4.3	細谷機構	37
第 5 章	有効ポテンシャル	40
5.1	$M^4 \times S^1$ 上の $U(1)$ ゲージ理論	40
5.2	$M^4 \times S^1$ 上の $U(1)$ ゲージ + 量子重力理論	42
第 6 章	結論	51
	謝辞	53

付録 A	\mathbb{Z}_2 対称性の証明	54
A.1	内部自己同型な境界条件	54
A.2	外部自己同型な境界条件	56
A.3	エキゾチックな $U(1)$ ゲージ理論	58
付録 B	対角表現の存在証明	60
付録 C	有効ポテンシャルの計算	62
付録 D	無限和に関する公式	72
参考文献		76

第 1 章

導入

素粒子論や宇宙論においてスカラー場は非常に重要な役割を担う。素粒子論における標準模型に現れるヒッグス粒子は、現在観測されている唯一のスカラー粒子である。ヒッグス粒子はヒッグス機構を通して、物質を構成する粒子であるクォークやレプトンなどのフェルミオンや、弱い力を伝える W^\pm や Z^0 などのゲージボソンに質量を与える。また、宇宙論におけるスローロールインフレーション模型においては、インフラトンと呼ばれるスカラー場が適切なポテンシャルを持つとき宇宙の指数関数的な膨張が実現される。つまり、この自然界においてスカラー場はなくてはならない存在である。

しかしながら、スカラー場はその質量またはポテンシャルに問題を抱えていることがよく知られている。スカラー場の質量は量子補正を受けると容易に切断スケールにまで跳ね上がってしまい、これを実際の観測値や理論値に合わせるためには非常に大きな数を繰り込む必要がある。もちろんこの繰り込み自体は理論上許されるものではあるが、自然がこのような微調整をするのかという疑問が生じる。この問題の解決策として超対称性や複合ヒッグス模型、また高次元理論などが提案されているが、現在のところ高エネルギー加速器実験においてこれらの兆候は見つかっておらず、有力な候補は絞られていない。

本論文では高次元理論、特にゲージ・ヒッグス統一理論に注目する。この理論に基づいた模型において、高次元ゲージ場の余剰次元成分のゼロモードを使って定義されたウィルソン線位相は 4 次元のスカラー場と見なされ、その質量項は古典レベルではゲージ対称性により禁止される。すなわち、その質量は通常のゲージ場の場合と同様に紫外発散から保護されることが期待される。その一方で、量子補正によりそのスカラー場に関する有限な有効ポテンシャルが生成されることが予想されている。これは一見ゲージ対称性と矛盾しそうであるが、そのポテンシャルはウィルソンループの関数として得られると考えられるため問題はない。したがって、そのスカラー場は微調整無しに有限な質量を獲得することが出来る。また、この有効ポテンシャルは細谷機構と呼ばれる対称性の自発的な破れを引き起こすことも知られている。よって、このスカラー場を標準模型のヒッグス場と見なすと微調整問題が解決され、さらに細谷機構により電弱対称性を破ることも可能である。同様に、このスカラー場をインフラトンと見なすとそのポテンシャルに関する微調整問題が解決される。そのような模型は extranatural インフレーション模型と呼ばれ詳しく調べられている。

以上のような高次元ゲージ場由来のスカラー場を利用した模型の特長は、そのスカラー場に関する有効ポテンシャルの有限性に強く依存している。しかしながら、この有限性を保証するような厳密な証明は存在せず、それ故、摂動的に確かめることは有意義である。現在、それは可換また非可換ゲージ理論の場合において、2ループレベルまで確かめられている。これらの計算の際には中間状態として物質粒子とゲージボソン、そしてそのゴーストが現れる。本研究では初めての試みとして、重力子が仮想粒子として存在するような場合の有効ポテンシャルの有限性について議論をする。より具体的には、5次元時空 $M^4 \times S^1$ 上において量子重力と結合する $U(1)$ ゲージ理論から出発し、5次元ゲージ場由来のスカラー場に関する有効ポテンシャルの有限性を2ループレベルで確かめる。これは重力子が内部的なゲージ量子数を持っていないために、有効ポテンシャルに寄与するのが2ループレベル以降だからである。

重力結合定数は非常に小さいため現象論的な影響は期待出来ないにも拘らず、その有限性を確認することは重要である。なぜならば、もしも重力子の影響でポテンシャルの有限性が保たれないのであれば、それはゲージ・ヒッグス統一理論と量子重力の相性が良くないことを意味するからである。また、既にそのような量子重力と結合する模型も存在するが、これらの模型の予言についても意味をなさないことになってしまう危険性がある。したがって、模型が現実的なものであるならば、重力子を含む場合においても変わらず有限性が保たれていることが期待される。

以下では、本論文の構成について説明する。第2章では自然界におけるスカラー場の役割とその問題点について述べる。第3章では高次元理論の基本的な事柄についてまとめ、また、オービフォールドを用いたコンパクト化をした際の境界条件について議論する。第4章では本研究の基盤となるゲージ・ヒッグス統一理論について述べ、第5章ではこの模型におけるヒッグスポテンシャルへの2ループ補正を計算する。その際ははじめにウォームアップとして単純な $U(1)$ ゲージ理論で計算をした後に、量子重力と結合した $U(1)$ ゲージ理論を考え重力子の寄与を評価する。最後に結論を述べる。

第 2 章

スカラー場の役割と問題点

素粒子論や宇宙論では、それぞれヒッグス場やインフラトンといったスカラー場が登場し、理論において非常に重要な役割を果たす。ここでは、それらがどのような働きをするかを見た後に、スカラー場が理論上避けることが出来ない特有の問題を抱えていることを説明する。

2.1 ヒッグス機構

ヒッグス機構とは、理論のゲージ対称性のゲージ量子数を持つようなスカラー場がゼロでない真空期待値を持つことで自発的に対称性が破れ、それに伴ってもともと質量がゼロであったゲージ場が質量を獲得する機構である [1-3]。このとき、対称性の破れを引き起こすスカラー場のことをヒッグス場と呼ぶ。以下では、標準模型におけるヒッグス機構について説明する。

はじめに、標準模型に現れる第 1 世代分の物質粒子とヒッグス粒子のそれぞれのゲージ量子数を、表 2.1 にまとめておく。標準模型のゲージ群は $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ という直積群であ

粒子	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	T^3	Y	Q
$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	3	2	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
u_R	3	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_R	3	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\ell_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	1	2	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
e_R	1	1	0	-1	-1
$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}$	1	2	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

表 2.1 物質粒子とヒッグス粒子のゲージ量子数

る。このうち、 $SU(3)_c$ は強い力を担い、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の部分は以下で説明するようにヒッグス

機構によって電磁気力の $U(1)_{\text{EM}}$ に破れ、同時に弱い力を担うゲージボソンは質量を獲得する。このとき、 $U(1)_{\text{EM}}$ の電荷 Q は、 $SU(2)_L$ の生成子 T^3 とハイパーチャージ Y により、 $Q = T^3 + Y$ というように与えられる。また、標準模型は左右非対称な理論であり、物質粒子において左巻きのみが $SU(2)_L$ 2重項になっている。

標準模型において、ヒッグス場 (またはヒッグス 2重項と呼ぶ) H に関するラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu H)^\dagger D^\mu H - V, \quad (2.1)$$

と与えられる。ここで、共変微分とポテンシャルは、

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + igW_\mu^a T^a + \frac{i}{2}g'B_\mu, \quad (2.2)$$

$$V \equiv m^2|H|^2 + \lambda(|H|^2)^2, \quad (2.3)$$

となる。 W_μ^a と B_μ は $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ のゲージ場であり、 g と g' はそれぞれのゲージ結合定数である。 $SU(2)_L$ の生成子 T^a はパウリ行列 τ^a により、 $T^a = \tau^a/2$ と与えられる。また、 m と $\lambda(> 0)$ は H の質量と自己結合定数である。 H が関係する項として、さらに湯川相互作用項があり、

$$\mathcal{L}_Y = -\bar{\ell}_L Y^{(e)} H e_R - \bar{q}_L Y^{(d)} H d_R - \bar{q}_L Y^{(u)} \tilde{H} u_R + \text{h.c.}, \quad (2.4)$$

となる。ここで、 $Y^{(e)}$ 、 $Y^{(d)}$ そして $Y^{(u)}$ は湯川結合定数であり、 \tilde{H} の定義は、

$$\tilde{H} \equiv i\tau^2 H^* = \begin{pmatrix} H^{0*} \\ -H^- \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

である。世代やニュートリノの質量については、ここでの議論では重要でないため無視している。

今、 H の質量項が、

$$m^2 = -\mu^2 < 0, \quad (2.6)$$

と与えられるときに、 V の安定性について考えると (2.3) より、

$$\frac{\partial V}{\partial H} = H^\dagger (-\mu^2 + 2\lambda|H|^2). \quad (2.7)$$

よって、 H が $2\lambda|H|^2 = \mu^2$ を満たすときに V は極小値をとることが分かる。そのような H のとり方は無限に存在するが、全ての真空はゲージ変換によって繋がっている。そこで、 $SU(2)_L$ ゲージ変換によって、

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

とする。ここで、 \hat{h} は実スカラー場である。真空状態においては $\langle \hat{h} \rangle^2 = \mu^2/\lambda \equiv v^2$ となるので、この v を使って H を以下のように再定義する：

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

ここに含まれる電荷を持たない実スカラー粒子 h が物理的に観測されるヒッグス粒子であり、その質量は、

$$m_h = \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v, \quad (2.10)$$

となる。このヒッグス粒子 h は標準模型における唯一の未発見粒子であったが、2012年に欧州原子核研究機構 (CERN) の大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) によって、その存在が確認された。これにより、ヒッグス機構の提唱者であるフランソワ・アングレールとピーター・ヒッグスがノーベル物理学賞を受賞した。

以上のように物理的な真空が選ばれるとき、ゲージボソンや物質粒子がどのように質量を獲得するのかを以下で見ていく。(2.2) と (2.9) を用いると、

$$\begin{aligned} D_\mu H &\rightarrow \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g'B_\mu - gW_\mu^3 & gW_\mu^1 - igW_\mu^2 \\ gW_\mu^1 + igW_\mu^2 & g'B_\mu - gW_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{pmatrix} \\ &= \frac{iv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} gW_\mu^1 - igW_\mu^2 \\ g'B_\mu - gW_\mu^3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここでは、ゲージボソンの質量にのみ興味があるので h は無視した。これより、

$$(D_\mu H)^\dagger D^\mu H \rightarrow \frac{1}{8}g^2W_\mu^1W^{1\mu}v^2 + \frac{1}{8}g^2W_\mu^2W^{2\mu}v^2 + \frac{1}{8}(g'B_\mu - gW_\mu^3)(g'B^\mu - gW^{3\mu})v^2. \quad (2.12)$$

以上より、ある真空状態の下で H とゲージ場の相互作用項から、質量項のような場の2次の項を得ることが出来た。さらに、これらのゲージ場を物理的な状態に組み直す必要がある。今、(2.12) の第3項を対角化するために、次のように W_μ^3 と B_μ の線型結合によって新しく2つのゲージ場を定義する：

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

このとき、ワインバーグ角または弱混合角と呼ばれる θ_W は、2つのゲージ結合定数を使って $\tan\theta_W = g'/g$ と与えられる観測量である。このように新たに定義された Z_μ と A_μ は当然質量固有状態であり、実際、これらを用いて (2.12) の第3項を書き直すと、

$$\frac{1}{8}(g'B_\mu - gW_\mu^3)(g'B^\mu - gW^{3\mu})v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2\cos\theta_W} \right)^2 Z_\mu Z^\mu, \quad (2.14)$$

となる。つまり、 Z_μ は、

$$m_Z = \frac{gv}{2\cos\theta_W} = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}v}{2}, \quad (2.15)$$

という質量を持ち、 A_μ は質量を持たない。この A_μ が紛れもなく電磁気力を担う光子である。また、対称性の観点から見ると $SU(2)_L \times U(1)_Y$ が破れ $U(1)_{\text{EM}}$ が残っていることが見て取れる。そこで、他のゲージボソンの電荷に注目すると、 Z_μ は A_μ と直交するためにその電荷は明らかにゼロである。残りのゲージボソンの電荷については、 A_μ が W_μ^3 を用いて定義されていることから、

$SU(2)_L$ の場の強さに含まれる交換関係を使って調べることが出来る。今、 $W_\mu^3 T^3$ と $W_\nu^a T^a$ の交換関係に注目すると、

$$\begin{aligned} g[W_\mu^3 T^3, W_\nu^a T^a] &= g[(\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) T^3, W_\nu^a T^a] \\ &\rightarrow e A_\mu [T^3, W_\nu^a T^a]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

途中、 Z_μ に関する部分は無視している。また、新たに $U(1)_{\text{EM}}$ のゲージ結合定数を g と g' によって、

$$e \equiv g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (2.17)$$

と定義した。ここで、電荷の固有状態を得るために $W_\mu^{1,2}$ と $T_\mu^{1,2}$ についても、

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad T^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(T^1 \pm iT^2), \quad (2.18)$$

という組み換えを行う。さらに、

$$W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^- = W_\mu^1 T^1 + W_\mu^2 T^2, \quad [T^3, T^\pm] = \pm T^\pm, \quad (2.19)$$

という関係を使うと、結局 (2.16) は、

$$e A_\mu [T^3, W_\nu^a T^a] = e A_\mu W_\nu^+ T^+ - e A_\mu W_\nu^- T^-, \quad (2.20)$$

となる。つまり、 W_μ^\pm の電荷はそれぞれ ± 1 である。これに伴って、(2.12) の第 1 項と第 2 項も W_μ^\pm を使って書き直すと、

$$\frac{1}{8} g^2 W_\mu^1 W^{1\mu} v^2 + \frac{1}{8} g^2 W_\mu^2 W^{2\mu} v^2 = \left(\frac{gv}{2}\right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu}, \quad (2.21)$$

となる。したがって、 W_μ^\pm は互いに粒子と反粒子の関係にあり、その質量は、

$$m_W = \frac{gv}{2}, \quad (2.22)$$

であることが分かった。以上の議論を物理的な自由度の観点から見てみる。はじめ理論には、2 成分の複素スカラー場 H 、3 成分の質量を持たないベクトル場 W_μ^a 、そして 1 成分の質量を持たないベクトル場 B_μ が存在した。これらの自由度はそれぞれ $2 \times 2 = 4$ 、 $3 \times 2 = 6$ 、そして $1 \times 2 = 2$ である。ここで、 H の自由度のうち 3 つは、自発的に対称性が破れた際に現れる南部-ゴールドストーン粒子の自由度となり、これらが 1 つずつゲージ場に吸収される。よって、物理的な真空においては、自由度が 1 の実スカラー場 h と自由度が 3 の質量を持つベクトル場 3 つ Z_μ 、 W_μ^\pm 、そして自由度が 2 の質量を持たないベクトル場 A_μ が現れている。

最後に、物質粒子の質量生成について考える。 H がゼロでない真空期待値を持ったとき (2.4) から以下のような項が得られる：

$$\mathcal{L}_Y \rightarrow -\bar{e}_L Y^{(e)} \frac{v}{\sqrt{2}} e_R - \bar{d}_L Y^{(d)} \frac{v}{\sqrt{2}} d_R - \bar{u}_L Y^{(u)} \frac{v}{\sqrt{2}} u_R. \quad (2.23)$$

これらは、電子 e 、ダウン型クォーク d 、そしてアップ型クォーク u の質量項であり、それらの質量は、

$$m_e = \frac{Y^{(e)}v}{\sqrt{2}}, \quad m_d = \frac{Y^{(d)}v}{\sqrt{2}}, \quad m_u = \frac{Y^{(u)}v}{\sqrt{2}}, \quad (2.24)$$

である。ここでは、あくまでも質量の生成機構に興味があったため無視をしたが、実際には各物質粒子がそれぞれ3世代分存在するため、 $Y^{(e),(d),(u)}$ は行列となる。よって、 $m_{e,d,u}$ も行列となるので、質量固有状態を得るためにはこれらの行列をさらに対角化する必要がある。

以上では、もともとの理論のゲージ対称性によって質量を持つことを禁止されていたゲージボソンや物質粒子が、自発的に対称性が破れた後の物理的な真空においては質量を獲得出来ることを見た。このとき重要なこととして、それぞれの質量項は全てヒッグス粒子との相互作用項から得られたため、生成された質量は全てヒッグス粒子の真空期待値に比例していた。つまり、ヒッグス粒子は理論のエネルギースケールを決めるという重要な役割を担っている。

2.2 インフレーション

アインシュタインによって一般相対論が完成されたことで、重力が支配する宇宙の発展について理論的に議論できるようになった。アインシュタイン自身は宇宙は永遠に不変であると考えていたために、アインシュタイン方程式において宇宙の収縮を防ぐような項として宇宙項を導入した。同じ頃スライファーは多くの星雲からの光のスペクトルを組織的に観測し、それらの多くが赤方偏移していることを発見した。このスライファーによる発見に刺激されたハッブルは、銀河系外星雲の光のスペクトルを組織的に調べ、1929年に十分遠方の星雲はすべて我々の銀河系から遠ざかる運動をしており、その速度は星雲までの距離にほぼ比例していることを発見した。この関係はハッブル・ルメートルの法則と呼ばれ、

$$\boldsymbol{v} = H\boldsymbol{r}, \quad (2.25)$$

で表される。ここで、 \boldsymbol{r} は我々の銀河を基準としたある星雲の位置ベクトルであり、 \boldsymbol{v} はその後退速度である。 H はハッブル定数と呼ばれる。これは一見我々の銀河が特別な場所であるかのように思わせるがそうではない。実際、星雲1と星雲2の後退速度はハッブル・ルメートルの法則より、

$$\boldsymbol{v}_1 = H\boldsymbol{r}_1, \quad \boldsymbol{v}_2 = H\boldsymbol{r}_2, \quad (2.26)$$

となり、これより2つの星雲の相対速度は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}' &= \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 \\ &= H(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \\ &= H\boldsymbol{r}', \end{aligned} \quad (2.27)$$

となる。つまり、ハッブル・ルメートルの法則は、宇宙における任意の2つの星雲間で成り立っているということである。これは宇宙が一様等方に膨張していることを示していると考えられ

る。ここで、宇宙原理という仮説を置く。それは、「我々の銀河が宇宙において特別な場所にはない」というものである。これは言い換えると、宇宙は少なくとも大局的には、空間的に一様な物質密度と一様等方な幾何学的構造を持った時空である、ということである。このような仮定をした宇宙を一様等方宇宙と言い、以下ではその時間発展について考えてみる。

一般相対論に基づいて、空間的に一様等方な宇宙の模型を作るためには、「空間的」の意味を明確にする必要がある。一般相対論においては、時間と空間の絶対的な区別は存在しない。しかし、膨張宇宙では自然な分解が存在する。例えば、物質のエネルギー密度 ρ が時間の連続関数であるとすると、 ρ が一定である超曲面により空間に対する自然な定義を与えられる。もちろん、 ρ が時空の一般的な関数の場合には、上のように定義した空間はその接平面が空間的な面になるとは限らない。しかし、ここでは宇宙の物質分布が空間的に一様な場合を前提としているので、空間的な超曲面が得られると考えられる。また、 ρ の値によって異なる空間的な面が定義されるので、それらを区別するパラメータとして時間を定義すると、時間の自然な定義も得られる。

実際に模型を構築する際には、具体的に時空の計量を定める必要がある。このときの座標のとり方として、時間座標については上で述べたように ρ が時間のみの関数になるようにとり、空間座標については物質に対して静止して見えるようにとることとする。このような座標を共動座標と呼ぶ。共動座標をとることで、等方性を実現することが出来る。仮に、共動座標をとらなかった場合は、物質がある方向に運動することで、その方向を特別視することになってしまい等方性が失われてしまう。これらの条件の下で、一様等方な宇宙に対する計量を求めると、

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \\ &= -dt^2 + a(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

というものが得られる。これをロバートソン-ウォーカー計量と呼ぶ。 K は空間の曲率であり、 $K = 0$ は平坦な宇宙、 $K > 0$ は閉じた宇宙、そして $K < 0$ は開いた宇宙を表す。また、 a はスケール因子と呼ばれ、空間のサイズの時間依存性を表す。ここで言う空間のサイズとは、時刻間での相対的な大きさのことである。実際、平坦な宇宙と開いた宇宙の空間の体積は無限大である。このような座標のとり方での物質の 4 元速度ベクトル U^μ は、明らかに、

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (2.29)$$

となり、また、エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は、

$$T_{00} = \rho(t), \quad (2.30)$$

$$T_{0i} = T_{i0} = 0, \quad (2.31)$$

$$T_{ij} = P(t)\delta_{ij}, \quad (2.32)$$

となる。これは U^μ を用いて、

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

と表せる。つまり、一様等方な宇宙の物質は、完全流体と同じ形のエネルギー運動量テンソルを持つことがわかる。ここで、 ρ はエネルギー密度、 P は圧力である。

次に、一様等方な宇宙において時空の構造を特徴づける量 a 、また、物質の状態を特徴づける量 ρ と P の時間依存性について調べる。これらは、時空の発展に関する方程式であるアインシュタイン方程式、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

とエネルギー運動量の局所的な保存則、

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.35)$$

から決定される。ここで準備として、ロバートソン-ウォーカー計量の下でのクリストッフエル記号を計算すると、0 でないものは以下のとおりである：

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= \frac{a\dot{a}}{1-Kr^2}, & \Gamma^0_{22} &= a\dot{a}r^2, & \Gamma^0_{33} &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma^1_{01} &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{Kr}{1-Kr^2}, & \Gamma^1_{22} &= -(1-Kr^2)r, \\ \Gamma^1_{33} &= -(1-Kr^2)r \sin^2 \theta, & \Gamma^2_{02} &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma^3_{03} &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

ここで、ドットは時間微分を表す。注意として、クリストッフエル記号は下の添字について対称である。これを用いてロバートソン-ウォーカー計量の下で (2.34) の第 00 成分を求めると、

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.36)$$

が得られ、同様に (2.34) の第 ii 成分を求めると、

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} \right\} = -4\pi GP, \quad (2.37)$$

が得られる。(2.36) は、エネルギー密度 ρ がわかればスケール因子 a の時間発展が積分できる式になっており、これをフリードマン方程式と呼ぶ。また、(2.37) に (2.36) を代入すると、

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (2.38)$$

となり、これはスケール因子 a の運動方程式である。(2.35) については、第 0 成分のみが自明でない式、

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0, \quad (2.39)$$

を与え、第 i 成分は恒等的に 0 となる。これは等方性から明らかである。よって、一様等方な宇宙においては、物質の状態はエネルギー密度 ρ と圧力 P で決まり、また、時空の構造は 3 個の時間

の関数 $a(t)$, $\rho(t)$, $P(t)$ と定数 K で記述される。したがって, (2.36) と (2.37) に加え, ρ と P の関係が得られるような物質の状態方程式が得られれば, 宇宙の時間発展は完全に求まる。

最後にスケール因子 a とハッブル定数 H の関係を求める。今, ある銀河を共動座標の基準とした際の別の銀河までの距離 $l(t)$ は,

$$l(t) = \int_0^r dr \frac{a(t)}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (2.40)$$

となる。ここで, 時間依存性はすべて a に押し付けてあるので, 別の銀河の後退速度 $v = \dot{l}$ は,

$$v = \frac{\dot{a}}{a} l. \quad (2.41)$$

これは正にハッブルルメートルの法則である。したがって, (2.25) と (2.41) よりスケール因子 a とハッブル定数 H の関係が求まり,

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.42)$$

となる。

以上のように宇宙が時間発展するのであれば, 時間を遡ると宇宙には始まりがあったと考えることが出来る。よって, ハッブルらの観測以降宇宙の始まりについての研究がなされるようになり, その中でガモフらによって提唱されたのがビッグバン理論である。この理論では, 現在の元素組成を説明するために, 宇宙の始まりが熱い火の玉であったと仮定し, また, その痕跡として宇宙背景放射 (CMB) を予言した。その後, ベル研究所のペンジャスとウィルソンによって CMB が観測され, 理論が確からしいことが示された。これにより, 宇宙初期の物理が完全に理解出来たかというところとは言えず, この理論では説明できないいくつかの問題が存在した。それは, 地平線問題, 平坦性問題, そして宇宙論的揺らぎの起源の問題などである。地平線問題とは, CMB の一様性に関する問題である。そもそも CMB の正体とは, 宇宙が始まってから 38 万年頃の「宇宙の晴れ上がり」の際に自由になった光子である。したがって, この時点で因果関係を持つことができる範囲は 38 万光年以内ということになるが, 現在の観測では, CMB は全天においてほとんど一様であることが分かっている。この因果律の限界を超えた一様性の理由を, ビッグバンで説明することは出来ない。平坦性問題とは, 宇宙の曲率に関する問題である。現在, 宇宙の曲率はほとんどゼロであることが知られているが, ビッグバン理論においてこのような状況を実現するためには, 宇宙初期における曲率がきわめて高い精度でゼロに近い必要があることが分かっており, これは不自然に感じられる。宇宙論的揺らぎの起源の問題とは, 宇宙の非一様性に関する問題である。観測衛生により, ごく僅かではあるが CMB の温度揺らぎが測られている。また, 宇宙の大規模構造の形成のためには暗黒物質の密度揺らぎが必要であったということもわかっている。しかし, ビッグバン理論では, そのような揺らぎの起源を説明することは出来ない。

以上のようなビッグバン理論の問題点を解決するものとして佐藤勝彦らにより提案されたのが, 宇宙初期に指数関数的な膨張があったと考えるインフレーション理論である [4, 5]。佐藤らが提案した当初のモデルは, 大統一理論の相転移に伴ってインフレーションを説明するものであった。しか

し、現在ではインフレーションのモデルを作る際は、リンデによって提案されたスローロールインフレーションモデルに基づくのが普通である [6]. これは、インフラトンと呼ばれるスカラー場の動力学によりインフレーションを説明するモデルである. ここでスカラー場を用いる理由は簡単に理解することが出来る. 宇宙が加速的な膨張をするためにはスケール因子 a について,

$$\ddot{a} > 0, \quad (2.43)$$

となっている必要があるのは明らかである. よって, (2.38) と (2.43) より,

$$\rho + 3P < 0, \quad (2.44)$$

となる. つまり, 負の圧力を持った未知のエネルギーが必要となる (ρ はエネルギー密度なので絶対的に正). それを担うものとしてはスカラー場が最適である. なぜならば, スカラー場であれば宇宙において何かしらの値を持っていたとしても, 一様等方性を壊してしまうようなことはないからである. さらに, このとき ρ と P は,

$$P \simeq -\rho, \quad (2.45)$$

という関係を満たしている必要がある. これは宇宙の指数関数的な膨張のための条件である. 今, これを (2.39) に代入すると,

$$\dot{\rho} = 0, \quad (2.46)$$

となり ρ は定数となるので, $K \sim 0$ とした (2.36) と (2.42) より H も定数となる. よって,

$$\frac{\dot{a}}{a} = H \Rightarrow a(t) = Ce^{Ht}, \quad (2.47)$$

となり, 確かに指数関数的な膨張が実現されている (C は積分定数).

ここで, より具体的にスカラー場がインフレーションを引き起こすための条件を考える. スカラー場の作用は,

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right), \quad (2.48)$$

と与えられる. これより, エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は,

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \partial_\sigma \phi \partial_\rho \phi - V \right), \quad (2.49)$$

となる. 今, 宇宙の一様等方性のために ϕ を位置に依らない古典場 ($\partial_i \phi = 0$) と見なす. このとき, (2.48) から場の運動方程式は,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0, \quad (2.50)$$

となる. プライムは場による微分を表す. また, ρ と P は,

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V, \quad (2.51)$$

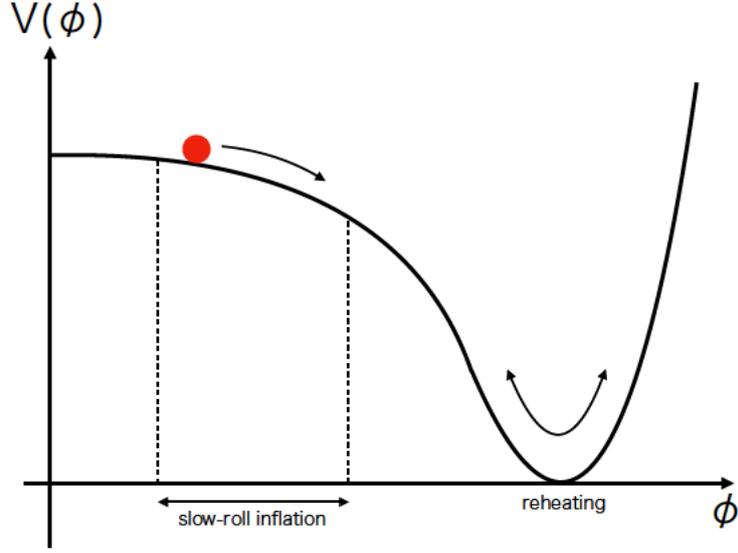


図 2.1 インフラトンポテンシャル $V(\phi)$

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V, \quad (2.52)$$

というように得られる。ここで、(2.51) と (2.52) に (2.45) を要請すると、

$$\dot{\phi}^2 \ll V, \quad (2.53)$$

となる。このような場合には、(2.50) より運動は一定の速度を持った状態に落ち着くので、(2.50) において加速度の項は無視出来る。つまり、

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}, \quad (2.54)$$

となる。以上で求めた (2.53) と (2.54) を V についての条件に書き直すと、

$$\epsilon \equiv \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1, \quad (2.55)$$

$$\eta \equiv M_P^2 \frac{V''}{V} \ll 1, \quad (2.56)$$

というように表される。これらをスローロール条件と呼び、 ϵ と η をスローロールパラメータと呼ぶ。ここで、 $M_P = 1/\sqrt{8\pi G}$ である。これらの条件が満たされている間は指数関数的な膨張が実現され、それが終了するとインフラトンが標準模型粒子に崩壊しビッグバンが起こるとというのが、スローロールインフレーションのシナリオである (図 2.1)。

この宇宙初期における光速を超えた指数関数的な膨張により、本来であれば因果関係を持つことが出来ないはずの全天において CMB の一様性が実現される。また、宇宙初期にゼロでない曲率があったとしても、それがインフレーションによって急激に引き伸ばされることでその値はほとんどゼロになるため、曲率に関する不自然な調整はそもそも必要がなくなる。さらに、インフラトンの

量子揺らぎが宇宙膨張に伴って成長し、古典的な揺らぎに転化すると考えることで揺らぎの起源を説明することが出来る。なお、実際にインフレーション模型を構築する際には (2.55) と (2.56) を満たすだけでは十分でなく、その模型から計算される幾つかの宇宙論的なパラメータが観測結果と一致している必要がある。

では、このインフラトンの正体は何なのであろうか。現在、存在が確認されているスカラー粒子は、標準模型のヒッグス粒子のみである。そこで、このヒッグス粒子をインフラトンと同一視するヒッグスインフレーション模型もよく調べられている。しかし、今のところそれを示す確たる証拠はなく、また、他の多くの模型においてはインフラトンは未発見粒子として扱われている。したがって、インフレーションが我々の住む宇宙が誕生するためには必須であるということは、ほとんど間違いないと考えられているが、それを担うスカラー場の正体は何なのかということは現在の宇宙論の大きな未解決問題の一つである。

2.3 微調整問題

以上で見てきたように、スカラー場は理論のエネルギースケールを決めたり、宇宙初期の指数関数的膨張を引き起こしたりするなど、素粒子論や宇宙論において非常に重要な役割を担っている。それにもかかわらず、スカラー場は微調整問題と呼ばれる深刻な問題を抱えていることが知られている。これはスカラー場の理論が、その理論の指導原理となるような対称性を持たないことと大きく関係している。

今、簡単な例として、4点相互作用が存在するスカラー場の理論を考える。このとき、スカラー場の質量は図 2.2 のような量子補正を受けることになる。このループ積分は、

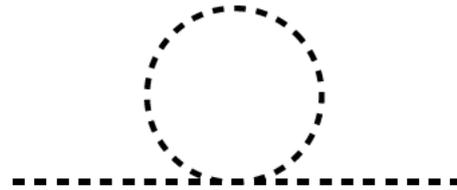


図 2.2 スカラー場の質量への 1 ループ補正

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.57)$$

という形をしている。よって、運動量切断を Λ とすると、次元解析から簡単に Λ^2 に比例した発散が生じることがわかる。このような発散のことを 2 次発散と呼ぶ。この Λ は理論の適用限界のエネルギースケールとなるので、例として大統一理論のエネルギースケールを選ぶと、 $\Lambda \sim \mathcal{O}(10^{15})\text{GeV}$ となる。したがって、この Λ^2 と裸の質量 m^2 の打ち消し合いにより標準模型のヒッグス粒子の質量 ($\sim 125\text{GeV}$) の 2 乗を導こうとすると (これを繰り込みという)、20 桁以上にも及ぶ絶妙な相殺が起こっている事になる。

ここで、スカラー場と同じボソンである、 $U(1)$ ゲージ場についても同様の補正を考えてみるこ

とにする。ゲージ場はその理論の対称性により、質量項を導入することが禁止されている。では、量子レベルではどうだろうか。もし荷電粒子が存在すれば、ファインマン図的には2本の外線があり、かつループを含むような図が考えられるため、単純にはスカラー場同様に2次発散が生じてしまうように思われる。しかし、実際にはゲージ対称性は量子レベルでも当然成り立っているため、そもそも質量への補正は存在し得ない。今、それを確かめるために図2.3のような1PIの補正を考えてみると、一般には、

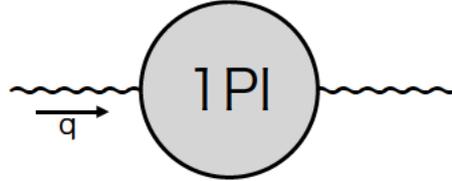


図 2.3 ゲージ場の2点頂点関数への1PIの補正

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = -i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2) + i g^{\mu\nu}\Pi_2(q^2), \quad (2.58)$$

という形に書くことが出来る。もしも、 $\Pi_2(q^2) \neq 0$ であればこの項は質量項となりうるが、ウォードの恒等式より、

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0, \quad (2.59)$$

であるから、 $\Pi^{\mu\nu}(q)$ は $(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$ に比例した項しか許されない。よって、 $\Pi_2(q^2) = 0$ となり、ゲージ場の質量項は量子効果を考慮しても生成されないことが確かめられる。この意味で、ゲージ場の質量は対称性によって紫外発散から保護されていると言える。

一方で、スカラー場の場合はそのような対称性は存在しない。したがって、2次発散は理論上防ぐことが出来ないのである。もちろん、先程述べたように繰り込みを行うことで実験値を導出することは可能であるため、理論の破綻などに繋がるわけではない。しかし、自然がそのような絶妙な調整をしているというのは奇妙に感じられるため、この2次発散に起因する不可解さのことを微調整問題と呼ぶ。

また、以上ではヒッグス粒子について議論してきたが、微調整問題は先程も述べたようにスカラー場特有の問題であるため、当然インフラトンにおいても同様の問題が考えられる。インフラトンポテンシャルには(2.55)や(2.56)をはじめ、幾つもの条件が課されているが、量子補正を考慮した場合はヒッグス粒子と同様に非常に大きな数の繰り込みをして、それらの条件を実現することになる。これをインフラトンポテンシャルの微調整問題と呼ぶ。

第 3 章

高次元理論とコンパクト化

高次元理論はもともと場の統一を目的として提案され、今では非常に多くの模型がよく調べられている。ここでは、高次元理論の歴史を簡単に振り返った後に、 $M^4 \times S^1$ 上で定義された理論についてより具体的に見ていく。また、余剰次元空間としてオービフォールドを考えた場合の対称性の破れについても議論する。

3.1 高次元理論の歴史

1905 年にアインシュタインによって特殊相対論が世に出され、1908 年にミンコフスキーによって特殊相対論に関する幾何学的議論がなされた。これにより、それまで独立に扱われていた時間と空間をほとんど同様に扱うような時空という概念が確立された。これに伴い電磁気学についても、それまで電場と磁場を独立に扱って記述されていたマクスウェル方程式を、4次元時空における電磁場テンソルや電磁ポテンシャルを用いて統一的に記述できるということが分かった。これは言うなれば、次元の拡張による電気力と磁気力の統一である。

1914 年、ノルドシュトルムは電気力と磁気力の統一と同様に、4次元時空に新たに空間 1次元を加えた 5次元時空を仮定し、その上でマクスウェル理論を考えることで、当時存在が知られていた 2つの力、電磁気力と(特殊相対論化された)ニュートン重力を統一する模型を提案した [7-9]。このように、4次元よりも高い次元の時空上で考える理論のことを高次元理論と言い、新たに加える空間次元のことを余剰次元と呼ぶ。ノルドシュトルムの試みは、高次元理論における最も先駆的なものだということが出来る。また、彼は我々が住んでいる 4次元時空を 5次元時空の表面と捉えており、これは現在で言うところのブレーンの考え方である。このことから、いかに彼の取り組みが時代を先取りしたものであったかが分かるだろう。

その後、1915年にアインシュタインが一般相対論を発表したことにより、重力が時空の幾何学によって説明されることがわかった。そこで、カルツァはノルドシュトルムに似た取り組みとして、5次元時空に拡張した一般相対論をを考えることで、アインシュタイン重力と電磁気力を統一出来ることを示した [10]。この模型では、4次元時空における重力場や電磁場の方程式を導くために、場が余剰次元方向の座標には依らないとする、円柱条件と呼ばれる条件を理論に課していた。この

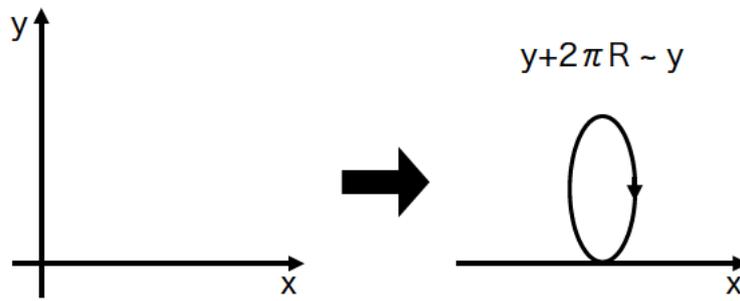


図 3.1 S^1 コンパクト化

カルツァの理論における不自然な点を解消したのが、クラインによる余剰次元の S^1 コンパクト化の試みである。これは、余剰次元が図 3.1 のように小さく円周状に丸まっていると考えるものである [11,12]。こう考えることで、ノルドシュトルムとは異なる方法で 5 次元時空間という考え方を正当化することが出来る。なぜならば、コンパクト化半径 R (余剰次元を丸めた円周の半径) をとても小さくすることで、余剰次元は存在はするがとても小さいために我々には感じられないと主張することが出来るからである。この余剰次元の S^1 コンパクト化を理論に反映させるためには、余剰次元方向の座標について、 $2\pi R$ の周期での同一視をすれば良い。これにより理論に含まれる各場は余剰次元方向の周期的境界条件を持つことになる。よって、各場は余剰次元方向についてフーリエ展開することが出来る。この展開は 5 次元時空間上の 1 つの場から無限個の 4 次元時空間上の場が生じることを意味するため、一見問題がある操作のように思われる。しかし、実際は、ゼロモード以外の場は $1/R$ に比例する大きな質量を持っているため、4 次元時空間において観測されるのはゼロモードのみとなる。したがって、円柱条件のような不自然な仮定なしに 4 次元時空間における場の方程式が得られる。以上の統一場理論は、提案者の名前にちなみカルツァ-クライン理論と呼ばれている。

現在では、電磁気力を記述する $U(1)_{EM}$ は、電弱対称性の $SU(2)_L \times U(1)_Y$ が自発的に破れることで現れることが知られており、ノルドシュトルムに始まる重力と電磁気力の 5 次元時空間における統一というもともとの試みは失敗に終わった。しかしながら、ノルドシュトルムを含め彼らの取り組みが後世に与えた影響は大きく、現在でも高次元時空間において幾つかの場を統一するというアイデア自体は非常に強力である。

また、場の統一以外にも余剰次元の特長を活かした模型作りが行われており、1990 年代後半には階層性問題の解決策として高次元理論がよく用いられた。特にアルカニハメドらによって提案された大きな余剰次元の理論は、その検証可能性により非常に注目された [13]。この模型は弦理論において現れるブレーンのアイデアを用いたものであった。ここで言うブレーンとは高次元時空間上に存在する 4 次元的な膜のことである。このとき素粒子論に現れる 4 つの力のうち重力を媒介する重力子のみが高次元時空間上に存在することが出来、その他の 3 つの力を媒介するゲージボソンはブレーン上に固定されていると考える。このような設定の下では、「もともとプランク質量と弱スケール間に階層性は存在せず、どちらもおよそ 1TeV 程度である」という仮定をしたとしても、コンパクト化半径を適切にとることで、現実世界と無矛盾なニュートンの万有引力を再現すること

が出来る。また、余剰次元の数によってはコンパクト化半径を非常に大きくとることが出来、そのような場合には重力の逆二乗則の破れを精密測定によって確認することで、余剰次元の存在を確かめられる可能性がある。その他にも階層性問題の解決策として、ランドール-サンドラム理論 [14] やゲージ・ヒッグス統一理論が提案された [15].

3.2 高次元理論初歩

ここでは、より具体的に高次元時空における模型構築と、その際の基本的な事柄について説明する。

今、5次元時空として $M^4 \times S^1$ を考える。 M^4 は4次元ミンコフスキー空間を、 S^1 は半径 R の円周を示している。それぞれの座標は x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) (or x) と $y (= x^5)$ で表す。また、5次元の表記として x^M ($M = 0, 1, 2, 3, 5$) (or \hat{x}) を使うこともある。

S^1 コンパクト化は、数学的には余剰次元において、

$$y + 2\pi R \sim y, \quad (3.1)$$

というような、 $2\pi R$ の周期の同一視をすることで実現される。このような余剰次元を含む時空上で模型を構築する際には、理論が余剰次元方向の同一視をする点において一価性を持っていることが要請される：

$$\hat{\mathcal{L}}(x, y + 2\pi R) = \hat{\mathcal{L}}(x, y). \quad (3.2)$$

$\hat{\mathcal{L}}$ は5次元時空上のラグランジアン密度である。具体的に $\hat{\mathcal{L}}$ を書き下す際は、各場の境界条件を適切にとることで、理論がこれらの要請を満たすようにする必要がある。また、そこから4次元時空上の有効理論を導く際は、それらの境界条件の下で各場をフーリエ展開し余剰次元について積分をする。これは次元還元と呼ばれる。

3.2.1 実スカラー場

ここで、最も簡単な例として、バルク質量 (5次元時空上での質量) がゼロの自由な実スカラー場の理論を考えると、ラグランジアン密度は、

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi, \quad (3.3)$$

で与えられる。ここで、5次元の計量は $\eta^{MN} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$ としている。このラグランジアン密度が (3.2) を満たすためには、 ϕ が余剰次元方向において、

$$\phi(x, y + 2\pi R) = \phi(x, y), \quad (3.4)$$

という周期的境界条件を満たしている必要がある (厳密には反周期的でもよい)。このとき、 ϕ はフーリエ展開することが出来、

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n}{R}y} \phi^{(n)}(x), \quad (3.5)$$

となる。また、 ϕ が実場である ($\phi^* = \phi$) ことに注意すると、 $\phi^{(-n)} = \phi^{(n)*}$ であることが分かるので、

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \phi^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{n}{R}y} \phi^{(n)}(x) + e^{-i\frac{n}{R}y} \phi^{(n)*}(x) \right), \quad (3.6)$$

と書くことも出来る。ここで、 $\phi^{(n)}$ がまさに 4 次元時空中の場であり、これをカルツァ-クライン (KK) モードと呼ぶ。但し、ファイマン図の外線となるような観測可能な場はゼロモードのみである。なぜならば、 $n \neq 0$ のモードは余剰次元方向の運動量に由来する $m_n = n/R$ という質量を持っており、今 R は十分に小さいと想定しているので、結果としてこの m_n は非常に大きな値となるからである。実際、

$$\int_0^{2\pi R} dy e^{i\frac{n}{R}y} = \begin{cases} 2\pi R & (n = 0), \\ 0 & (n \neq 0), \end{cases} \quad (3.7)$$

に注意して、(3.6) を使って (3.3) を次元還元すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi R} dy \hat{\mathcal{L}} &= \int_0^{2\pi R} dy \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \partial_5 \phi \partial_5 \phi \right) \\ &= \int_0^{2\pi R} dy \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \phi^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{m}{R}y} \phi^{(m)}(x) + e^{-i\frac{m}{R}y} \phi^{(m)*}(x) \right) \right\} \right. \\ &\quad \times \partial^\mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \phi^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{n}{R}y} \phi^{(n)}(x) + e^{-i\frac{n}{R}y} \phi^{(n)*}(x) \right) \right\} \\ &\quad \left. - \partial_5 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \phi^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{m}{R}y} \phi^{(m)}(x) + e^{-i\frac{m}{R}y} \phi^{(m)*}(x) \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \partial_5 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \phi^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{n}{R}y} \phi^{(n)}(x) + e^{-i\frac{n}{R}y} \phi^{(n)*}(x) \right) \right\} \right] \\ &= \int_0^{2\pi R} dy \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi R} \left[\left\{ \partial_\mu \phi^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{m}{R}y} \partial_\mu \phi^{(m)} + e^{-i\frac{m}{R}y} \partial_\mu \phi^{(m)*} \right) \right\} \right. \\ &\quad \times \left\{ \partial^\mu \phi^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{n}{R}y} \partial^\mu \phi^{(n)} + e^{-i\frac{n}{R}y} \partial^\mu \phi^{(n)*} \right) \right\} \\ &\quad \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ e^{i\frac{m}{R}y} \left(i\frac{m}{R} \right) \phi^{(m)} + e^{-i\frac{m}{R}y} \left(-i\frac{m}{R} \right) \phi^{(m)*} \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{i\frac{n}{R}y} \left(i\frac{n}{R} \right) \phi^{(n)} + e^{-i\frac{n}{R}y} \left(-i\frac{n}{R} \right) \phi^{(n)*} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^{(0)} \partial^\mu \phi^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \partial_\mu \phi^{(n)*} \partial^\mu \phi^{(n)} - \left(\frac{n}{R} \right)^2 \phi^{(n)*} \phi^{(n)} \right\}, \quad (3.8) \end{aligned}$$

というように、4 次元時空中でのラグランジアン密度が求まり、確かに $n \neq 0$ のモードは n/R という質量を持っている。また、ゼロモードのみがもともとの 5 次元時空中の場と同様に実場であり、それ以外は n モードと $-n$ モードが関係付いて複素場となっていることが分かる。

3.2.2 $U(1)$ ゲージ場

ここでは、5次元時空上で $U(1)$ ゲージ場の理論を考える。ゲージ場はベクトル場であり時空と同じ成分数を持つので、ここでは5元ベクトルとなる。このとき、ラグランジアン密度は、

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}, \quad (3.9)$$

となり、 $F_{MN}(\equiv \partial_M A_N - \partial_N A_M)$ は5次元ゲージ場 A_M の強さである。実スカラー場の場合と同様に、場の境界条件は、

$$A_M(x, y + 2\pi R) = A_M(x, y), \quad (3.10)$$

となり、またフーリエ展開は、

$$\begin{aligned} A_M(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n}{R}y} A_M^{(n)}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} A_M^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{n}{R}y} A_M^{(n)}(x) + e^{-i\frac{n}{R}y} A_M^{(n)*}(x) \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる。ここで、注目すべきことがある。それは、4次元時空上の有効理論において、 A_5 はスカラー場として扱われるということである。これは、余剰次元のコンパクト化により5次元のローレンツ対称性が壊れ、4次元のローレンツ対称性しか残っていないからである。この4次元のローレンツ変換の下では、明らかに A_M の第 μ 成分と第5成分は混ざることではなく、それぞれ4次元のベクトル場とスカラー場として変換されることになる。そこで、実際に (3.11) を使って (3.9) を次元還元してみる。今、

$$-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}F_{\mu 5}F^{\mu}_5, \quad (3.12)$$

であるから、準備として $F_{\mu 5}$ について見てみると、

$$\begin{aligned} F_{\mu 5} &= \partial_\mu A_5 - \partial_5 A_\mu \\ &= \partial_\mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} A_5^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{n}{R}y} A_5^{(n)}(x) + e^{-i\frac{n}{R}y} A_5^{(n)*}(x) \right) \right\} \\ &\quad - \partial_5 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} A_\mu^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{n}{R}y} A_\mu^{(n)}(x) + e^{-i\frac{n}{R}y} A_\mu^{(n)*}(x) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \left(\partial_\mu A_5^{(0)} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{i\frac{n}{R}y} \left(i\frac{n}{R} \right) \left\{ A_\mu^{(n)} + \left(i\frac{R}{n} \right) \partial_\mu A_5^{(n)} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-i\frac{n}{R}y} \left(-i\frac{n}{R} \right) \left\{ A_\mu^{(n)*} - \left(i\frac{R}{n} \right) \partial_\mu A_5^{(n)*} \right\} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

これを用いると、

$$\int_0^{2\pi R} dy \hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(0)}F^{(0)\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu A_5^{(0)}\partial^\mu A_5^{(0)}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(n)*} F^{(n)\mu\nu} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \left\{ A_{\mu}^{(n)} + \left(i \frac{R}{n} \right) \partial_{\mu} A_5^{(n)} \right\}^* \left\{ A^{(n)\mu} + \left(i \frac{R}{n} \right) \partial^{\mu} A_5^{(n)} \right\} \right], \quad (3.14)
\end{aligned}$$

というように、4次元時空上のラグランジアン密度が得られる。ここで、1行目はゲージ場と実スカラー場の運動項であり、2行目は複素ベクトル場の運動項である。注目すべきは3行目である。ここでは、ヒッグス機構において南部-ゴールドストーン粒子の自由度がゲージ場に吸収されるように、 $A_5^{(n)}$ が $A_{\mu}^{(n)}$ に吸収されているのが見てとれる。これにより、 $A_{\mu}^{(n)}$ の自由度が $4 \rightarrow 6$ となり、物理的に質量を獲得出来ていることが分かる。したがって、4次元時空上に物理的に現れる場は、ゲージ場 $A_{\mu}^{(0)}$ 、実スカラー場 $A_5^{(0)}$ 、そして質量を持つ複素ベクトル場 $A_{\mu}^{(n)}$ である。

3.2.3 $SU(n)$ ゲージ場

ここでは、5次元時空上で $SU(n)$ ゲージ場を考える。このとき、ラグランジアン密度は、

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2} \text{tr} F_{MN} F^{MN}, \quad (3.15)$$

と与えられる。ここで、 $A_M \equiv A_M^a T^a$ 、 $F_{MN} \equiv (\partial_M A_N - \partial_N A_M) + ig[A_M, A_N]$ である。 g はゲージ結合定数である。この \mathcal{L} が (3.2) を満たすように、 A_M の境界条件を与えると、

$$A_M(x, y + 2\pi R) = U_1 A_M(x, y) U_1^{\dagger}, \quad (3.16)$$

となる。ここで、 U_1 は並進変換 $y \rightarrow y + 2\pi R$ の表現行列である。 $U_1 = I$ の場合は周期的境界条件となるが、このようなひねりがあってもよい。

今、 $U(x, y) \in SU(n)$ とすると、 A_M のゲージ変換は、

$$A_M(x, y) \rightarrow A'_M(x, y) = U(x, y) A_M(x, y) U^{\dagger}(x, y) - \frac{i}{g} U(x, y) \partial_M U^{\dagger}(x, y), \quad (3.17)$$

と与えられる。このとき、 A'_M の境界条件がどうなるかを考えてみる。そこで、 $A_M(x, y + 2\pi R)$ をゲージ変換してみると、

$$\begin{aligned}
& A_M(x, y + 2\pi R) \\
& \rightarrow A'_M(x, y + 2\pi R) \\
& = U(x, y + 2\pi R) A_M(x, y + 2\pi R) U^{\dagger}(x, y + 2\pi R) - \frac{i}{g} U(x, y + 2\pi R) \partial_M U^{\dagger}(x, y + 2\pi R) \\
& = U(x, y + 2\pi R) U_1 A_M(x, y) U_1^{\dagger} U^{\dagger}(x, y + 2\pi R) - \frac{i}{g} U(x, y + 2\pi R) \partial_M U^{\dagger}(x, y + 2\pi R) \\
& = U(x, y + 2\pi R) U_1 \left(U^{\dagger}(x, y) A'_M(x, y) U(x, y) - \frac{i}{g} U^{\dagger}(x, y) \partial_M U(x, y) \right) U_1^{\dagger} U^{\dagger}(x, y + 2\pi R) \\
& \quad - \frac{i}{g} U(x, y + 2\pi R) \partial_M U^{\dagger}(x, y + 2\pi R)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U'_1 A'_M(x, y) U_1'^{\dagger} - \frac{i}{g} U'_1 \partial_M U_1'^{\dagger}, \\
\Rightarrow A'_M(x, y + 2\pi R) &= U'_1 A'_M(x, y) U_1'^{\dagger} - \frac{i}{g} U'_1 \partial_M U_1'^{\dagger}, \tag{3.18}
\end{aligned}$$

となる。途中、(3.16) と (3.17) を使った。また、

$$U'_1 \equiv U(x, y + 2\pi R) U_1 U^{\dagger}(x, y), \tag{3.19}$$

であり、これはゲージ変換された場が従う境界条件に含まれる表現行列である。以上より、境界条件が (3.16) から (3.18) に変化していることが分かる。しかし、これらはゲージ変換によってつながっているため、当然同じ物理を与える。

3.2.4 フェルミオン

先程議論したゲージ場はベクトル場であるため、その次元は時空と同じであり、 d 次元時空上では d 元ベクトルとなる。では、スピノールはどうだろうか。ここで、ローレンツ群について考えると、その生成子は、

$$\Sigma_{MN} = \frac{i}{4} [\gamma_M, \gamma_N], \tag{3.20}$$

と与えられる。これより、群の次元 (Σ_{MN} のうち独立なもの数) は $(d^2 - d)/2$ である。また、群の階数を求めると、それはカルタン部分代数の次元であり、つまり $(d^2 - d)/2$ 個の生成子のうち可換なもの数である。そこで、 Σ_{MN} と Σ_{PQ} の交換関係を計算してみると、

$$\begin{aligned}
[\Sigma_{MN}, \Sigma_{PQ}] &= -\frac{1}{4} [\gamma_N \gamma_M, \gamma_Q \gamma_P] \\
&= -\frac{1}{2} (\eta_{QM} \gamma_N \gamma_P - \eta_{PM} \gamma_N \gamma_Q + \eta_{QN} \gamma_P \gamma_M - \eta_{PN} \gamma_Q \gamma_M), \tag{3.21}
\end{aligned}$$

となる。生成子の定義より明らかに $M \neq N$, $P \neq Q$ である。このとき、この交換関係は添字が全て異なるときにゼロとなる。よって、群の階数は、 d が偶数のときは $d/2$ 、奇数のときは $(d-1)/2$ となる。ガウス記号を使って $[d/2]$ と表すことも出来る ($[x]$ は x を超えない最大の整数)。また、ここで、 Σ_{MN} の 2 乗を求めると、

$$\begin{aligned}
(\Sigma_{MN})^2 &= -\frac{1}{4} (\gamma_N \gamma_M)^2 \\
&= \frac{1}{4} \eta_{MM} \eta_{NN} \\
&= \pm \frac{1}{4}, \tag{3.22}
\end{aligned}$$

であるから、 Σ_{MN} の固有値は $\pm 1/2$ 、または $\pm i/2$ となる。今、 $[d/2]$ 個の可換な生成子は同時対角化可能であることから、これらの生成子ごとにとり得る状態が 2 つずつあることになる。よって、これらの生成子が作用するスピノールのとり得る状態の組み合わせの数は $2^{[d/2]}$ となる。これ

がまさに、ディラックスピノールの次元である。したがって、5次元時空上のディラックフェルミオンの成分数は4次元時空の場合と同じ4である。

但し、その性質についても全く同じかというところではなく、大きな違いが存在する。4次元時空上においてディラックフェルミオンは、より小さい単位であるワイルフェルミオンに分解することが出来た。この分解は、

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (3.23)$$

と定義されるカイラル演算子によって、

$$P_L \equiv \frac{1-\gamma^5}{2}, \quad P_R \equiv \frac{1+\gamma^5}{2}, \quad (3.24)$$

というように与えられる射影演算子を使って行われた。そこで、5次元時空上においても同様の演算子を考えてみる。そのために、まず5次元のガンマ行列を4次元のガンマ行列を用いて、

$$\Gamma^\mu \equiv \gamma^\mu, \quad \Gamma^5 \equiv i\gamma^5, \quad (3.25)$$

と定義する。これらの行列は、 $\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2\eta^{MN}$ という代数関係を満たす。ここで、(3.23)と同様の行列を考えると、

$$i\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^5 = i(\gamma^5)^2 = iI, \quad (3.26)$$

となり、 I は単位行列である。これは明らかに(3.24)のような射影演算子を定義することは出来ない。つまり、5次元時空上ではディラックフェルミオンをワイルフェルミオンに分解することは出来ないのである。これは致命的な弱点である。前にも述べたように高次元理論に基づく模型構築においては、場をフーリエ展開した際のゼロモードを4次元時空上の有効理論における観測可能な粒子として扱うわけであるが、5次元時空上でワイルフェルミオンを定義出来ないのであれば、当然4次元時空上においてもそれは現れない。しかし、標準模型においてワイルフェルミオンは必須であるため、このままでは5次元理論から出発するような現実的な模型構築は不可能になってしまう。但し、これは余剰次元を最も単純な S^1 コンパクト化した場合の話であり、他のコンパクト化を用いた場合はこの限りではないことが知られており、これについては後で詳しく述べる。

3.2.5 $U(1)$ ゲージ理論

ここでは、5次元時空上でディラックフェルミオンを含むような $U(1)$ ゲージ理論について考える。但し、ここでは物質場の境界条件含まれる自由度について簡単に述べるに留め、理論の詳細についてはゲージ・ヒッグス統一理論の章で述べることにする。

ラグランジアン密度は、

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} + \bar{\psi}i\Gamma^M D_M\psi, \quad (3.27)$$

で与えられる。ここで、 ψ に作用する共変微分は $D_M \equiv \partial_M + ieA_M$ である。 A_M の境界条件とフーリエ展開は先程と同様に、(3.10), (3.11) で与えられる。 ψ の境界条件については、単純な周期的境界条件の他に、

$$\psi(x, y + 2\pi R) = e^{i\alpha} \psi(x, y), \quad (3.28)$$

というように、定數位相 α を含んだものも許される。これは大局的なゲージ変換のように見なせるので、明らかにこの条件の下でも (3.27) は不変である。このとき、場のフーリエ展開は、

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n+\frac{\alpha}{2\pi}}{R}y} \psi^{(n)}(x), \quad (3.29)$$

と与えられる。ここでは、周期的境界条件の場合の展開に比べ、 y の係数が α の分だけずれている。これは、物理的には KK モードの質量が、

$$m_n = \frac{n + \frac{\alpha}{2\pi}}{R}, \quad (3.30)$$

となることを意味している。しかし、今 ψ に対して、

$$\psi(x, y) \rightarrow \psi'(x, y) \equiv e^{-i\frac{\alpha}{2\pi R}y} \psi(x, y), \quad (3.31)$$

というゲージ変換による場の再定義をすると、境界条件を、

$$\begin{aligned} \psi'(x, y + 2\pi R) &= e^{-i\frac{\alpha}{2\pi R}(y+2\pi R)} \psi(x, y + 2\pi R) \\ &= \psi'(x, y), \end{aligned} \quad (3.32)$$

というように周期的にすることが出来、KK モードの質量は n/R となるように思われるので、一見すると α は物理的ではないように感じられる。ここで、 A_M についても考えてみると、(3.31) での ψ に対するゲージ変換に伴って、当然 A_M も変換されることになり、

$$\begin{aligned} A_M \rightarrow A'_M &= A_M - \frac{1}{e} \partial_M \left(-\frac{\alpha}{2\pi R} y \right) \\ &= A_M + \delta_M^5 \frac{1}{e} \frac{\alpha}{2\pi R}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

となる。これは、 A_5 がゼロでない真空期待値を持っていると見なせる。このとき、 ψ に作用する共変微分は、

$$D_M(A) \rightarrow D_M(A') = \partial_M + ieA_M + i\delta_M^5 \frac{\alpha}{2\pi R}, \quad (3.34)$$

となり、最後の項は ψ のバルク質量を与える。したがって、KK モードの質量はやはり (3.30) で与えられる。つまり、境界条件における α は、ゲージ変換では消すことが出来ない物理的な自由度である。

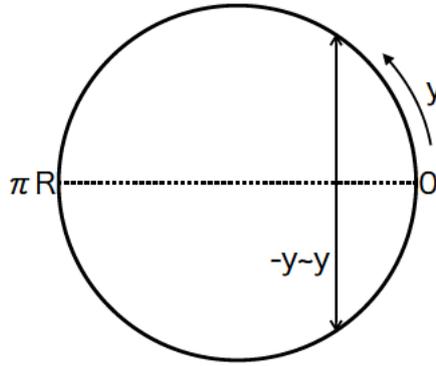


図 3.2 S^1/\mathbb{Z}_2 オービフォルド

3.3 オービフォルド

ここでは、余剰次元の S^1/\mathbb{Z}_2 コンパクト化と、その物理的な影響について見ていく。 S^1/\mathbb{Z}_2 とは、円周 S^1 を \mathbb{Z}_2 対称性で割ることにより得られる空間であり、オービフォルドと呼ばれる。具体的には、 S^1 上において、

$$-y \sim y, \quad (3.35)$$

という同一視を行う (図 3.2)。このとき、余剰次元上の $y = 0, \pi R$ の点は \mathbb{Z}_2 変換 ($y \rightarrow -y$) をしても当然変化しない。このような点のことを多様体上の固定点と呼ぶ。このような余剰次元を持つ時空上で理論を構成する際には、(3.2) の他に、

$$\hat{\mathcal{L}}(x, -y) = \hat{\mathcal{L}}(x, y), \quad (3.36)$$

という一価性が要請される。したがって、この一価性に関する新たな境界条件が、理論に含まれる各場に与えられる。

今、余剰次元の座標における $y \rightarrow y + 2\pi R$ の並進を T 、 $y \rightarrow -y$ の反転を R_0 と表すことにして、 $R_0 T R_0$ という変換を y に施してみると、

$$\begin{aligned} R_0 T R_0 [y] &= [y - 2\pi R] \\ &= T^{-1} [y]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

つまり、 $R_0 T R_0 = T^{-1}$ であり、これを書き換えると $(T R_0)^2 = 1$ となる。ここで、 $R_0^2 = 1$ より R_0 の固有値は ± 1 だから、 T の固有値も ± 1 となることが要求される。よって、 S^1 上では物質場の境界条件において、(3.28) のようなひねりの位相 α が許されたが、 S^1/\mathbb{Z}_2 上では $\alpha = 0, \pi$ に限定される。また、 $(T R_0)^2 = 1$ より $T R_0$ は R_0 と同様の反転と見なすことが出来る。実際、 $\pi R + y$ に対してこの変換を施してみると、

$$T R_0 [\pi R + y] = [\pi R - y], \quad (3.38)$$

となり、これは確かに πR に関する反転になっていることが分かる。そこで、 $R_1 \equiv TR_0$ と定義すると、 S^1/\mathbb{Z}_2 上には T , R_0 , そして、 R_1 という 3 つの変換とそれに伴う同一視が存在し、このうち 2 つが独立であるということが出来る。これらの変換が満たす関係をまとめると、

$$R_0^2 = 1, R_1^2 = 1, R_1 R_0 = T, \quad (3.39)$$

となる。したがって、 S^1/\mathbb{Z}_2 上で理論を考える際にはこれらのうち 2 つを選び、それらの下で理論が不変になるように各場の境界条件を与えればよい。

3.3.1 2 種類の境界条件

ここでは、 S^1/\mathbb{Z}_2 上における境界条件の選び方が 2 種類存在することを説明する [16–18]。そのために、例として $U(1)$ ゲージ理論を考える。ラグランジアン密度は以下のように与えられる、

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} + (D_M\phi)^*(D^M\phi) - m_\phi^2|\phi|^2 + \bar{\psi}(i\Gamma^M D_M - m_\psi)\psi. \quad (3.40)$$

ここで、 ϕ に作用する共変微分は $D_M \equiv \partial_M + igq_\phi A_M$ であり、 q_ϕ は ϕ の $U(1)$ チャージである。 ψ についても同様に、共変微分は $D_M \equiv \partial_M + igq_\psi A_M$ であり、 $U(1)$ チャージは q_ψ である。

このラグランジアン密度は、2 種類の境界条件のとり方の下で不変である。境界条件の違いは、各場のフーリエ展開に影響するので、結果として導かれる 4 次元時空上の有効理論に違いを生むことになる。以下では、実際に 2 種類の境界条件の下で有効理論を導き、それぞれの特徴を見てみることにする。なお、ここでの議論では、 S^1/\mathbb{Z}_2 上の独立な変換として、 T と R_0 を考えることにする。

はじめに境界条件が内部自己同型な場合について見てみる。この境界条件は、 $M^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ 上でゲージ理論を考える際に一般的に用いられるものであり、また、この条件の下で有効理論を導いた際には、標準模型のようなカイラルな理論を構成できるという特徴がある。 $M^4 \times S^1$ 上ではワイルフェルミオンを定義出来ず、結果として有効理論にそれが現れないという問題があったが、 S^1/\mathbb{Z}_2 コンパクト化はその解決策になるということである。

まず、(3.2) を満たすような各場の境界条件は、以下のように与えられる：

$$\phi(x, y + 2\pi R) = e^{i\alpha_\phi} \phi(x, y), \quad (3.41)$$

$$\psi(x, y + 2\pi R) = e^{i\alpha_\psi} \psi(x, y), \quad (3.42)$$

$$A_M(x, y + 2\pi R) = A_M(x, y). \quad (3.43)$$

ここで、 α_ϕ と α_ψ は先程議論したように 0 または π である。次に、(3.36) を満たすような各場の境界条件を与えると、

$$\phi(x, -y) = \eta_\phi \phi(x, y), \quad (3.44)$$

$$\psi(x, -y) = \eta_\psi i\Gamma^5 \psi(x, y), \quad (3.45)$$

$$A_\mu(x, -y) = A_\mu(x, y), \quad (3.46)$$

$$A_5(x, -y) = -A_5(x, y). \quad (3.47)$$

ここで、 η_ϕ と η_ψ は固有の \mathbb{Z}_2 パリティであり、1 または -1 である。また、この境界条件の興味深い点として、(3.45) において ψ を $\psi_{L,R}$ に分解してやると、

$$\psi_L(x, -y) = +\eta_\psi \psi_L(x, y), \quad (3.48)$$

$$\psi_R(x, -y) = -\eta_\psi \psi_R(x, y), \quad (3.49)$$

というように、 ψ_L と ψ_R で \mathbb{Z}_2 パリティが異なるという特徴がある。さらに、注意すべき点として、 ψ の \mathbb{Z}_2 変換は一種のカイラル変換になっているので、この境界条件を用いる際は、 $m_\psi = 0$ と置く必要がある。また、 A_M はベクトルであるため第 μ 成分と第 5 成分で \mathbb{Z}_2 変換性が異なり、結果として (3.46) と (3.47) のように \mathbb{Z}_2 パリティが反対になる。

今、これらの境界条件の下で、各場のフーリエ展開を行う。 ϕ については、

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \phi^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{ny}{R} \phi^{(n)}(x), \quad (3.50)$$

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{ny}{R} \phi^{(n)}(x), \quad (3.51)$$

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{(n - \frac{1}{2})y}{R} \phi^{(n)}(x), \quad (3.52)$$

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{(n - \frac{1}{2})y}{R} \phi^{(n)}(x). \quad (3.53)$$

ここで、 (α_ϕ, η_ϕ) は、それぞれ、 $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(\pi, 1)$, そして $(\pi, -1)$ である。また、 ψ については、

$$\psi_L(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \psi_L^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{ny}{R} \psi_L^{(n)}(x), \quad (3.54)$$

$$\psi_R(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{ny}{R} \psi_R^{(n)}(x). \quad (3.55)$$

ここでは、 $(\alpha_\psi, \eta_\psi) = (0, 1)$ である。最後に、 A_M については、

$$A_\mu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} A_\mu^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{ny}{R} A_\mu^{(n)}(x), \quad (3.56)$$

$$A_5(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{ny}{R} A_5^{(n)}(x). \quad (3.57)$$

以上より、有効理論に現れる場は $(\phi(x, y))$ のフーリエ展開として (3.50) を用いた場合、 $\phi^{(0)}(x)$, $\psi_L^{(0)}(x)$, そして $A_\mu^{(0)}(x)$ である。これは、明らかにカイラルな理論である。よって、高次元理論から出発して標準模型を導くような現実的な模型を作る際は、 $M^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ 上で内部共役な境界条件を与えればよい。

次に、境界条件が外部自己同型な場合について考える。今、 T に関する境界条件については、内部自己同型な境界条件の場合と同様である。但し、先程は α_ϕ と α_ψ が 0 か π しか許されなかった

が、ここでは任意の実定数をとることが許される。これは、すぐ後に示すように ϕ と ψ の \mathbb{Z}_2 変換が単純な反転とはなっていないからである。一方、 R_0 に関する各場の境界条件は、

$$\phi(x, -y) = \phi^*(x, y), \quad (3.58)$$

$$\psi(x, -y) = i\psi^c(x, y), \quad (3.59)$$

$$A_\mu(x, -y) = -A_\mu(x, y), \quad (3.60)$$

$$A_5(x, -y) = A_5(x, y), \quad (3.61)$$

と与えられる。ここで、 $\psi^c (\equiv -i\Gamma^2\psi^*)$ は ψ の荷電共役である。この境界条件の著しい特徴として、 ϕ と ψ が境界条件を通してそれらの複素共役と関係付いている。また、 A_μ と A_5 の \mathbb{Z}_2 パリティが先程とは逆になっている。これらの境界条件の下で各場のフーリエ展開を行うと、

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n+\frac{\alpha\phi}{2\pi}}{R}y} \phi^{(n)}(x), \quad (3.62)$$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n+\frac{\alpha\psi}{2\pi}}{R}y} \psi^{(n)}(x), \quad (3.63)$$

$$A_\mu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{ny}{R} A_\mu^{(n)}(x), \quad (3.64)$$

$$A_5(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} A_5^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{ny}{R} A_5^{(n)}(x). \quad (3.65)$$

ここで、注目すべき点として、(3.58) と (3.59) にそれぞれ (3.62) と (3.63) を代入すると、

$$\phi^{*(n)}(x) = \phi^{(n)}(x), \quad (3.66)$$

$$\Gamma^2\psi^{*(n)}(x) = \psi^{(n)}(x), \quad (3.67)$$

が得られ、これらより $\phi^{(n)}$ と $\psi^{(n)}$ は実場であることが分かる。以上より、有効理論に現れる場は、 $\phi^{(0)}$ 、 $\psi^{(0)}$ 、そして $A_5^{(0)}$ である。ここで、境界条件が内部自己同型な場合とは A_μ と A_5 の \mathbb{Z}_2 パリティが逆になっていたことから、ゼロモードを持つ場も逆になっている。これにより、5次元時空上には存在したゲージ場が4次元時空上の有効理論には現れていない。これは次元還元の際にゲージ対称性が破れたことを意味する。

今、理論に2種類のゲージ群が存在し、それらが異なる種類の境界条件をとる場合、物質場が両方のゲージ量子数を持つことが出来ないのは以上の議論から明らかである。つまり、5次元時空上の理論において適当に境界条件を与えると、有効理論における物質場がゲージ相互作用に関して分離される状況を作ることが出来る。これは例えば暗黒物質を説明するようなモデルを作る際に有効である。

しかし、例外的な場合が存在する。それはエキゾチックなゲージ対称性と呼ばれるものである [19–21]。以下がそのような場合のラグランジアン密度の一例である：

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4} B_{MN} B^{MN} - \frac{1}{4} C_{MN} C^{MN} + \sum_{a=1,2} \{(D_M \phi_a)^* (D^M \phi_a) - m_a^2 |\phi_a|^2\}. \quad (3.68)$$

ここで、 ϕ_a に作用する共変微分は $D_M = \partial_M + igq_a B_M + ig'q'_a C_M$ である。 B_M が内部自己同型な境界条件を満たす $U(1)_B$ ゲージ場であり、 C_M が外部自己同型な境界条件を満たす $U(1)_C$ ゲージ場である。 B_{MN} と C_{MN} がそれらの場の強さである。 この $\hat{\mathcal{L}}$ が (3.2) と (3.36) の要請を満たすためには、 ϕ_a の $U(1)$ チャージと質量が、

$$q_1 = q_2, \quad q'_1 = -q'_2, \quad m_1 = m_2, \quad (3.69)$$

であり、また、その境界条件が、

$$\phi_a(x, y + 2\pi R) = e^{i\alpha} \phi_a(x, y), \quad (3.70)$$

$$\phi_1(x, -y) = \eta \phi_2(x, y), \quad (3.71)$$

である必要がある。ここで、 α は 0 または π 、 η は 1 または -1 である。これらの境界条件の下でフーリエ展開を行うと、

$$\phi_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n+\frac{\alpha}{2\pi}}{R}y} \phi^{(n)}(x), \quad (3.72)$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{n+\frac{\alpha}{2\pi}}{R}y} \eta \phi^{(n)}(x), \quad (3.73)$$

となる。ここで、注目すべき点がある。それは、5次元時空上において2種類あった場が、有効理論においては1種類になっているという点である。これは、もともと $U(1)_C$ チャージによって区別されていた2つの場が、次元還元に伴う $U(1)_C$ の破れによって区別できなくなったことによるものである。

3.3.2 $SU(n)$ ゲージ理論における内部自己同型な境界条件

ここでは、 $M^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ 上でスカラー場を含むような $SU(n)$ ゲージ理論を考え、そこに含まれる各場が内部自己同型な境界条件を満たすような場合について考えてみる。ラグランジアン密度は以下のように与えられる：

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2} \text{tr} F_{MN} F^{MN} + (D_M \phi)^\dagger D^M \phi. \quad (3.74)$$

ϕ に作用する共変微分は $D_M \equiv \partial_M + igA_M$ である。特に重要ではないので、 ϕ のバルク質量は 0 としてある。このとき、 R_1 , R_0 , そして、 T に関する A_M の境界条件は、以下のように与えられる：

$$A_\mu(x, -y) = P_0 A_\mu(x, y) P_0^\dagger, \quad (3.75)$$

$$A_5(x, -y) = -P_0 A_5(x, y) P_0^\dagger, \quad (3.76)$$

$$A_\mu(x, 2\pi R - y) = P_1 A_\mu(x, y) P_1^\dagger, \quad (3.77)$$

$$A_5(x, 2\pi R - y) = -P_1 A_5(x, y) P_1^\dagger, \quad (3.78)$$

$$A_M(x, y + 2\pi R) = U_1 A_M(x, y) U_0^\dagger. \quad (3.79)$$

ここで, P_0, P_1 , そして, U_1 はそれぞれ R_0, R_1 , そして, T の表現行列である. これらの行列は当然 (3.39) の関係を満たすので,

$$P_0^2 = I, P_1^2 = I, P_1 P_0 = U_1, \quad (3.80)$$

となる. ϕ の境界条件についても考えると, それらは,

$$\phi(x, -y) = \eta_0 T_\phi[P_0] \phi(x, y), \quad (3.81)$$

$$\phi(x, 2\pi R - y) = \eta_1 T_\phi[P_1] \phi(x, y), \quad (3.82)$$

$$\phi(x, y + 2\pi R) = \eta_0 \eta_1 T_\phi[U_1] \phi(x, y), \quad (3.83)$$

と与えられる. η_0 と η_1 は固有 \mathbb{Z}_2 パリティであり, 1 または -1 である. $T_\phi[P_0], T_\phi[P_1]$, そして, $T_\phi[U_1]$ はそれぞれの変換に対応した表現行列であり, これらもちろん, (3.80) と同様の関係をみたす.

ここで, $M^4 \times S^1$ 上での $SU(n)$ ゲージ場に関する議論を振り返ると, 境界条件に含まれる表現行列は $SU(n)$ ゲージ変換の前後で必ずしも一致せず, そのようなゲージ対称性は破れるのであった. $M^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ 上でも同様のことを考えてみる. P_0, P_1 , そして, U_1 は $SU(n)$ ゲージ変換 $\Omega(x, y)$ によって一般に,

$$P'_0 = \Omega(x, -y) P_0 \Omega^\dagger(x, y), \quad (3.84)$$

$$P'_1 = \Omega(x, 2\pi R - y) P_1 \Omega^\dagger(x, y), \quad (3.85)$$

$$U'_1 = \Omega(x, y + 2\pi R) U_1 \Omega^\dagger(x, y), \quad (3.86)$$

と変換される. ゲージ変換の前後で形が変わったとしても, これらは当然同じ物理を与えるので, それらは同値関係を持っているといえる:

$$(P'_0, P'_1, U'_1) \sim (P_0, P_1, U_1). \quad (3.87)$$

今, (3.80) に注意して, (P_0, P_1, U_1) が全て対角な場合を考えてみると,

$$\begin{aligned} P_0 &= \text{diag}(\overbrace{+1, \dots, +1, +1, \dots, +1, -1, \dots, -1, -1, \dots, -1}^n), \\ P_1 &= \text{diag}(+1, \dots, +1, -1, \dots, -1, +1, \dots, +1, -1, \dots, -1), \\ U_1 &= \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, \underbrace{-1, \dots, -1}_r, \underbrace{+1, \dots, +1}_{s=n-p-q-r}), \end{aligned} \quad (3.88)$$

と書くことが出来る. このとき, p, q, r , そして, $s(=n-p-q-r)$ は $n \times n$ 行列の中のブロック対角行列の大きさを表しているので, このとき $SU(n)$ ゲージ対称性は,

$$SU(n) \rightarrow SU(p) \times SU(q) \times SU(r) \times SU(s) \times U(1)^{3-\kappa}, \quad (3.89)$$

と破れることになる. ここで, κ は $SU(0)$ と $SU(1)$ の数である. $SU(1)$ は $U(1)$ を, $SU(0)$ は何も無いことを表している

以上のように (P_0, P_1, U_1) として対角行列を選ぶと非常に見通しが良いが、一般には対角でないものがいくらでも考えられる。しかし、そのような場合でも、それが含まれる同値類の中には必ず対角なものが存在することを示すことが出来る [22]。したがって、物理的には対角なものにのみ注目して議論すればよい。

第4章

ゲージ・ヒッグス統一理論

ここでは本研究の基盤となるゲージ・ヒッグス統一理論の概略を理解するために、まずアハラノフ-ボーム効果とウィルソン線について復習する。その後ゲージ・ヒッグス統一理論の特長である細谷機構について簡単な具体例を交えて説明する。

4.1 アハラノフ-ボーム効果

ここでは、アハラノフ-ボーム効果について復習する [23].

はじめに、磁束密度 $\mathbf{B} (= \nabla \times \mathbf{A})$ が空間全域で $\mathbf{0}$ の場合を考える。このとき、 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ を満たすようなベクトルポテンシャル \mathbf{A} は、以下のような2つの場合が考えられる：

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{A} = \nabla\chi(\mathbf{x}). \quad (4.2)$$

ここで、 χ は一価関数とする。もちろん2つの場合に本質的な違いはなく、これらはゲージ変換によって繋がった物理的には同じ配位である。今、(4.1) の場合の波動関数を $\psi(\mathbf{x}, t)$ とすると、これは明らかに自由運動をするので、そのシュレーディンガー方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t), \quad (4.3)$$

である。ここで、(4.1) から (4.2) へのゲージ変換を考えてみると、それは、

$$\nabla \rightarrow \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \nabla\chi(\mathbf{x}), \quad (4.4)$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\chi(\mathbf{x})\right\} \psi(\mathbf{x}, t), \quad (4.5)$$

となる。これらの変換の下で、(4.3) は当然不変に保たれる。

次に、空間の単連結な領域で $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ の場合を考える。この場合でも (4.2) のような \mathbf{A} が許される。今、 χ を、

$$\chi(\mathbf{x}) = \int_{x_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}'), \quad (4.6)$$

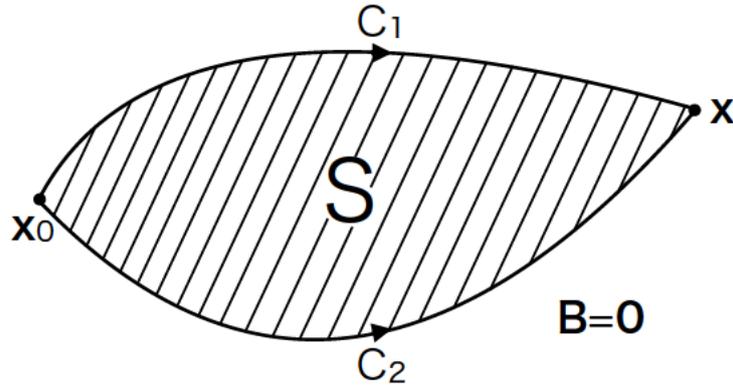


図 4.1 単連結な領域で $B = 0$ の場合

というようにとると、これは明らかに (4.2) を満たし、また、1 価関数である。実際、図 4.1 のように $x_0 \rightarrow x$ の 2 つの異なる経路 C_1 と C_2 を考え、それらの経路を通った場合の χ の差を計算してみると、

$$\begin{aligned}
 \chi_{C_2}(x) - \chi_{C_1}(x) &= \int_{C_2} dx' \cdot A(x') - \int_{C_1} dx' \cdot A(x') \\
 &= \oint_{C_2 - C_1} dx' \cdot A(x') \\
 &= \int_S dS \cdot (\nabla \times A) \\
 &= \int_S dS \cdot B = 0,
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

となり、 χ が 1 価であることが示せる。途中、ストークスの定理を用いた。以上より、単連結な領域で $B = 0$ の場合でもベクトルポテンシャルを (4.2) のように表すことが出来、これはゲージ変換によっていつでも (4.1) に持っていくことが出来るので、結局自由運動に帰着することが分かる。

最後に、空間の非単連結な領域で $B = 0$ の場合を考える。ソレノイドが存在する空間などがこれに当たる。今、無限に延びたソレノイドを仮定し、その周りを 1 周するような経路 C に沿って A を線積分すると、

$$\begin{aligned}
 \oint_C dx' \cdot A(x') &= \int_S dS \cdot B \\
 &= \Phi \neq 0,
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

となる。ここで Φ は S を貫く磁束であり絶対に 0 には出来ないで、この線積分も 0 にはなり得ない。つまり、先程の場合とは異なり χ が 1 価関数ではなくなってしまふ。これは、もはや A を (4.2) のように表すことが出来ないことを意味しており、よって、ゲージ変換で (4.1) とすることも不可能である。実際、(4.8) から A を 0 にすることが出来ないのは明らかである。したがって、この場合は本質的に自由運動とは異なるということである。

より具体的に考えるために、図 4.2 のような 2 重スリット実験を考える。 $B \neq 0$ の円の部分は無

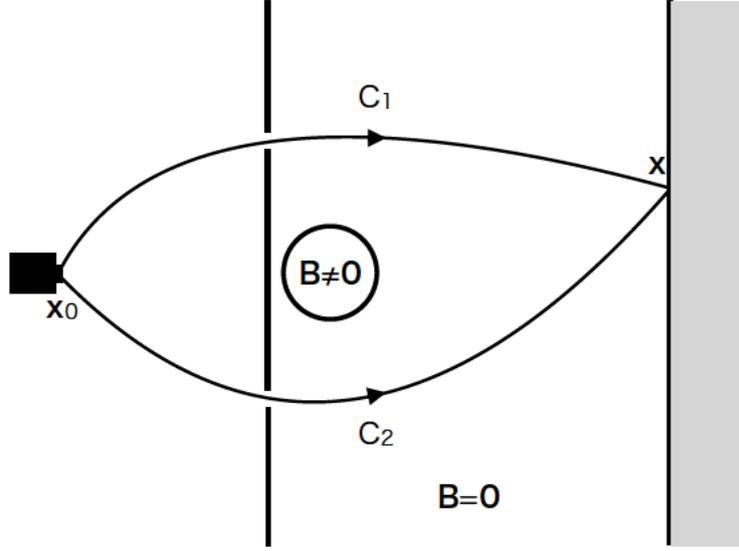


図 4.2 非単連結な領域で $B = 0$ の場合

限に延びるソレノイドの断面であり、それ以外の領域では $B = 0$ とする。ここで、ソレノイド内外の A としては、

$$A_{\text{in}} = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0 \right), \quad (4.9)$$

$$A_{\text{out}} = \left(-\frac{B a^2}{2 r^2}y, \frac{B a^2}{2 r^2}x, 0 \right), \quad (4.10)$$

のようなとり方が考えられる。 a はソレノイドの半径である。これ以外のとり方も可能であるが、それらもゲージ変換によって繋がっているため本質的には同じである (但し、先程述べたようにソレノイドが存在するため、1 価関数によるゲージ変換を用いて $A=0$ にすることは出来ない)。今、電子銃から放たれた電子が C_1 と C_2 の経路を通った場合のスクリーン上での波動関数をそれぞれ ψ_1 , ψ_2 とする。このとき、各経路上においては波束が単連結な領域を運動していると思なすことが出来るので、 ψ_1 , ψ_2 は (4.5), (4.6) よりソレノイドが無い $A = 0$ の場合の波動関数 $\psi_1^{(0)}$, $\psi_2^{(0)}$ を用いて、

$$\psi_{1,2} = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{C_{1,2}} dx' \cdot A(x')\right) \psi_{1,2}^{(0)}, \quad (4.11)$$

と書くことが出来る。ここで、スクリーン上の波動関数 ψ は重ね合わせの原理より、 ψ_1 と ψ_2 の和で表されるので、

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 \\ &= \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{C_1} dx' \cdot A(x')\right) \psi_1^{(0)} + \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{C_2} dx' \cdot A(x')\right) \psi_2^{(0)} \\ &= \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{C_1} dx' \cdot A(x')\right) \left\{ \psi_1^{(0)} + \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{C_2-C_1} dx' \cdot A(x')\right) \psi_2^{(0)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{C_1} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}')\right) \left\{ \psi_1^{(0)} + \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \oint d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}')\right) \psi_2^{(0)} \right\} \\
&= \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{C_1} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}')\right) \left\{ \psi_1^{(0)} + \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \Phi\right) \psi_2^{(0)} \right\}, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

となる。これより、確率密度は、

$$|\psi|^2 = |\psi_1^{(0)} + e^{i\theta} \psi_2^{(0)}|^2, \tag{4.13}$$

で与えられる。ここで、

$$\theta \equiv \frac{e}{\hbar c} \Phi, \tag{4.14}$$

であり、これをアハラノフ-ボーム位相と呼ぶ。θは(4.13)に現れていることから、ゲージ変換では消すことが出来ない物理的な自由度であることが分かる。これは波束が $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ の領域のみを運動しているにもかかわらず、ソレノイドによる物理的な影響を受けるということである。したがって、古典電磁気学では電磁場 \mathbf{E} , \mathbf{B} が基本的な物理量として議論され、電磁ポテンシャル ϕ , \mathbf{A} はあくまでも付随的なものであったが、量子論においては ϕ , \mathbf{A} こそがより基本的であるということである。

以上が量子力学におけるアハラノフ-ボーム効果であったが、 S^1 のような非単連結な余剰次元を持つ高次元時空上でゲージ理論を考えた場合も同様に、物理的な位相が考えられる。これこそが、ゲージ・ヒッグス統一理論においてヒッグス粒子と見なされるものである。

4.2 ウィルソン線

ここでは、ゲージ理論において現れるウィルソン線という物理量について説明する。この量はゲージ理論を接続の理論として定義する際に、自然に導入されるものである。

はじめに可換な場合について考える。今、物質場として複素スカラー場 ψ を考えると、その理論は明らかに定數位相 α による変換 $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ の下で不変である。しかし、 α が時空に依存する場合はそうではない。ここで、 $x \neq y$ であるような2つの点における ψ の値の差を考えてみると、

$$\psi(y) - \psi(x) = e^{i\alpha(y)} \psi(y) - e^{i\alpha(x)} \psi(x), \tag{4.15}$$

であるから、これは α に依存することが分かる。よって、この場合では、単純には微分を定義出来ないことになってしまう。つまり、異なる2点間で ψ を比べるためには別の要素が必要になるということである。

そこで、ウィルソン線 $W(x, y)$ という2つの点に依存する量を定義し、以下のような変換性を持つことにする：

$$W(x, y) \rightarrow e^{i\alpha(x)} W(x, y) e^{-i\alpha(y)}. \tag{4.16}$$

この W を用いた次の量の変換性を考えてみると、

$$W(x, y) \psi(y) - \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} W(x, y) e^{-i\alpha(y)} e^{i\alpha(y)} \psi(y) - e^{i\alpha(x)} \psi(x)$$

$$= e^{i\alpha(x)} \{W(x, y)\psi(y) - \psi(x)\}, \quad (4.17)$$

となるので、この絶対値をとった $|W(x, y)\psi(y) - \psi(x)|$ という量は時空に依存する α にも独立であることが分かる。そこで、この量を使って新たな微分を、

$$D_\mu \psi(x) \equiv \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{W(x, x + \delta x)\psi(x + \delta x) - \psi(x)}{\delta x^\mu}, \quad (4.18)$$

と定義すると、これは ψ と同じ $D_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha} D_\mu \psi$ という変換性を持つので、この微分を用いて理論を定義すれば、それは明らかに時空に依存する α による変換の下で不変である。もちろん、これは共変微分である。

W はその変換性などから $W(x, x) = 1$ であることが期待されるので、これより $W(x, x + \delta x)$ は以下のように展開出来る：

$$W(x, x + \delta x) = 1 + ie\delta x^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(\delta x^2). \quad (4.19)$$

ここで、 A_μ はまさにゲージ場であり、 e はゲージ結合定数である。これを (4.16) に代入すると A_μ の変換性が求まり、

$$\begin{aligned} W(x, x + \delta x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)} W(x, x + \delta x) e^{-i\alpha(x + \delta x)} \\ &= e^{i\alpha(x)} (1 + ie\delta x^\mu A_\mu(x)) e^{-i\alpha(x)} (1 - i\partial_\mu \alpha(x) \delta x^\mu) \\ &= 1 + ie\delta x^\mu \left(A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

より、

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \quad (4.21)$$

となる。また、 D_μ も A_μ を用いて表すと、

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &= \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{(1 + ie\delta x^\mu A_\mu(x))\psi(x + \delta x) - \psi(x)}{\delta x^\mu} \\ &= \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \left(\frac{\psi(x + \delta x) - \psi(x)}{\delta x^\mu} + ieA_\mu(x)\psi(x + \delta x) \right) \\ &= (\partial_\mu + ieA_\mu(x))\psi(x), \end{aligned} \quad (4.22)$$

となり、 A_μ は明らかに接続としての役割を果たしている。

今、ウィルソン線は経路 $P: y^\mu \rightarrow x^\mu$ に沿った線積分を用いて、

$$W_P(x, y) = \exp\left(-ie \int_y^x dz^\mu A_\mu(z)\right), \quad (4.23)$$

と表すことが出来る。これは A_μ の汎関数としての表示になっている。実際、 $y = x + \delta x$ とすると、

$$W_P(x, x + \delta x) = \exp\left(ie \int_x^{x + \delta x} dz^\mu A_\mu(z)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= W_P(x, x) + \frac{\partial W_P}{\partial x^\mu}(x, x)\delta x^\mu \\
&= 1 + ieA_\mu(x)\delta x^\mu,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

となり，確かに (4.19) と一致する．途中，微分積分学の基本定理を用いた．通常，ウィルソン線と
いったら (4.23) のように表わされた W_P を指す．より正確には， z^μ を $\lambda(0 \leq \lambda \leq 1)$ の関数とし，
また， $z^\mu(0) = y$ ， $z^\mu(1) = x$ として，

$$W_P(x, y) = \exp\left(-ie \int_0^1 d\lambda \frac{dz^\mu}{d\lambda} A_\mu(z(\lambda))\right), \tag{4.25}$$

と書く．ここで，(4.23) の A_μ に対して (4.21) の変換を施すと，

$$\begin{aligned}
W_P(x, y) &\rightarrow \exp\left\{-ie \int_y^x dz^\mu \left(A_\mu(z) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(z)\right)\right\} \\
&= \exp\left(-ie \int_y^x dz^\mu A_\mu(z)\right) \exp\left(i \int_y^x dz^\mu \partial_\mu\alpha(z)\right) \\
&= e^{i\alpha(x)} W_P(x, y) e^{-i\alpha(y)},
\end{aligned} \tag{4.26}$$

となり，確かに (4.16) を満たしている．注目すべきこととして，この変換は線積分の経路には依ら
ず，端点にのみ依存している．したがって，積分経路として $x = y$ であるような閉路をとった，

$$W_P(x, x) = \exp\left(-ie \oint dz^\mu A_\mu(z)\right), \tag{4.27}$$

という量は明らかにゲージ不変であり，これをウィルソンループと呼ぶ．また，

$$\theta \equiv e \oint dz^\mu A_\mu(z), \tag{4.28}$$

をウィルソン線位相と呼ぶ．

次に，非可換な場合でのウィルソン線について考える．単純には，可換な場合で与えた (4.25) に
おいて， $A_\mu \rightarrow A_\mu^a T^a$ とする拡張が考えられる (T^a は $SU(n)$ の生成子)．しかし，これは不十分
である．なぜならば， $A_\mu^a T^a$ は異なる点において，必ずしも可換では無いからである．正しい非可
換な場合での W_P は，以下のように与えられる：

$$W_P(x, y) = P\left\{\exp\left(-ig \int_0^1 d\lambda \frac{dz^\mu}{d\lambda} A_\mu^a(z(\lambda)) T^a\right)\right\}. \tag{4.29}$$

ここで， P は経路順序積と呼ばれ，時間順序積のように $\{\dots\}$ の中身を λ の値の順に並べること
を示すものである．この W_P は，当然 λ に関する発展方程式，

$$\frac{d}{d\lambda} W_P(z(\lambda), y) = \left(-ig \frac{dz^\mu}{d\lambda} A_\mu^a(z(\lambda)) T^a\right) W_P(z(\lambda), y), \tag{4.30}$$

の解となっている．

(4.29) で与えた W_P が正しい一般化になっていることを示すために、この W_P が (4.16) と同等の以下の変換則、

$$W_P(x, y) \rightarrow U(x)W_P(x, y)U^\dagger(y), \quad (4.31)$$

を満たすことを示す。ここで、 $U(x) \equiv e^{i\alpha^a(x)T^a}$ である。今、準備として (4.30) を書き換えると、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dz^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial z^\mu} + ig \frac{dz^\mu}{d\lambda} A_\mu^a(z(\lambda))T^a \right) W_P(z(\lambda), y) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{dz^\mu}{d\lambda} \{ \partial_\mu + ig A_\mu^a(z(\lambda))T^a \} W_P(z, y) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{dz^\mu}{d\lambda} D_\mu(A) W_P(z, y, A) = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

最後の式では $A_\mu (\equiv A_\mu^a T^a)$ を含むことを強調するために、 $D_\mu(A)$ 、 $W_P(z, y, A)$ と書いた。また、 A_μ のゲージ変換を A_μ^U と表すことにすると、当然 D_μ と U は可換な場合と同様の、

$$D_\mu(A^U)U(x) = U(x)D_\mu(A), \quad (4.33)$$

という関係を持つ (両辺の右側から ψ を掛けると $D_\mu\psi$ が ψ と同じ変換性を持つことを表す式になる)。このとき、(4.32) の左右からそれぞれ $U(z)$ と $U^\dagger(y)$ を掛け、さらに (4.33) の関係を使うと、

$$\frac{dz^\mu}{d\lambda} D_\mu(A^U)U(z)W_P(z, y, A)U^\dagger(y) = 0, \quad (4.34)$$

となる。これは、 $U(z)W_P(z, y, A)U^\dagger(y)$ が $A_\mu \rightarrow A_\mu^U$ とした場合の (4.32) の解となっていることを表しており、よって、 W_P の変換則は確かに (4.31) であることを示すことが出来た。したがって、(4.29) は正しい一般化であるといえる。

最後に、非可換な場合のウィルソンループについて考える。可換な場合では、単に閉路をとればよかったが、ここでは先程の議論と同様に非可換性から、

$$W_P(x, x) \rightarrow U(x)W_P(x, x)U^\dagger(x) \neq W_P(x, x), \quad (4.35)$$

である。但し、その固有値は不変であることは明らかなので、結局、そのトレースをとった $\text{tr}W_P(x, x)$ が非可換な場合のゲージ不変量となることが分かる。

4.3 細谷機構

ここでは、高次元時空上でゲージ理論を考えた際に働く、ゲージ対称性の破れの機構について説明する。なお、この機構は考案者の名前をとって細谷機構と呼ばれる [24–26]。

今、 $M^4 \times S^1$ 上で $SU(n)$ ゲージ場の理論を考える。このとき、ラグランジアン密度や境界条件は、(3.15)、(3.16) で与えられた。ここで、 S^1 を 1 周するようなウィルソン線 ($y + 2\pi R \sim y$ だからウィルソンループといってもよい) に U_1^\dagger を掛けた量を考える：

$$\hat{W}_P \equiv W_P U_1^\dagger$$

$$= P \left\{ \exp \left(-ie \int_0^{2\pi R} dy A_5(x, y) \right) \right\} U_1^\dagger. \quad (4.36)$$

この量にゲージ変換をしてみると,

$$\begin{aligned} \hat{W}_P &\rightarrow W'_P U_1'^\dagger \\ &= U(x, y + 2\pi R) W_P U^\dagger(x, 0) U(x, 0) U_1^\dagger U^\dagger(x, y + 2\pi R) \\ &= U(x, y + 2\pi R) W_P U_1^\dagger U^\dagger(x, y + 2\pi R) \\ &= U(x, y + 2\pi R) \hat{W}_P U^\dagger(x, y + 2\pi R), \end{aligned} \quad (4.37)$$

となり, 当然その固有値はゲージ不変である. 途中, (3.19) を用いた. ここで, その固有値を $e^{-i\theta_i(x)}$ ($i = 1 \sim n$) と書くことにすると, A_5 が定数となる配位を考えた場合には θ_i も定数となる. この θ_i は, $M^4 \times S^1$ 上のゲージ理論におけるアハラノフ-ボーム位相と見なすことが出来る. また, すぐ後で見えるようにそれらのとる値によっては, ヒッグス機構のようにもともとのゲージ対称性を破ることが出来る. したがって, A_5 に由来するスカラー場 (正確にはそのゼロモード) をヒッグス場と見なすことが出来, これは高次元時空においてゲージ場とヒッグス場が統一されていることになる. これを以ってゲージ・ヒッグス統一理論という [27-29].

今, 例として, $M^4 \times S^1$ 上のゲージ群として $SU(3)$ を考え, 簡単のために $U_1 = I$ とする. ここで, A_5 の背景場 A_5^c について \hat{W}_P を考えると,

$$\hat{W}_P = P \left\{ \exp \left(-ie \int_0^{2\pi R} dy A_5^c \right) \right\}, \quad (4.38)$$

となる. この \hat{W}_P はゲージ不変量であるから, もともとのゲージ群 $SU(3)$ の生成子 (ゲルマン行列),

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

のうち, \hat{W}_P と可換なものが構成する対称性のみが実際に理論に残るゲージ対称性である. そこで, この固有値 $e^{-i\theta_i}$ ($i = 1 \sim 3$) の定数位相について, $\sum_i \theta_i = 0$ であることに注意しつつ, それらのとり得る値を考えてみると,

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{cases} (0, 0, 0), (\pm \frac{2}{3}\pi, \pm \frac{2}{3}\pi, \pm \frac{2}{3}\pi), \\ (\alpha_1, \alpha_1, -2\alpha_1), \\ (\beta_1, \beta_2, -\beta_1 - \beta_2), \end{cases} \quad (4.40)$$

という3つの場合が考えられる(それぞれの括弧の中身の順番は違ってよい). 1番上の場合は, 単位行列に比例するような行列を与えるので, ゲルマン行列の全てと可換であり $SU(3)$ は破れずに完全に残る. 真ん中の場合は, 3つの対角成分のうち2つが同じ値なので, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, そして, λ_8 が可換である. よって, 残る対称性は $SU(2) \times U(1)$ である. 1番下の場合は, 全ての成分が異なるので, λ_3 と λ_8 のみが可換であり, 残る対称性は $U(1) \times U(1)$ である.

以上のような, $M^4 \times S^1$ 上のゲージ理論における, アハラノフ-ボーム位相による対称性の破れの機構を細谷機構と呼ぶ. この機構は明らかに, $U(1)$ ゲージ理論の場合には働かない. また, θ_i の値は量子効果によってほとんど一意的に決まる. つまり, 非常に興味深いことに, 高次元時空上の理論における境界条件などを上手く設定するだけで, 有効理論に残る対称性を制御することが出来るのである.

第 5 章

有効ポテンシャル

ゲージ・ヒッグス統一理論や extranatural インフレーション模型 [30] では、高次元ゲージ場の余剰次元成分由来のスカラー場をヒッグス場やインフラトンと見なす。これらのポテンシャルは量子効果によって生じるが、高次元のゲージ対称性によって紫外発散を含まない有限な形で得られることが期待される [15]。但し、これはあくまでも期待であり、その有限性に関する幾つかの議論はあるが [31, 32]、厳密な証明は存在しない。そのため、摂動的にそれを確認することが重要である。

ここでは、はじめに $M^4 \times S^1$ 上で $U(1)$ ゲージ理論を考え、その下で高次元ゲージ場の余剰次元成分由来のスカラー場 (以降これをヒッグス場と呼ぶことにする) の有効ポテンシャルを 2 ループレベルまで計算しその有限性を確かめる [33]。つづいて、量子重力と結合した $U(1)$ ゲージ理論を考え、ヒッグスポテンシャルへの重力子の寄与を調べる。

5.1 $M^4 \times S^1$ 上の $U(1)$ ゲージ理論

ここでは、 $M^4 \times S^1$ 上でディラックフェルミオンを含むような $U(1)$ ゲージ理論を考える。ラグランジアン密度は以下のように与えられる：

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} + \bar{\psi}i\Gamma^M D_M\psi - \frac{1}{2}(\partial_M A^M)^2. \quad (5.1)$$

ψ に作用する共変微分は $D_M = \partial_M + ieA_M$ である。このとき、(3.2) を満たすような各場の境界条件は、

$$A_M(x, y + 2\pi R) = A_M(x, y), \quad (5.2)$$

$$\psi(x, y + 2\pi R) = e^{i\alpha}\psi(x, y), \quad (5.3)$$

と与えられる。 α は任意の定數位相である。ここでは、簡単のために $\alpha = 0$ とする。(5.2) の下で A_5 をフーリエ展開した際のゼロモード $A_5^{(0)}$ を使って、ヒッグス場を以下のようにウィルソン線位相の形で定義する：

$$\theta = e \int_0^{2\pi R} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} A_5^{(0)} = 2\pi R e_4 A_5^{(0)}. \quad (5.4)$$

$e_4 (= e/\sqrt{2\pi R})$ は 4 次元時空上におけるゲージ結合定数である。

θ に関する有効ポテンシャルを計算するために、 A_5 を古典場と量子揺らぎに $A_5 \rightarrow A_5^c + A_5$ というように分離する。このとき、(5.1) は以下のように書き直される：

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} A_M \eta^{MN} \hat{\square} A_N + \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}_M \psi - e \bar{\psi} \Gamma^M A_M \psi. \quad (5.5)$$

$\tilde{\partial}_M = \partial_M + ie \delta_M^5 A_5^c$ である。ここでは、このラグランジアン密度を次元還元してから有効ポテンシャルを計算するのではなく、5次元時空上の理論のままループ計算をする。それにより得られた関数に含まれる 5 元運動量の第 5 成分は S^1 コンパクト化の影響により離散化されるので、運動量積分の第 5 成分に関する部分を無限和に書き換えることで、4次元時空上の理論における有効ポテンシャルが求まる（正確には次元を合わせるために全体に係数 $2\pi R$ を掛ける）。これはつまり、はじめに次元還元をして現れた無限個の KK モードを中間状態として足し上げるか、5次元時空上の粒子を中間状態として扱いその運動量の第 5 成分を離散化して足し上げるかという計算上の考え方の違いであるが、もちろん物理的な結果は同じである。但し、はじめに次元還元をすると式が煩雑になるので、それを避けるためにここでは後者を選択する。

$\tilde{\partial}_M$ より、 ψ の 5 元運動量は $\tilde{p}_M = (p_\mu, p_5 - \theta/2\pi R) = (p_\mu, m/R - \theta/2\pi R)$ と与えられる。 m は整数である。また、 A_5^c について最終的に興味があるのはそのゼロモードのみなので、はじめからゼロモードのみに注意を払うことにする。同様にして、 A_M の 5 元運動量は $k_M = (k_\mu, k_5) = (k_\mu, \ell/R)$ で与えられ、 ℓ は整数である。以上より、1 ループ有効ポテンシャルを計算すると、これに寄与するのはディラックフェルミオンのみなので、

$$\begin{aligned} -i\hat{V}^{1\text{-loop}} &= 2i \int \frac{d^5 p_E}{(2\pi)^5} \ln(\hat{p}_E^2) \\ &= \frac{2i}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \ln \left\{ p_E^2 + \left(\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

となる。下付き文字 E はユークリッド化された量であることを表している。2 つ目の等号では、運動量の第 5 成分に関する積分を無限和に書き換えている。ここで、(D.11) を用いると、4次元時空上での 1 ループ有効ポテンシャルが求まり、

$$V^{1\text{-loop}}(\theta) = \frac{3}{16\pi^6 R^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\theta)}{m^5}, \quad (5.7)$$

となる。ここで、 $V^{1\text{-loop}} = 2\pi R \hat{V}^{1\text{-loop}}$ である。 $V^{1\text{-loop}}$ は明らかに、 $\theta = \pi$ に極小値を持つ。

次に、2 ループ有効ポテンシャルを計算する。これはファインマン図的には、 $U(1)$ チャージを持つ粒子（今の場合はディラックフェルミオン）を含むような 1 粒子既約 (1-PI) の真空泡の図によって表される。よって、ここでは図 5.1 のように与えられる。波線と実線はそれぞれ A_M と ψ である。これはファインマン則により、

$$\begin{aligned} &-i\hat{V}_{\text{Fig. 5.1}}^{2\text{-loop}} \\ &= -\frac{(-ie)^2}{2!} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 q}{(2\pi)^5} (2\pi)^5 \delta^{(5)}(\hat{k} + \hat{p} - \hat{q}) \tilde{D}_{MM'}(\hat{k}) \text{tr} \{ \Gamma^M \tilde{S}(\hat{p}) \Gamma^{M'} \tilde{S}(\hat{q}) \} \end{aligned}$$

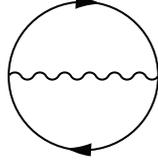


図 5.1 $U(1)$ ゲージボソンとディラックフェルミオンを含む 1-PI の真空泡の図

$$\begin{aligned}
&= 6ie^2 \int \frac{d^5 k_E}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 p_E}{(2\pi)^5} \frac{1}{\hat{k}_E^2 \hat{p}_E^2} - 3ie^2 \int \frac{d^5 p_E}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 q_E}{(2\pi)^5} \frac{1}{\hat{p}_E^2 \hat{q}_E^2} \\
&= \frac{6ie^2}{(2\pi R)^2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{\{k_E^2 + (\frac{\ell}{R})^2\} \{p_E^2 + (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2\}} \\
&\quad - \frac{3ie^2}{(2\pi R)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{\{p_E^2 + (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2\} \{q_E^2 + (\frac{n}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2\}}, \quad (5.8)
\end{aligned}$$

と表される．このとき， A_M と ψ の伝播関数は，

$$D_{MN}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{-i\hat{k}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)} \tilde{D}_{MN}(\hat{k}), \quad (5.9)$$

$$S(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} e^{-i\hat{p}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)} \tilde{S}(\hat{p}), \quad (5.10)$$

と与えられ，ここで，

$$\tilde{D}_{MN}(\hat{k}) \equiv \frac{-i\eta_{MN}}{\hat{k}^2 + i\epsilon}, \quad \tilde{S}(\hat{p}) \equiv \frac{i}{\hat{p} + i\epsilon}, \quad (5.11)$$

である．これより，(D.15) を用いると，4次元時空上でのヒッグスポテンシャルに対する 2 ループ補正が得られ，

$$V_{\text{Fig. 5.1}}^{2\text{-loop}}(\theta) = -\frac{6e_4^2}{16\pi^4(2\pi R)^4} \sum_{\ell, m=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^3} \frac{\cos(m\theta)}{m^3} + \frac{3e_4^2}{16\pi^4(2\pi R)^4} \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{\cos(m\theta) \cos(n\theta)}{m^3 n^3}, \quad (5.12)$$

となる．ここで， $V_{\text{Fig. 5.1}}^{2\text{-loop}} = 2\pi R \hat{V}_{\text{Fig. 5.1}}^{2\text{-loop}}$ である．よって， $V_{\text{Fig. 5.1}}^{2\text{-loop}}$ は $V^{1\text{-loop}}$ と同様に有限であることが確かめられた．

以上では， $M^4 \times S^1$ 上で $U(1)$ ゲージ理論を考えたが， $SU(n)$ ゲージ理論の場合についても同様に 2 ループレベルまでその有限性が確かめられている [34]．この場合はゲージ場やそのゴースト場も $SU(n)$ のゲージ量子数を持つので，これらを含むような図に関しても計算する必要がある．

5.2 $M^4 \times S^1$ 上の $U(1)$ ゲージ + 量子重力理論

ここでは， $M^4 \times S^1$ 上で量子重力と結合するような $U(1)$ ゲージ理論について考える [35]．物質粒子としてはディラックフェルミオンを含むとする．重力理論としてはアインシュタイン重力を考える．重力子は $U(1)$ チャージを持っていないので，ヒッグスポテンシャルにはゲージボソンと同

様に 1 ループレベルでは寄与しない。よって、その最低次の寄与を見るには、 $U(1)$ チャージを持つ粒子と重力子を含むような 2 ループの真空泡の図を計算すればよい。

考える理論にはフェルミオンが含まれているので、五脚場を以下のように用意する：

$$\begin{aligned} e_M^a e_N^b \eta_{ab} &= g_{MN}, & e^M_a e^N_b g_{MN} &= \eta_{ab}, \\ e^M_a e^N_b \eta^{ab} &= g^{MN}, & e_M^a e_N^b g^{MN} &= \eta^{ab}, \\ e_M^a e^N_a &= \delta_M^N, & e_M^a e_b^M &= \delta_b^a. \end{aligned} \quad (5.13)$$

小文字の添字は、局所ローレンツの添字である。また、平坦な計量は、

$$\eta_{MN} = \eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1), \quad (5.14)$$

と与えられる。このとき、5次元のガンマ行列は以下の代数関係を満たす：

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2g^{MN}, \quad \{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\eta^{ab}. \quad (5.15)$$

以上のように定義した量を用いて、ラグランジアン密度は、

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{eff}} = \sqrt{g} \left(-\frac{1}{\kappa^2} \mathcal{R} + \frac{1}{2} \bar{\psi} i e^M_a \Gamma^a D_M \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} \overleftarrow{D}_M i e^M_a \Gamma^a \psi \right) + \hat{\mathcal{L}}_{\text{GF}}, \quad (5.16)$$

と与えられる。ここで、 $g = \det(g_{MN})$ であり、 κ は 5 次元時空上の重力結合定数である。 \mathcal{R} はリッチスカラーであり、それは以下のように定義したクリストッフエル記号、リーマン曲率テンソル、そして、リッチテンソルによって定義される：

$$\begin{aligned} \Gamma^P_{MN} &= \frac{1}{2} g^{PQ} (\partial_N g_{QM} + \partial_M g_{QN} - \partial_Q g_{MN}), \\ R^P_{QMN} &= \partial_M \Gamma^P_{QN} - \partial_N \Gamma^P_{QM} + \Gamma^P_{SM} \Gamma^S_{QN} - \Gamma^P_{SN} \Gamma^S_{QM}, \\ R_{MN} &= R^P_{MPN}, \\ \mathcal{R} &= g^{MN} R_{MN}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

また、 ψ と $\bar{\psi}$ に作用する共変微分は、

$$D_M \psi = \left(\tilde{\partial}_M - \frac{1}{4} \omega_M^{bc} \Gamma_{bc} \right) \psi, \quad \bar{\psi} \overleftarrow{D}_M = \tilde{\partial}_M^* \bar{\psi} + \bar{\psi} \left(\frac{1}{4} \omega_M^{bc} \Gamma_{bc} \right), \quad (5.18)$$

と与えられる。 $*$ は複素共役を表している。ここで、

$$\omega_M^{bc} = -g^{NS} e_S^b (\partial_M e_N^c - \Gamma^P_{MN} e_P^c), \quad \Gamma_{bc} = \frac{1}{2} [\Gamma_b, \Gamma_c], \quad (5.19)$$

である。最後に、 $\hat{\mathcal{L}}_{\text{GF}}$ は重力場にゲージ固定項である。なお、 A_M はここでの目的には関係しないため、 $\hat{\mathcal{L}}_{\text{eff}}$ や D_M 、 \overleftarrow{D}_M からは除いてある。

重力の摂動効果を計算するので、重力場をミンコフスキー背景時空と量子揺らぎに $g_{MN} = \eta_{MN} + \kappa h_{MN}$ というように分離する。以下では、これにしたがってそれぞれの量を $\mathcal{O}(\hbar^2)$ まで展

開する [36]. この展開をした後は、もはや大文字と小文字の添字の違いは存在しないので、大文字に統一することにする. g^{MN} と \sqrt{g} は,

$$g^{MN} = \eta^{MN} - \kappa h^{MN} + \kappa^2 h^{MP} h^N_P, \quad \sqrt{g} = 1 + \frac{1}{2} \kappa h - \frac{1}{4} \kappa^2 h_{MN} h^{MN} + \frac{1}{8} \kappa^2 h^2, \quad (5.20)$$

と展開される. e_M^a と e^M_a は,

$$e_M^a = \delta_M^a + \frac{1}{2} \kappa h^a_M - \frac{1}{8} \kappa^2 h_{MP} h^{aP}, \quad e^M_a = \delta_a^M - \frac{1}{2} \kappa h^M_a + \frac{3}{8} \kappa^2 h_{aP} h^{MP} \quad (5.21)$$

と展開される. これらの展開は, $\mathcal{O}(h^2)$ のオーダーで (5.13) を満たすことが確かめられる. Γ^P_{MN} は,

$$\begin{aligned} \Gamma^P_{MN} &= \frac{1}{2} \kappa \eta^{PQ} (\partial_N h_{QM} + \partial_M h_{QN} - \partial_Q h_{MN}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \kappa^2 h^{PQ} (\partial_N h_{QM} + \partial_M h_{QN} - \partial_Q h_{MN}) \end{aligned} \quad (5.22)$$

と展開されるので, これと (5.20) より, (5.16) の第 1 項は,

$$\begin{aligned} \sqrt{g} \left(-\frac{1}{\kappa^2} \mathcal{R} \right) &= -\frac{1}{2} h_{MN} \left\{ \frac{1}{4} \left(\eta^{MP} \eta^{NQ} + \eta^{MQ} \eta^{NP} - \eta^{MN} \eta^{PQ} \right) \right\} \hat{\square} h_{PQ} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\partial^N h_{MN} - \frac{1}{2} \partial_M h \right) \left(\partial_P h^{MP} - \frac{1}{2} \partial^M h \right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

となる. このとき, $\hat{\mathcal{L}}_{\text{GF}}$ は,

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{GF}} = \frac{1}{2} \left(\partial^N h_{MN} - \frac{1}{2} \partial_M h \right) \left(\partial_P h^{MP} - \frac{1}{2} \partial^M h \right), \quad (5.24)$$

とする. このゲージ固定に伴うゴーストはもちろん存在するが, フェルミオンと結合していないため 2 ループレベルではヒッグスポテンシャルに寄与しない. よって, ここではこのゴーストは無視する. ω_M^{bc} は (5.21) より,

$$\begin{aligned} \omega_M^{bc} &= \frac{1}{2} \kappa (\partial^b h^c_M - \partial^c h^b_M) + \kappa^2 \left\{ -\frac{1}{8} (\partial_M h^b_N h^{cN} - \partial_M h^c_N h^{bN}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (\partial^b h_{MN} h^{cN} - \partial^c h_{MN} h^{bN}) + \frac{1}{4} (\partial_N h^b_M h^{cN} - \partial_N h^c_M h^{bN}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

ここで, (5.16) の第 2 項と第 3 項は,

$$\begin{aligned} &\sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \bar{\psi} i e^M_a \Gamma^a D_M \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} \overleftarrow{D}_M i e^M_a \Gamma^a \psi \right) \\ &= \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \bar{\psi} i e^M_a \Gamma^a \tilde{\partial}_M \psi - \frac{1}{2} \tilde{\partial}_M^* \bar{\psi} i e^M_a \Gamma^a \psi - \frac{1}{8} \bar{\psi} i e^M_a \omega_M^{bc} \{ \Gamma^a, \Gamma_{bc} \} \psi \right), \end{aligned} \quad (5.26)$$

と書き換えられるので, この第 1 項と第 2 項に (5.20) と (5.21) を代入すると,

$$\sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \bar{\psi} i e^M_a \Gamma^a \tilde{\partial}_M \psi \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}_M \psi \\
&\quad - \frac{1}{4} \kappa h_{MN} \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi + \frac{1}{4} \kappa \eta_{MN} h \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi \\
&\quad + \frac{3}{16} \kappa^2 h_{MP} h_N^P \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi - \frac{1}{8} \kappa^2 h_{MN} h \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi \\
&\quad - \frac{1}{8} \kappa^2 \eta_{MN} h_{PQ} h^{PQ} \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi + \frac{1}{16} \kappa^2 \eta_{MN} h^2 \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi, \tag{5.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{g} \left(-\frac{1}{2} \tilde{\partial}_M^* \bar{\psi} i e^M{}_a \Gamma^a \psi \right) \\
&= -\frac{1}{2} \tilde{\partial}_M^* \bar{\psi} i \Gamma^M \psi \\
&\quad + \frac{1}{4} \kappa h_{MN} \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi - \frac{1}{4} \kappa \eta_{MN} h \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi, \\
&\quad - \frac{3}{16} \kappa^2 h_{MP} h_N^P \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi + \frac{1}{8} \kappa^2 h_{MN} h \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi \\
&\quad + \frac{1}{8} \kappa^2 \eta_{MN} h_{PQ} h^{PQ} \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi - \frac{1}{16} \kappa^2 \eta_{MN} h^2 \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi, \tag{5.28}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int d^5x (-\tilde{\partial}_M^* \bar{\psi} i \Gamma^M \psi) = \int d^5x (\bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}_M \psi)$ である。(5.26) の第3項については、(5.20), (5.21) と (5.25) より、

$$\begin{aligned}
&\sqrt{g} \left(-\frac{1}{8} \bar{\psi} i e^M{}_a \omega_M^{bc} \{ \Gamma^a, \Gamma_{bc} \} \psi \right) \\
&= -\frac{1}{8} \bar{\psi} i \left\{ \frac{1}{2} \kappa (\partial_b h_{ca} - \partial_c h_{ba}) - \frac{1}{8} \kappa^2 (\partial_a h_{bM} h_c^M - \partial_a h_{cM} h_b^M) \right. \\
&\quad - \frac{1}{4} \kappa^2 (\partial_b h_{aM} h_c^M - \partial_c h_{aM} h_b^M) + \frac{1}{4} \kappa^2 (\partial_M h_{ba} h_c^M - \partial_M h_{ca} h_b^M) \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \kappa^2 (\partial_b h_{cM} - \partial_c h_{bM}) h_a^M + \frac{1}{4} \kappa^2 (\partial_b h_{ca} - \partial_c h_{ba}) h \right\} \{ \Gamma^a, \Gamma^{bc} \} \psi \\
&= -\frac{1}{8} \bar{\psi} i \left\{ -\frac{1}{8} \kappa^2 (\partial_a h_{bM} h_c^M - \partial_a h_{cM} h_b^M) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \kappa^2 (\partial_b h_{aM} h_c^M + \partial_b h_{cM} h_a^M) + \frac{1}{4} \kappa^2 (\partial_c h_{aM} h_b^M + \partial_c h_{bM} h_a^M) \right\} \{ \Gamma^a, \Gamma^{bc} \} \psi \\
&= \frac{1}{32} \kappa^2 \partial_M h_{PS} h_Q^S \bar{\psi} i \{ \Gamma^M, \Gamma^{PQ} \} \psi, \tag{5.29}
\end{aligned}$$

となる。途中、 $\{ \Gamma^a, \Gamma^{bc} \}$ が完全反対称であることから、中括弧内において小文字の添字について対称な項は消すことが出来る。以上の結果をまとめると、

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} h_{MN} \left\{ \frac{1}{4} \left(\eta^{MP} \eta^{NQ} + \eta^{MQ} \eta^{NP} - \eta^{MN} \eta^{PQ} \right) \right\} \hat{\square} h_{PQ} + \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}_M \psi + \hat{\mathcal{L}}_{\psi}^{(1)} + \hat{\mathcal{L}}_{\psi}^{(2)}. \tag{5.30}$$

ここで、 $\hat{\mathcal{L}}_{\psi}^{(1)}$ と $\hat{\mathcal{L}}_{\psi}^{(2)}$ は、それぞれ $\mathcal{O}(h)$ と $\mathcal{O}(h^2)$ の項をまとめたものであり、

$$\hat{\mathcal{L}}_{\psi}^{(1)} = -\frac{1}{4} \kappa h_{MN} \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi + \frac{1}{4} \kappa h_{MN} \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi$$



図 5.2 重力子とディラックフェルミオンを含む 1-PI の真空泡の図

$$+ \frac{1}{4} \kappa \eta_{MN} h \bar{\psi} i \Gamma^M \partial^N \psi - \frac{1}{4} \kappa \eta_{MN} h \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi, \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_\psi^{(2)} = & \frac{3}{16} \kappa^2 h_{MP} h_N^P \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi - \frac{3}{16} \kappa^2 h_{MP} h_N^P \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi \\ & - \frac{1}{8} \kappa^2 h_{MN} h \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi + \frac{1}{8} \kappa^2 h_{MN} h \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi \\ & - \frac{1}{8} \kappa^2 \eta_{MN} h_{PQ} h^{PQ} \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi + \frac{1}{8} \kappa^2 \eta_{MN} h_{PQ} h^{PQ} \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi \\ & + \frac{1}{16} \kappa^2 \eta_{MN} h^2 \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi - \frac{1}{16} \kappa^2 \eta_{MN} h^2 \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi \\ & + \frac{1}{32} \kappa^2 \partial_M h_P S h_Q^S \bar{\psi} i \{ \Gamma^M, \Gamma^{PQ} \} \psi, \end{aligned} \quad (5.32)$$

である。以上で得た (5.30) に基づいて、重力子を含むような 2 ループ補正を計算する。 $U(1)$ ゲージ理論のみの場合と違い、ここでは 3 点と 4 点の相互作用が存在するので、計算すべき図は図 5.2 のように 2 種類考えられる。2 重波線と実線は、それぞれ重力子とディラックフェルミオンを示している。但し、ここでそれぞれの図に対応する寄与を求める際は、ファインマン則を使うのではなく (5.30) から直接計算する。

このとき興味深いことに、左の図は $U(1)$ チャージを持つ粒子を含んでいるにもかかわらず、有効ポテンシャルに寄与しないということが、以下のように簡単に確かめられる。左の図に対応する計算は $\hat{\mathcal{L}}_\psi^{(2)}$ から、

$$\begin{aligned} & i \kappa^2 \int \frac{d^5 k_E}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 p_E}{(2\pi)^5} \left(c_1 \frac{\hat{p}_E^2}{\hat{k}_E^2 \hat{p}_E^2} + c_2 \frac{\hat{k}_E \hat{p}_E}{\hat{k}_E^2 \hat{p}_E^2} \right) \\ & = \frac{i \kappa^2}{(2\pi R)^2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \left(c_1 \frac{1}{k_E^2 + (\frac{\ell}{R})^2} + c_2 \frac{k_E p_E + \frac{\ell}{R} (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})}{\{k_E^2 + (\frac{\ell}{R})^2\} \{p_E^2 + (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2\}} \right), \end{aligned} \quad (5.33)$$

と与えられる。 c_1, c_2 は定数である。(5.32) の最後の項が c_2 に比例する項を与え、それ以外の項が c_1 に比例する項を与える。ここで、 c_1 に比例する項に注目すると、これは θ を含んでいないため有効ポテンシャルには寄与しない。一方、 c_2 に比例する項を見てみると、これは k_E, p_E 、そして、 ℓ の奇関数になっているため結局ゼロになる。

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2!} i \int d^5 x_1 \left(\frac{1}{4} \kappa \eta_{MN} h \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi \right) i \int d^5 x_2 \left(\frac{1}{4} \kappa h_{M'N'} \tilde{\partial}^{*N'} \bar{\psi} i \Gamma^{M'} \psi \right) \\
& + \frac{1}{2!} i \int d^5 x_1 \left(\frac{1}{4} \kappa \eta_{MN} h \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi \right) i \int d^5 x_2 \left(\frac{1}{4} \kappa \eta_{M'N'} h \bar{\psi} i \Gamma^{M'} \tilde{\partial}^{N'} \psi \right) \\
& + \frac{1}{2!} i \int d^5 x_1 \left(\frac{1}{4} \kappa \eta_{MN} h \bar{\psi} i \Gamma^M \tilde{\partial}^N \psi \right) i \int d^5 x_2 \left(-\frac{1}{4} \kappa \eta_{M'N'} h \tilde{\partial}^{*N'} \bar{\psi} i \Gamma^{M'} \psi \right) \\
& + \frac{1}{2!} i \int d^5 x_1 \left(-\frac{1}{4} \kappa \eta_{MN} h \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi \right) i \int d^5 x_2 \left(-\frac{1}{4} \kappa h_{M'N'} \bar{\psi} i \Gamma^{M'} \tilde{\partial}^{N'} \psi \right) \\
& + \frac{1}{2!} i \int d^5 x_1 \left(-\frac{1}{4} \kappa \eta_{MN} h \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi \right) i \int d^5 x_2 \left(\frac{1}{4} \kappa h_{M'N'} \tilde{\partial}^{*N'} \bar{\psi} i \Gamma^{M'} \psi \right) \\
& + \frac{1}{2!} i \int d^5 x_1 \left(-\frac{1}{4} \kappa \eta_{MN} h \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi \right) i \int d^5 x_2 \left(\frac{1}{4} \kappa \eta_{M'N'} h \bar{\psi} i \Gamma^{M'} \tilde{\partial}^{N'} \psi \right) \\
& + \frac{1}{2!} i \int d^5 x_1 \left(-\frac{1}{4} \kappa \eta_{MN} h \tilde{\partial}^{*N} \bar{\psi} i \Gamma^M \psi \right) i \int d^5 x_2 \left(-\frac{1}{4} \kappa \eta_{M'N'} h \tilde{\partial}^{*N'} \bar{\psi} i \Gamma^{M'} \psi \right) \\
& = \frac{(i\kappa)^2}{2} \int d^5 x_1 \int d^5 x_2 \\
& \times \left[-\frac{1}{16} D_{MNM'N'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S^N(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S^{N'}(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \right. \\
& \quad - \frac{1}{16} D_{MNM'N'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S^{NN'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad + \frac{1}{16} \eta_{M'N'} \eta^{P'Q'} D_{MNP'Q'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S^N(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S^{N'}(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad + \frac{1}{16} \eta_{M'N'} \eta^{P'Q'} D_{MNP'Q'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S^{NN'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad - \frac{1}{16} D_{MNM'N'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S^{N'N}(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad - \frac{1}{16} D_{MNM'N'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S^{N'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S^N(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad + \frac{1}{16} \eta_{M'N'} \eta^{P'Q'} D_{MNP'Q'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S^{N'N}(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad + \frac{1}{16} \eta_{M'N'} \eta^{P'Q'} D_{MNP'Q'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S^{N'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S^N(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad + \frac{1}{16} \eta_{MN} \eta^{PQ} D_{PQM'N'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S^N(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S^{N'}(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad + \frac{1}{16} \eta_{MN} \eta^{PQ} D_{PQM'N'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S^{NN'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad - \frac{1}{16} \eta_{MN} \eta_{M'N'} \eta^{PQ} \eta^{P'Q'} D_{PQP'Q'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S^N(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S^{N'}(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad - \frac{1}{16} \eta_{MN} \eta_{M'N'} \eta^{PQ} \eta^{P'Q'} D_{PQP'Q'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S^{NN'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad + \frac{1}{16} \eta_{MN} \eta^{PQ} D_{PQM'N'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S^{N'N}(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad + \frac{1}{16} \eta_{MN} \eta^{PQ} D_{PQM'N'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S^{N'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S^N(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \} \\
& \quad - \frac{1}{16} \eta_{MN} \eta_{M'N'} \eta^{PQ} \eta^{P'Q'} D_{PQP'Q'}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \text{tr} \{ \Gamma^M S(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \Gamma^{M'} S^{N'N}(\hat{x}_2, \hat{x}_1) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{16}\eta_{MN}\eta_{M'N'}\eta^{PQ}\eta^{P'Q'}D_{PQP'Q'}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\text{tr}\{\Gamma^M S^{N'}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\Gamma^{M'} S^N(\hat{x}_2,\hat{x}_1)\} \\
& = \frac{(i\kappa)^2}{2!}\int d^5x_1\int d^5x_2 \\
& \quad \times \frac{1}{16}\{-D_{MNM'N'}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) + \eta_{M'N'}\eta^{P'Q'}D_{MNP'Q'}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) \\
& \quad + \eta_{MN}\eta^{PQ}D_{PQM'N'}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) - \eta_{MN}\eta_{M'N'}\eta^{PQ}\eta^{P'Q'}D_{PQP'Q'}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\} \\
& \quad \times \text{tr}\{\Gamma^M S^N(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\Gamma^{M'} S^{N'}(\hat{x}_2,\hat{x}_1) + \Gamma^M S^{N'}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\Gamma^{M'} S^N(\hat{x}_2,\hat{x}_1) \\
& \quad + \Gamma^M S^{NN'}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\Gamma^{M'} S(\hat{x}_2,\hat{x}_1) + \Gamma^M S(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\Gamma^{M'} S^{N'N}(\hat{x}_2,\hat{x}_1)\}. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

今, h_{MN} の伝播関数や ψ の伝播関数に関する関数は, 以下のように与えられる:

$$\begin{aligned}
D_{MNPQ}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) & = \int \frac{d^5k}{(2\pi)^5} e^{-i\hat{k}(\hat{x}_1-\hat{x}_2)} \tilde{D}_{MNPQ}(\hat{k}), \\
S^M(\hat{x}_1,\hat{x}_2) & = \int \frac{d^5p}{(2\pi)^5} e^{-i\hat{p}(\hat{x}_1-\hat{x}_2)} \tilde{S}^M(\hat{p}), \\
S^{MN}(\hat{x}_1,\hat{x}_2) & = \int \frac{d^5p}{(2\pi)^5} e^{-i\hat{p}(\hat{x}_1-\hat{x}_2)} \tilde{S}^{MN}(\hat{p}). \tag{5.35}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{MNPQ}(\hat{k}) & \equiv \frac{i\mathcal{D}_{MNPQ}}{\hat{k}^2 + i\epsilon}, \quad \tilde{S}^M(\hat{p}) \equiv \frac{i\tilde{p}^M}{\hat{p} + i\epsilon}, \quad \tilde{S}^{MN}(\hat{p}) \equiv \frac{i\tilde{p}^M\tilde{p}^N}{\hat{p} + i\epsilon}, \\
\mathcal{D}_{MNPQ} & = \eta_{MP}\eta_{NQ} + \eta_{MQ}\eta_{NP} - \frac{2}{3}\eta_{MN}\eta_{PQ}, \tag{5.36}
\end{aligned}$$

である. これより, (5.34) は,

$$\begin{aligned}
& -i\hat{V}_{\text{Fig. 5.2}}^{2\text{-loop}} \\
& = \frac{(i\kappa)^2}{2!}\int \frac{d^5k}{(2\pi)^5}\int \frac{d^5p}{(2\pi)^5}\int \frac{d^5q}{(2\pi)^5}(2\pi)^5\delta^{(5)}(\hat{k} + \hat{p} - \hat{q}) \\
& \quad \times \frac{1}{16}\{-\tilde{D}_{MNM'N'}(\hat{k}) + \eta_{M'N'}\eta^{P'Q'}\tilde{D}_{MNP'Q'}(\hat{k}) \\
& \quad + \eta_{MN}\eta^{PQ}\tilde{D}_{PQM'N'}(\hat{k}) - \eta_{MN}\eta_{M'N'}\eta^{PQ}\eta^{P'Q'}\tilde{D}_{PQP'Q'}(\hat{k})\} \\
& \quad \times \text{tr}\{\Gamma^M \tilde{S}^N(\hat{p})\Gamma^{M'} \tilde{S}^{N'}(\hat{q}) + \Gamma^M \tilde{S}^{N'}(\hat{p})\Gamma^{M'} \tilde{S}^N(\hat{q}) \\
& \quad + \Gamma^M \tilde{S}^{NN'}(\hat{p})\Gamma^{M'} \tilde{S}(\hat{q}) + \Gamma^M \tilde{S}(\hat{p})\Gamma^{M'} \tilde{S}^{N'N}(\hat{q})\} \\
& = \frac{(i\kappa)^2}{2!}\int \frac{d^5k}{(2\pi)^5}\int \frac{d^5p}{(2\pi)^5}\int \frac{d^5q}{(2\pi)^5}(2\pi)^5\delta^{(5)}(\hat{k} + \hat{p} - \hat{q}) \\
& \quad \times \frac{1}{16}\{-\mathcal{D}_{MNM'N'} + \eta_{M'N'}\eta^{P'Q'}\mathcal{D}_{MNP'Q'} \\
& \quad + \eta_{MN}\eta^{PQ}\mathcal{D}_{PQM'N'} - \eta_{MN}\eta_{M'N'}\eta^{PQ}\eta^{P'Q'}\mathcal{D}_{PQP'Q'}\}\text{tr}\{\Gamma^M\Gamma^S\Gamma^{M'}\Gamma^{S'}\} \\
& \quad \times \frac{i}{\hat{k}^2 + i\epsilon}\left(\frac{i\tilde{p}^N\tilde{p}_S}{\hat{p}^2 + i\epsilon}\frac{i\tilde{q}^{N'}\tilde{q}_{S'}}{\hat{q}^2 + i\epsilon} + \frac{i\tilde{p}^{N'}\tilde{p}_S}{\hat{p}^2 + i\epsilon}\frac{i\tilde{q}^N\tilde{q}_{S'}}{\hat{q}^2 + i\epsilon} + \frac{i\tilde{p}^N\tilde{p}^{N'}\tilde{p}_S}{\hat{p}^2 + i\epsilon}\frac{i\tilde{q}_{S'}}{\hat{q}^2 + i\epsilon} + \frac{i\tilde{p}_S}{\hat{p}^2 + i\epsilon}\frac{i\tilde{q}^{N'}\tilde{q}^N\tilde{q}_{S'}}{\hat{q}^2 + i\epsilon}\right) \\
& = i\kappa^2\int \frac{d^5p_E}{(2\pi)^5}\int \frac{d^5q_E}{(2\pi)^5}\left\{\frac{11}{12}\frac{1}{(\hat{p}_E - \hat{q}_E)^2} + \frac{5}{3}\frac{\hat{p}_E\hat{q}_E}{(\hat{p}_E - \hat{q}_E)^2\hat{p}_E^2} + \frac{3}{4}\frac{(\hat{p}_E\hat{q}_E)^2}{(\hat{p}_E - \hat{q}_E)^2\hat{p}_E^2\hat{q}_E^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i\kappa^2 \int \frac{d^5 k_E}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 p_E}{(2\pi)^5} \left(\frac{10}{3} \frac{1}{\hat{k}_E^2} + \frac{29}{12} \frac{\hat{k}_E \hat{p}_E}{\hat{k}_E^2 \hat{p}_E^2} \right) - \frac{3}{8} i\kappa^2 \int \frac{d^5 p_E}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 q_E}{(2\pi)^5} \frac{\hat{p}_E \hat{q}_E}{\hat{p}_E^2 \hat{q}_E^2} \\
&= \frac{i\kappa^2}{(2\pi R)^2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \left(\frac{10}{3} \frac{1}{\{k_E^2 + (\frac{\ell}{R})^2\}} + \frac{29}{12} \frac{k_E p_E + \frac{\ell}{R} (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})}{\{k_E^2 + (\frac{\ell}{R})^2\} \{p_E^2 + (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2\}} \right) \\
&\quad - \frac{3}{8} \frac{i\kappa^2}{(2\pi R)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E q_E + (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})(\frac{n}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})}{\{p_E^2 + (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2\} \{q_E^2 + (\frac{n}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2\}}, \tag{5.37}
\end{aligned}$$

となる．最後から2番目の等号では， $\hat{q}_E = \hat{k}_E + \hat{p}_E$ ($\Leftrightarrow \hat{q}_E = \hat{k}_E + \hat{p}_E$) という変数変換をし，また，以下の恒等式を用いた：

$$\int \frac{d^5 p_E}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 q_E}{(2\pi)^5} \frac{(\hat{p}_E \hat{q}_E)^2}{(\hat{p}_E - \hat{q}_E)^2 \hat{p}_E^2 \hat{q}_E^2} = \int \frac{d^5 p_E}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 q_E}{(2\pi)^5} \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\hat{p}_E \hat{q}_E}{(\hat{p}_E - \hat{q}_E)^2 \hat{p}_E^2} - \frac{\hat{p}_E \hat{q}_E}{\hat{p}_E^2 \hat{q}_E^2} \right\}. \tag{5.38}$$

(5.37)においても， θ を含まない項は落とされ， k_E ， p_E ， q_E ，そして， ℓ の奇関数の項はゼロになることに注意すると，結局最後の項のみが残ることになる．よって，その項に対して (D.19) を用いると，4次元時空上における重力子の寄与を含むような2ループ補正は，

$$V_{\text{Fig. 5.2}}^{2\text{-loop}}(\theta) = \frac{3}{8} \frac{3^2 \kappa_4^2}{16\pi^4 (2\pi R)^6} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\theta)}{m^4} \frac{\sin(n\theta)}{n^4}, \tag{5.39}$$

と求まる．ここで， $V_{\text{Fig. 5.2}}^{2\text{-loop}} = 2\pi R \hat{V}_{\text{Fig. 5.2}}^{2\text{-loop}}$ であり，また， $\kappa_4 (= \kappa/\sqrt{2\pi R})$ は4次元時空上における重力結合定数である．以上より，重力子の寄与を考慮しても，ヒッグスポテンシャルは2ループレベルで有限であることが確かめられた．

ここで得られた関数は， $\theta = 0, \pi$ において極小値を取る．しかしながら真空は $\theta = \pi$ のままである．なぜならば， $V_{\text{Fig. 5.2}}^{2\text{-loop}}$ は重力結合定数の影響により $V^{1\text{-loop}}$ や $V_{\text{Fig. 5.1}}^{2\text{-loop}}$ に比べて圧倒的に小さいからである．それ故，(5.39) は現象論的な寄与は無い．

第 6 章

結論

本研究では、 $M^4 \times S^1$ 上で量子重力に結合するような $U(1)$ ゲージ・ヒッグス統一理論において、ヒッグスポテンシャルの 2 ループレベルでの有限性を調べた。このポテンシャルは高次元時空中のゲージ対称性によって有限であることが期待されるが、それを厳密に保証するものは存在しない。したがって、摂動的にそれを確かめることが重要になる。重力子を含まないような $U(1)$, $SU(n)$ ゲージ理論においては、2 ループレベルでその有限性が確かめられていたが [33, 34, 37, 38], 重力子の寄与の評価を行なったのは本研究が初めてである。

古典レベルにおいて、重力子とフェルミオン間の相互作用は 3 点と 4 点の 2 種類の結合が存在するため、重力子の寄与を含むような 2 ループ補正を表す図も 2 種類存在する。しかしながら、このうち 4 点相互作用による図は、実際には寄与しないことがわかった。一方、もう 1 つの図はヒッグスポテンシャルに寄与し、かつ、それは期待通りに有限であることが確かめられた。

この重力子による有限な寄与を表す関数は、 $\theta = 0, \pi$ で極小値を取るようなものであった。但し、重力結合定数が非常に小さな値であるために、1 ループ有効ポテンシャルによって与えられた真空に影響を与えることはない。それにもかからわず、今回得られた結果は重要な意味を持つ。なぜならば、もしヒッグスポテンシャルの有限性が重力子の影響によって壊されてしまうようなことがあれば、ゲージ・ヒッグス統一理論は、量子重力と無矛盾な新しい物理の候補にはなり得ないということになってしまうからである。これは言い換えると、ゲージ・ヒッグス統一理論は量子重力を含むような場合でも、相変わらず強力なコンセプトのままであるということである。

また、このような理論に基づいた extanatural インフレーション模型は実際に存在し、よく調べられている [39, 40]。その模型ではヒッグス場と高次元重力場の余剰次元成分由来のスカラー場であるラディオンの 1 ループ有効ポテンシャルを解析している。ここで、インフラトンの役割を果たすのはヒッグス場であり、ラディオンは余剰次元の安定性に関係している。よって、重力子はラディオンのポテンシャルにのみ寄与しており、インフラトンポテンシャルには寄与していない。しかし、2 ループ補正まで考慮すると、当然今回計算したような重力子によるインフラトンポテンシャルへの寄与が存在する。もしも、それが発散してしまっていたら、この模型の利点や予言能力などが失われてしまうことになるため、このような模型の存在価値をより強固にするという意味でも本研究の意義は大きいと言える。

今回の研究では、簡単のために余剰空間として S^1 を想定した。但し、標準模型に含まれるようなカイラルフェルミオンが 4 次元に現れるような模型を作るためには、オービフォールド S^1/Z_2 が必要であるということは既に述べた。また、標準模型の性質を正確に導けるような、より現実的な模型構築のためには、背景時空としてランドール-サンドラム計量が適当であるということも現在ではよく知られている [41–43]。したがって、このような設定においても重力子の寄与が今回の場合と同様に有限なままであるかを確かめることは重要であり、今後の課題となる。

謝辞

指導教官である川村先生には、高次元理論の基礎から、論文の書き方まで事細かにご指導頂きました。また、自分の計算が上手くいかないとき、先生との議論で何度もその状況を打開することが出来ました。本当にありがとうございました。

奥山先生には、どんな素朴な質問であってもいつでも丁寧にお答え頂きました。また、論文執筆の際の注意すべき点などに関して多くの助言を頂きました。本当にありがとうございました。

小竹先生には、群論などに関する質問にいつでも快くお答え頂きました。また、過ごし易い研究室になるような環境づくりをして頂きました。本当にありがとうございました。

都城高専の阿部さんには物理に関する多くの議論して頂きました。また、上手くいかない研究生生活の中で不安を抱えた際など、何度も相談に乗って頂きました。本当にありがとうございました。

付録 A

\mathbb{Z}_2 対称性の証明

$M^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ 上では、2種類の境界条件とそれらが同時に存在するエキゾチックなゲージ対称性と呼ばれるものがあった。ここでは、例として考えたラグランジアン密度が、これらの境界条件の下で不変であることを実際に確かめる。なお、並進対称性については明らかなので、 \mathbb{Z}_2 対称性のみを考える。

A.1 内部自己同型な境界条件

内部自己同型な \mathbb{Z}_2 変換の下で、(3.40) が不変であることを示す。

はじめに A_M に関する項に注目する。境界条件 (3.46) と (3.47) より、

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} \\
&= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu 5}F^{\mu 5} + F_{5\nu}F^{5\nu} + F_{55}F^{55}) \\
&= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu 5}F^{\mu 5} + F_{5\nu}F^{5\nu}) \\
&= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2F_{\mu 5}F^{\mu 5}) \\
&= -\frac{1}{4}\{(\partial_\mu A_\nu(x, y) - \partial_\nu A_\mu(x, y))(\partial^\mu A^\nu(x, y) - \partial^\nu A^\mu(x, y)) \\
&\quad + 2(\partial_\mu A_5(x, y) - \partial_5 A_\mu(x, y))(\partial^\mu A^5(x, y) - \partial^5 A^\mu(x, y))\} \\
&\xrightarrow{\mathbb{Z}_2} -\frac{1}{4}\{(\partial_\mu A_\nu(x, -y) - \partial_\nu A_\mu(x, -y))(\partial^\mu A^\nu(x, -y) - \partial^\nu A^\mu(x, -y)) \\
&\quad + 2(\partial_\mu A_5(x, -y) + \partial_5 A_\mu(x, -y))(\partial^\mu A^5(x, -y) + \partial^5 A^\mu(x, -y))\} \\
&= -\frac{1}{4}\left[(\partial_\mu A_\nu(x, y) - \partial_\nu A_\mu(x, y))(\partial^\mu A^\nu(x, y) - \partial^\nu A^\mu(x, y)) \right. \\
&\quad \left. + 2\{\partial_\mu(-A_5(x, y)) + \partial_5 A_\mu(x, y)\}\{\partial^\mu(-A^5(x, y)) + \partial^5 A^\mu(x, y)\}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\{(\partial_\mu A_\nu(x, y) - \partial_\nu A_\mu(x, y))(\partial^\mu A^\nu(x, y) - \partial^\nu A^\mu(x, y)) \\
&\quad + 2(\partial_\mu A_5(x, y) - \partial_5 A_\mu(x, y))(\partial^\mu A^5(x, y) - \partial^5 A^\mu(x, y))\}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}. \quad (\text{A.1})$$

次に, ϕ に関する項に注目する. 境界条件 (3.44), (3.46) と (3.47) より,

$$\begin{aligned}
& (D_M\phi)^*(D^M\phi) \\
&= \{(\partial_M + igq_\phi A_M(x, y))\phi(x, y)\}^* \{(\partial^M + igq_\phi A^M(x, y))\phi(x, y)\} \\
&= (\partial_M - igq_\phi A_M(x, y))\phi^*(x, y)(\partial^M + igq_\phi A^M(x, y))\phi(x, y) \\
&= (\partial_\mu - igq_\phi A_\mu(x, y))\phi^*(x, y)(\partial^\mu + igq_\phi A^\mu(x, y))\phi(x, y) \\
&\quad + (\partial_5 - igq_\phi A_5(x, y))\phi^*(x, y)(\partial^5 + igq_\phi A^5(x, y))\phi(x, y) \\
&\xrightarrow{\mathbb{Z}_2} (\partial_\mu - igq_\phi A_\mu(x, -y))\phi^*(x, -y)(\partial^\mu + igq_\phi A^\mu(x, -y))\phi(x, -y) \\
&\quad + (-\partial_5 - igq_\phi A_5(x, -y))\phi^*(x, -y)(-\partial^5 + igq_\phi A^5(x, -y))\phi(x, -y) \\
&= (\partial_\mu - igq_\phi A_\mu(x, y))\eta_\phi\phi^*(x, y)(\partial^\mu + igq_\phi A^\mu(x, y))\eta_\phi\phi(x, y) \\
&\quad + \{-\partial_5 - igq_\phi(-A_5(x, y))\}\eta_\phi\phi^*(x, y)\{-\partial^5 + igq_\phi(-A^5(x, y))\}\eta_\phi\phi(x, y) \\
&= (\partial_\mu - igq_\phi A_\mu(x, y))\phi^*(x, y)(\partial^\mu + igq_\phi A^\mu(x, y))\phi(x, y) \\
&\quad + (\partial_5 - igq_\phi A_5(x, y))\phi^*(x, y)(\partial^5 + igq_\phi A^5(x, y))\phi(x, y) \\
&= (D_M\phi)^*(D^M\phi). \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
& m_\phi^2|\phi|^2 \\
&= m_\phi^2\phi^*(x, y)\phi(x, y) \\
&\xrightarrow{\mathbb{Z}_2} m_\phi^2\phi^*(x, -y)\phi(x, -y) \\
&= m_\phi^2\eta_\phi\phi^*(x, y)\eta_\phi\phi(x, y) \\
&= m_\phi^2|\phi|^2. \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

最後に, ψ に関する項に注目する. 境界条件 (3.45), (3.46) と (3.47) より,

$$\begin{aligned}
& \bar{\psi}i\Gamma^M D_M\psi \\
&= \bar{\psi}(x, y)i\Gamma^M(\partial_M + igq_\psi A_M(x, y))\psi(x, y) \\
&= \bar{\psi}(x, y)i\Gamma^\mu(\partial_\mu + igq_\psi A_\mu(x, y))\psi(x, y) \\
&\quad + \bar{\psi}(x, y)i\Gamma^5(\partial_5 + igq_\psi A_5(x, y))\psi(x, y) \\
&\xrightarrow{\mathbb{Z}_2} \bar{\psi}(x, -y)i\Gamma^\mu(\partial_\mu + igq_\psi A_\mu(x, -y))\psi(x, -y) \\
&\quad + \bar{\psi}(x, -y)i\Gamma^5(-\partial_5 + igq_\psi A_5(x, -y))\psi(x, -y) \\
&= -\eta_\psi i\bar{\psi}(x, y)\Gamma^5 i\Gamma^\mu(\partial_\mu + igq_\psi A_\mu(x, y))\eta_\psi i\Gamma^5\psi(x, y) \\
&\quad - \eta_\psi i\bar{\psi}(x, y)\Gamma^5 i\Gamma^5\{-\partial_5 + igq_\psi(-A_5(x, y))\}\eta_\psi i\Gamma^5\psi(x, y) \\
&= \bar{\psi}(x, y)i\Gamma^\mu(\partial_\mu + igq_\psi A_\mu(x, y))\psi(x, y) \\
&\quad + \bar{\psi}(x, y)i\Gamma^5(\partial_5 + igq_\psi A_5(x, y))\psi(x, y) \\
&= \bar{\psi}i\Gamma^M D_M\psi. \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

途中, ψ のディラック共役の \mathbb{Z}_2 変換,

$$\begin{aligned}
& \bar{\psi}(x, y) \\
& \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} \bar{\psi}(x, -y) = \psi^\dagger(x, -y)\Gamma^0 \\
& = [\psi^*(x, -y)]^T \Gamma^0 = [-\eta_\psi i\Gamma^{5*}\psi^*(x, y)]^T \Gamma^0 \\
& = [\eta_\psi i\Gamma^5\psi^*(x, y)]^T \Gamma^0 = \eta_\psi i\psi^\dagger(x, y)\Gamma^5\Gamma^0 \\
& = -\eta_\psi i\psi^\dagger(x, y)\Gamma^0\Gamma^5 = -\eta_\psi i\bar{\psi}(x, y)\Gamma^5,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

と, 5次元のガンマ行列の代数関係を用いた.

以上で, 内部自己同型な \mathbb{Z}_2 変換の下で, (3.40) が不変であることを示せた.

A.2 外部自己同型な境界条件

外部自己同型な \mathbb{Z}_2 変換の下で, (3.40) が不変であることを示す. 但し, ここでは, B_5 が偶の \mathbb{Z}_2 パリティを持つ (3.61) という要請をし, この下で理論が \mathbb{Z}_2 対称性を持つように各場の境界条件を設定していく, というやり方で進めていく.

はじめに, ϕ の運動項の第5成分に注目すると,

$$\begin{aligned}
& (D_5\phi)^*(D^5\phi) \\
& = (\partial_5 - igq_\phi A_5(x, y))\phi^*(x, y)(\partial^5 + igq_\phi A^5(x, y))\phi(x, y) \\
& \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} (-\partial_5 - igq_\phi A_5(x, -y))\phi^*(x, -y)(-\partial^5 + igq_\phi A^5(x, -y))\phi(x, -y) \\
& = (-\partial_5 - igq_\phi A_5(x, y))\phi^*(x, -y)(-\partial^5 + igq_\phi A^5(x, y))\phi(x, -y) \\
& = (\partial_5 + igq_\phi A_5(x, y))\phi^*(x, -y)(\partial^5 - igq_\phi A^5(x, y))\phi(x, -y).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

\mathbb{Z}_2 変換前後で不変になるためには, ϕ が (3.58) を満たせば良いことがわかる. ϕ の運動項の第 μ 成分についても同様に進めると,

$$\begin{aligned}
& (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) \\
& = (\partial_\mu - igq_\phi A_\mu(x, y))\phi^*(x, y)(\partial^\mu + igq_\phi A^\mu(x, y))\phi(x, y) \\
& \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} (\partial_\mu - igq_\phi A_\mu(x, -y))\phi^*(x, -y)(\partial^\mu + igq_\phi A^\mu(x, -y))\phi(x, -y) \\
& = (\partial_\mu - igq_\phi A_\mu(x, -y))\phi^*(x, y)(\partial^\mu + igq_\phi A^\mu(x, -y))\phi^*(x, y).
\end{aligned} \tag{A.7}$$

\mathbb{Z}_2 変換前後で不変になるには, A_μ が (3.60) を満たせば良い. 質量項については, (3.58) の下で不変であることが簡単に示され,

$$\begin{aligned}
& m_\phi^2|\phi|^2 \\
& = m_\phi^2\phi^*(x, y)\phi(x, y) \\
& \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} m_\phi^2\phi^*(x, -y)\phi(x, -y) \\
& = m_\phi^2\phi(x, y)\phi^*(x, y)
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$= m_\phi^2 |\phi|^2. \quad (\text{A.9})$$

次に ψ に関する項に注目する. 運動項の第 5 成分は,

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(i\Gamma^5 D_5)\psi \\ &= \bar{\psi}(x, y)i\Gamma^5 (\partial_5 + igq_\psi A_5(x, y)) \psi(x, y) \\ & \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} \bar{\psi}(x, -y)i\Gamma^5 (-\partial_5 + igq_\psi A_5(x, -y)) \psi(x, -y) \\ &= \bar{\psi}(x, -y)i\Gamma^5 (-\partial_5 + igq_\psi A_5(x, y)) \psi(x, -y). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

ここで, ψ が (3.59) のように変換されるのであれば, この項は \mathbb{Z}_2 変換の前後で不変となる. 実際,

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(x, y) \\ & \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} \bar{\psi}(x, -y) \\ &= -i\bar{\psi}^c(x, y) \\ &= -i(-i\Gamma^2\psi(x, y))^T \Gamma^0 \\ &= -\psi^T(x, y)\Gamma^2\Gamma^0, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

に注意すると, (A.10) とより,

$$\begin{aligned} & -\psi^T(x, y)\Gamma^2\Gamma^0 i\Gamma^5 (-\partial_5 + igq_\psi A_5(x, y))\Gamma^2\psi^*(x, y) \\ &= i\psi^T\Gamma^2\Gamma^0\Gamma^5\partial_5\Gamma^2\psi^* - i^2 gq_\psi\psi^T\Gamma^2\Gamma^0\Gamma^5 A_5\Gamma^2\psi^* \\ &= i\psi^T\Gamma^0\Gamma^5\Gamma^2\Gamma^2\partial_5\psi^* - i^2 gq_\psi\psi^T\Gamma^0\Gamma^5\Gamma^2\Gamma^2 A_5\psi^* \\ &= -i\psi^T\Gamma^0\Gamma^5\partial_5\psi^* + i^2 g_*q_\psi\psi^T\Gamma^0\Gamma^5 A_5\psi^* \\ &= -i\psi_a\Gamma_{ab}^0\Gamma_{bc}^5\partial_5\psi_c^* + i^2 gq_\psi\psi_a\Gamma_{ab}^0\Gamma_{bc}^5 A_5\psi_c^* \\ &= -i\psi_c^*\Gamma_{ab}^0\Gamma_{bc}^5\partial_5\psi_a - i^2 gq_\psi\psi_c^*\Gamma_{ab}^0\Gamma_{bc}^5 A_5\psi_a \\ &= i\psi_c^*\Gamma_{ab}^5\Gamma_{bc}^0\partial_5\psi_a + i^2 gq_\psi\psi_c^*\Gamma_{ab}^5\Gamma_{bc}^0 A_5\psi_a \\ &= i\psi_c^*\Gamma_{bc}^0\Gamma_{ab}^5\partial_5\psi_a + i^2 gq_\psi\psi_c^*\Gamma_{bc}^0\Gamma_{ab}^5 A_5\psi_a \\ &= i\psi_c^*\Gamma_{cb}^0\Gamma_{ba}^5\partial_5\psi_a + i^2 gq_\psi\psi_c^*\Gamma_{cb}^0\Gamma_{ba}^5 A_5\psi_a \\ &= \psi^\dagger\Gamma^0 i\Gamma^5 (\partial_5 + igq_\psi A_5) \psi \\ &= \bar{\psi}(x, y)i\Gamma^5 (\partial_5 + igq_\psi A_5(x, y))\psi(x, y) \\ &= \bar{\psi}(i\Gamma^5 D_5)\psi. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ψ に関する残りの項についても, (3.59) と (3.60) より,

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(i\Gamma^\mu D_\mu - m_\psi)\psi \\ &= \bar{\psi}(x, y)i\Gamma^\mu (\partial_\mu + igq_\psi A_\mu(x, y) - m_\psi)\psi(x, y) \\ & \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} \bar{\psi}(x, -y)i\Gamma^\mu (\partial_\mu + igq_\psi A_\mu(x, -y) - m_\psi)\psi(x, -y) \\ &= -i\bar{\psi}^c(x, y)i\Gamma^\mu (\partial_\mu + igq_\psi A_\mu(x, -y) - m_\psi)i\psi^c(x, y) \\ &= \bar{\psi}^c(x, y)i\Gamma^\mu (\partial_\mu - igq_\psi A_\mu(x, y) - m_\psi)\psi^c(x, y) \\ &= \bar{\psi}(x, y)i\Gamma^\mu (\partial_\mu + igq_\psi A_\mu(x, y) - m_\psi)\psi(x, y) \end{aligned}$$

$$= \bar{\psi}(i\Gamma^\mu D_\mu - m_\psi)\psi. \quad (\text{A.13})$$

途中、量子電磁力学における荷電共役変換の下での不変性を用いた。

最後に、 A_M の運動項が (3.60) と (3.61) の下で、不変であることを確かめると、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} \\ &= -\frac{1}{4}\{(\partial_\mu A_\nu(x, y) - \partial_\nu A_\mu(x, y))(\partial^\mu A^\nu(x, y) - \partial^\nu A^\mu(x, y)) \\ &\quad + 2(\partial_\mu A_5(x, y) - \partial_5 A_\mu(x, y))(\partial^\mu A^5(x, y) - \partial^5 A^\mu(x, y))\} \\ &\xrightarrow{\mathbb{Z}_2} -\frac{1}{4}\{(\partial_\mu A_\nu(x, -y) - \partial_\nu A_\mu(x, -y))(\partial^\mu A^\nu(x, -y) - \partial^\nu A^\mu(x, -y)) \\ &\quad + 2(\partial_\mu A_5(x, -y) + \partial_5 A_\mu(x, -y))(\partial^\mu A^5(x, -y) + \partial^5 A^\mu(x, -y))\} \\ &= -\frac{1}{4}\{[\partial_\mu(-A_\nu(x, y)) - \partial_\nu(-A_\mu(x, y))]\{\partial^\mu(-A^\nu(x, y)) - \partial^\nu(-A^\mu(x, y))\} \\ &\quad + 2(\partial_\mu A_5(x, y) + \partial_5 A_\mu(x, y))(\partial^\mu A^5(x, y) + \partial^5 A^\mu(x, y))\} \\ &= -\frac{1}{4}\{(\partial_\mu A_\nu(x, y) - \partial_\nu A_\mu(x, y))(\partial^\mu A^\nu(x, y) - \partial^\nu A^\mu(x, y)) \\ &\quad + 2(\partial_\mu A_5(x, y) - \partial_5 A_\mu(x, y))(\partial^\mu A^5(x, y) - \partial^5 A^\mu(x, y))\} \\ &= -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}. \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

以上で、外部自己同型な \mathbb{Z}_2 変換の下で、(3.40) が不変であることを示せた。

A.3 エキゾチックな $U(1)$ ゲージ理論

エキゾチックな $U(1)$ ゲージ理論 (3.68) の \mathbb{Z}_2 対称性を確かめる。ただし、物質場の質量項とゲージ場の運動項については自明なので、それ以外の項にのみ注目する。境界条件としては (3.70) を、 $U(1)$ チャージとしては (3.69) を用いると、

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1,2} (D_M \phi_a)^* (D^M \phi_a) \\ &= (\partial_M - igq_1 B_M - ig'q'_1 C_M) \phi_1^* (\partial^M + igq_1 B^M + ig'q'_1 C^M) \phi_1 \\ &\quad + (\partial_M - igq_2 B_M - ig'q'_2 C_M) \phi_2^* (\partial^M + igq_2 B^M + ig'q'_2 C^M) \phi_2 \\ &= (\partial_M - igq_1 B_M - ig'q'_1 C_M) \phi_1^* (\partial^M + igq_1 B^M + ig'q'_1 C^M) \phi_1 \\ &\quad + (\partial_M - igq_1 B_M + ig'q'_1 C_M) \phi_2^* (\partial^M + igq_1 B^M - ig'q'_1 C^M) \phi_2 \\ &= (\partial_\mu - igq_1 B_\mu - ig'q'_1 C_\mu) \phi_1^* (\partial^\mu + igq_1 B^\mu + ig'q'_1 C^\mu) \phi_1 \\ &\quad + (\partial_5 - igq_1 B_5 - ig'q'_1 C_5) \phi_1^* (\partial^5 + igq_1 B^5 + ig'q'_1 C^5) \phi_1 \\ &\quad + (\partial_\mu - igq_1 B_\mu + ig'q'_1 C_\mu) \phi_2^* (\partial^\mu + igq_1 B^\mu - ig'q'_1 C^\mu) \phi_2 \\ &\quad + (\partial_5 - igq_1 B_5 + ig'q'_1 C_5) \phi_2^* (\partial^5 + igq_1 B^5 - ig'q'_1 C^5) \phi_2 \\ &\xrightarrow{\mathbb{Z}_2} (\partial_\mu - igq_1 B_\mu + ig'q'_1 C_\mu) \phi_2^* (\partial^\mu + igq_1 B^\mu - ig'q'_1 C^\mu) \phi_2 \\ &\quad + (-\partial_5 + igq_1 B_5 - ig'q'_1 C_5) \phi_2^* (-\partial^5 - igq_1 B^5 + ig'q'_1 C^5) \phi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\partial_\mu - igq_1 B_\mu - ig'q'_1 C_\mu)\phi_1^*(\partial^\mu + igq_1 B^\mu + ig'q'_1 C^\mu)\phi_1 \\
& + (-\partial_5 + igq_1 B_5 + ig'q'_1 C_5)\phi_1^*(-\partial^5 - igq_1 B^5 - ig'q'_1 C^5)\phi_1 \\
= & (\partial_\mu - igq_1 B_\mu + ig'q'_1 C_\mu)\phi_2^*(\partial^\mu + igq_1 B^\mu - ig'q'_1 C^\mu)\phi_2 \\
& + (\partial_5 - igq_1 B_5 + ig'q'_1 C_5)\phi_2^*(\partial^5 + igq_1 B^5 - ig'q'_1 C^5)\phi_2 \\
& + (\partial_\mu - igq_1 B_\mu - ig'q'_1 C_\mu)\phi_1^*(\partial^\mu + igq_1 B^\mu + ig'q'_1 C^\mu)\phi_1 \\
& + (\partial_5 - igq_1 B_5 - ig'q'_1 C_5)\phi_1^*(\partial^5 + igq_1 B^5 + ig'q'_1 C^5)\phi_1 \\
= & \sum_{a=1,2} (D_M \phi_a)^* (D^M \phi_a). \tag{A.15}
\end{aligned}$$

以上でエキゾチックな $U(1)$ ゲージ理論 (3.68) の \mathbb{Z}_2 対称性が確かめられた。

付録 B

対角表現の存在証明

ここでは、 $M^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ 上で $SU(N)$ ゲージ理論を考えた際の境界条件に関する表現行列 (P_0, P_1, U_1) の同値類の中に、必ず対角行列のみのものが存在することを証明する。なお、 (P_0, P_1, U_1) の中で独立なのは2つだけなので、 P_0 と P_1 に注目することにする。

今、 P_0 と P_1 は、

$$P_0^\dagger = P_0^{-1} = P_0, \quad P_1^\dagger = P_1^{-1} = P_1, \quad (\text{B.1})$$

という関係を持つ。つまり、これらはユニタリかつ、エルミートである。そのような行列は一般に、以下のように対角化することが出来る：

$$P_0 = W_0 P_0^{(D)} W_0^\dagger, \quad P_1 = W_1 P_1^{(D)} W_1^\dagger. \quad (\text{B.2})$$

W_0 と W_1 はユニタリ行列であり、 $P_0^{(D)}$ と $P_1^{(D)}$ はその成分が 1 または -1 の対角行列である。ここで、 $P_0^{(D)}$ と $P_1^{(D)}$ の成分を適当に入れ替えると、それらは、

$$P_0^{(D)} = \text{diag}(\overbrace{+1, \dots, +1, +1, \dots, +1, -1, \dots, -1, -1, \dots, -1}^N), \quad (\text{B.3})$$

$$P_1^{(D)} = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, \underbrace{+1, \dots, +1}_r, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s=N-p-q-r}), \quad (\text{B.4})$$

と書くことが出来る。

今、任意の P_0 と P_1 は以下のように変換することが出来る：

$$P_0 \xrightarrow{W_0^\dagger P_0 W_0} P_0^{(D)}, \quad P_1 \xrightarrow{W_0^\dagger P_1 W_0} W P_1^{(D)} W^\dagger. \quad (\text{B.5})$$

ここで、 $W (= W_0^\dagger W_1)$ も当然ユニタリ行列である。このとき、任意の P_0 と P_1 を大局的なユニタリ変換、もしくは局所的なゲージ変換によって、同時に対角化出来るかどうかという問題は、任意のエルミートかつユニタリな行列 $P_1 = W P_1^{(D)} W^\dagger$ を大局的なユニタリ変換、もしくは局所的なゲージ変換によって、 P_0 についての幾つかの条件を満たしたまま対角化できるかという問題に言い換えることが出来る。幾つかの条件とは、ユニタリ行列 \widetilde{W} とゲージ変換 $\Omega(y)$ があるとき、

$$\Omega(-y) \widetilde{W}^\dagger P_0^{(D)} \widetilde{W} \Omega^\dagger(y) = \widetilde{P}_0^{(D)}, \quad (\text{B.6})$$

$$\Omega(2\pi R - y)\widetilde{W}^\dagger(WP_1^{(D)}W^\dagger)\widetilde{W}\Omega^\dagger(y) = \tilde{P}_1^{(D)}, \quad (\text{B.7})$$

という関係が満たされているというものである。ここで、 $(\tilde{P}_0^{(D)})^2 = I$, $(\tilde{P}_1^{(D)})^2 = I$ である。以上の問いに対する答えが肯定的であるならば、それは境界条件に関する行列の同値類に必ず対角表現が含まれていることになる。

任意のユニタリ行列 W は、

$$W = e^{i(\xi^{a++}T^{a++} + \xi^{a+-}T^{a+-})} e^{i\xi^{a--}T^{a--}} e^{i(\eta^{a++}T^{a++} + \xi^{a+-}T^{a+-})}, \quad (\text{B.8})$$

と表すことが出来る。 ξ^{a++} , ξ^{a+-} , ξ^{a--} , η^{a++} は実パラメータであり、 T^{a++} , T^{a+-} , T^{a--} , T^{a--} はその生成子である。この生成子は次の関係を満たす：

$$P_0^{(D)}T^{a++} = T^{a++}P_0^{(D)}, \quad P_1^{(D)}T^{a++} = T^{a++}P_1^{(D)}, \quad (\text{B.9})$$

$$P_0^{(D)}T^{a+-} = T^{a+-}P_0^{(D)}, \quad P_1^{(D)}T^{a+-} = -T^{a+-}P_1^{(D)}, \quad (\text{B.10})$$

$$P_0^{(D)}T^{a-+} = -T^{a-+}P_0^{(D)}, \quad P_1^{(D)}T^{a-+} = T^{a-+}P_1^{(D)}, \quad (\text{B.11})$$

$$P_0^{(D)}T^{a--} = -T^{a--}P_0^{(D)}, \quad P_1^{(D)}T^{a--} = -T^{a--}P_1^{(D)}. \quad (\text{B.12})$$

ここで、(B.8) に $P_1 = WP_1^{(D)}W^\dagger$ を挿入し、また、(B.9), (B.11), (B.12) を使うと、 P_1 は、

$$\begin{aligned} P_1 &= e^{i(\xi^{a++}T^{a++} + \xi^{a+-}T^{a+-})} e^{i\xi^{a--}T^{a--}} e^{i(\eta^{a++}T^{a++} + \xi^{a+-}T^{a+-})} \\ &\quad \times P_1^{(D)} e^{-i(\eta^{b++}T^{b++} + \xi^{b+-}T^{b+-})} e^{-i\xi^{b--}T^{b--}} e^{-i(\xi^{b++}T^{b++} + \xi^{b+-}T^{b+-})} \\ &= e^{i(\xi^{a++}T^{a++} + \xi^{a+-}T^{a+-})} e^{i\xi^{a--}T^{a--}} P_1^{(D)} e^{-i\xi^{b--}T^{b--}} e^{-i(\xi^{b++}T^{b++} + \xi^{b+-}T^{b+-})} \\ &= e^{i(\xi^{a++}T^{a++} + \xi^{a+-}T^{a+-})} e^{2i\xi^{a--}T^{a--}} P_1^{(D)} e^{-i(\xi^{b++}T^{b++} + \xi^{b+-}T^{b+-})}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

と表すことが出来る。このとき、

$$\widetilde{W} \equiv e^{i(\xi^{a++}T^{a++} + \xi^{a+-}T^{a+-})}, \quad \Omega(y) \equiv e^{-\frac{iy}{\pi R}\xi^{a--}T^{a--}}, \quad (\text{B.14})$$

と定義される \widetilde{W} と $\Omega(y)$ を使うと、(B.6) と (B.7) の左辺は、

$$\Omega(-y)\widetilde{W}^\dagger P_0^{(D)}\widetilde{W}\Omega^\dagger(y) = \Omega(-y)P_0^{(D)}\Omega^\dagger(y) = P_0^{(D)}, \quad (\text{B.15})$$

$$\Omega(2\pi R - y)\widetilde{W}^\dagger P_1^{(D)}\widetilde{W}\Omega^\dagger(y) = \Omega(2\pi R - y)e^{2i\xi^{a--}T^{a--}} P_1^{(D)}\Omega^\dagger(y) = P_1^{(D)}, \quad (\text{B.16})$$

というように対角になる。途中、以下の関係を使った：

$$P_0^{(D)}\widetilde{W} = \widetilde{W}P_0^{(D)}, \quad P_0^{(D)}\Omega^\dagger(y) = \Omega(y)P_0^{(D)}, \quad P_1^{(D)}\Omega^\dagger(y) = \Omega(y)P_1^{(D)}, \quad (\text{B.17})$$

$$\Omega(-y)\Omega(y) = I, \quad \Omega(2\pi R - y)\Omega(y) = e^{-2i\xi^{a--}T^{a--}}. \quad (\text{B.18})$$

以上で同値類の中に、対角表現が存在することを示すことが出来た。

付録 C

有効ポテンシャルの計算

ここでは、ループ展開によってスカラー場のポテンシャルに対する量子補正を計算する。まず、1ループ補正を計算し、その情報を用いて次に2ループ補正を計算する [44, 45]。このとき、得られた2ループ補正がファインマン図的には、1-PIの真空泡の図として表されることが分かる。また、最後にループ展開自体について議論をする。

今、4点相互作用があるような実スカラー場の理論を考える。このとき、作用は、

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right). \quad (\text{C.1})$$

経路積分量子化を行うために、グリーン関数の生成汎関数を、

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS[\phi] + i \int d^4x J\phi\right)}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}, \quad (\text{C.2})$$

と定義する。 J は源となる外場である。ここでは、 $Z[0] = 1$ となるように規格化をしている。 $Z[J]$ を J で n 回汎関数微分をすると、

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (\text{C.3})$$

というように n 点グリーン関数が得られる。つまり、 $Z[J]$ は汎関数テイラー展開することが出来、

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n), \quad (\text{C.4})$$

となる。

この $Z[J]$ を用いて、

$$W[J] = -i \ln Z[J], \quad (\text{C.5})$$

と定義された $W[J]$ は、連結グリーン関数の生成汎関数である。よって、 J で n 回汎関数微分をすると、

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (\text{C.6})$$

というように n 点連結グリーン関数が得られ、また、

$$iW[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n), \quad (\text{C.7})$$

と展開できる。

ここで、 $W[J]$ と J によって、新たに場の変数を、

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}, \quad (\text{C.8})$$

と定義し、これを古典場と呼ぶ。このとき、 $W[J]$ のルジャンドル変換により、

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int d^4x J\varphi, \quad (\text{C.9})$$

と与えられる $\Gamma[\varphi]$ は有効作用と呼ばれ、量子効果を取り入れた作用となっている。この $\Gamma[\varphi]$ は頂点関数の生成汎関数であるから、

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \cdots \delta \varphi(x_n)} \right|_{\varphi=0}, \quad (\text{C.10})$$

というように n 点頂点関数が得られ、よって、

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n), \quad (\text{C.11})$$

と展開される。ここで、頂点において運動量が保存することを考慮すると、 $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ のフーリエ変換は、

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + \cdots + k_n) = \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{ik_1x_1 + \cdots + ik_nx_n} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (\text{C.12})$$

よって、 $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ のフーリエ逆変換は、

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4k_n}{(2\pi)^4} e^{-ik_1x_1 - \cdots - ik_nx_n} \tilde{\Gamma}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + \cdots + k_n), \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

と表せる。これを (C.11) に代入すると、

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi] &= \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4k_n}{(2\pi)^4} e^{-ik_1x_1 - \cdots - ik_nx_n} \\ &\quad \times \tilde{\Gamma}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + \cdots + k_n) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n). \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

さらに、この式において φ を定数とすると、

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{\Gamma}^{(n)}(k_i = 0) \varphi^n \int d^4x. \quad (\text{C.15})$$

φ を定数としているので、 $k_i = 0$ 。また、途中、

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4k_n}{(2\pi)^4} e^{-ik_1x_1 - \cdots - ik_nx_n} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + \cdots + k_n) \\ &= \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4k_{n-1}}{(2\pi)^4} e^{-ik_1x_1 - \cdots - ik_{n-1}x_{n-1} + i(k_1 + \cdots + k_{n-1})x_n} \\ &= \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4k_{n-1}}{(2\pi)^4} e^{-ik_1(x_1 - x_n)} \cdots e^{-ik_{n-1}(x_{n-1} - x_n)} \\ &= \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \delta^{(4)}(x_1 - x_n) \cdots \delta^{(4)}(x_{n-1} - x_n) \\ &= \int d^4x_n = \int d^4x, \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

という計算をした。以上では、(C.11) のように $\Gamma[\varphi]$ を場の冪で展開し議論を進めたが、次に運動量の冪で展開することを考える。今、全ての外線運動量がゼロとなる点のまわりで展開し、それを位置空間で見ると、

$$\Gamma[\varphi] = \int d^4x \left\{ -V(\varphi(x)) + \frac{1}{2} Z(\varphi(x)) \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \cdots \right\}, \quad (\text{C.17})$$

と表すことが出来る。このとき、 $V(\varphi(x))$ と $Z(\varphi(x))$ は $\varphi(x)$ の関数である。運動量は位置空間では微分となるので、 \cdots には高次の微分項が含まれている。ここで、 φ を定数とすると (C.17) は、

$$\Gamma[\varphi] = -V(\varphi) \int d^4x. \quad (\text{C.18})$$

この $V(\varphi)$ を有効ポテンシャルと呼ぶ。これは明らかに、量子補正を考慮したポテンシャルである。また、(C.15) と (C.18) を比較すると、

$$V(\varphi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{\Gamma}^{(n)}(k_i = 0) \varphi^n, \quad (\text{C.19})$$

となる。この式から分かるように、有効ポテンシャルは運動量が全てゼロの場合の n 点頂点関数の生成関数と理解することも出来る。

以上では、有効ポテンシャルの定義やその性質を見てきたが、ここからは具体的にその形を求める。今、 $W[J]$ を定義した (C.5) より、

$$\begin{aligned} e^{iW[J]} &= Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS[\phi] + i \int d^4x J\phi\right) \\ &\Leftrightarrow \exp\left(i\Gamma[\varphi] + i \int d^4x J\varphi\right) = N \int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS[\phi] + i \int d^4x J\phi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow e^{i\Gamma[\varphi]} &= N \int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS[\phi] + i \int d^4x J(\phi - \varphi)\right) \\
&= N \int \mathcal{D}\phi' \exp\left(iS[\varphi + \phi'] + i \int d^4x J\phi'\right).
\end{aligned} \tag{C.20}$$

ここでは、簡略化のために、

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}, \tag{C.21}$$

とした。また、 $\phi' (= \phi - \varphi)$ は量子ゆらぎである。以降での表記は、これも簡略化のために $\phi' \rightarrow \phi$ とする。(C.9) より、

$$J = -\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi}, \tag{C.22}$$

であるから、これを (C.20) の最後の式に代入すると、

$$e^{i\Gamma[\varphi]} = N \int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS[\varphi + \phi] - i \int d^4x \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi} \phi\right). \tag{C.23}$$

このとき、この式から厳密に $\Gamma[\varphi]$ を求めることは出来ない。そこで、 $\Gamma[\varphi]$ を、

$$\begin{aligned}
\Gamma[\varphi] &= \Gamma_{\text{tree}}[\varphi] + \Gamma_{\text{loop}}^{(1)}[\varphi] + \Gamma_{\text{loop}}^{(2)}[\varphi] + \cdots \\
&= S[\varphi] + \Gamma_{\text{loop}}^{(1)}[\varphi] + \Gamma_{\text{loop}}^{(2)}[\varphi] + \cdots,
\end{aligned} \tag{C.24}$$

と展開し、 n ループまでの情報を用いて、 $n + 1$ ループ補正を計算するという摂動的な方法を採用することにする。

はじめに、1 ループ補正を計算する。そこで、(C.23) の左辺では $\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \Gamma_{\text{loop}}^{(1)}[\varphi]$ 、右辺では $\Gamma[\varphi] = S[\varphi]$ とすると、

$$e^{i(S[\varphi] + \Gamma_{\text{loop}}^{(1)}[\varphi])} = N \int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS[\varphi + \phi] - i \int d^4x \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi} \phi\right). \tag{C.25}$$

ここで、 $S[\varphi]$ は、

$$\begin{aligned}
S[\varphi] &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right) \\
&= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \varphi \square \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right),
\end{aligned} \tag{C.26}$$

であるから、

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi} = -\left\{ (\square + m^2)\varphi + \frac{\lambda}{3!} \varphi^3 \right\}. \tag{C.27}$$

また、 $S[\varphi + \phi]$ は、

$$S[\varphi + \phi] = S[\varphi] + \int d^4x \left[-\left\{ (\square + m^2)\varphi + \frac{\lambda}{3!} \varphi^3 \right\} \phi \right]$$

$$-\frac{1}{2}\phi\left(\square + m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\right)\phi - \frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\Big], \quad (\text{C.28})$$

と展開できる．今，簡略化のために，

$$\tilde{S}[\phi] \equiv \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\phi\left(\square + m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\right)\phi \right\}, \quad (\text{C.29})$$

と定義する．以上より，(C.25) は，

$$\begin{aligned} e^{i(S[\varphi] + \Gamma_{\text{loop}}^{(1)}[\varphi])} &= N \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{ iS[\varphi] + i\tilde{S}[\phi] + i \int d^4x \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right) \right\} \\ &= N e^{iS[\varphi]} \int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]} \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{ i\tilde{S}[\phi] + i \int d^4x \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right) \right\}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]}}, \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

となる．この式の右辺において，1ループ補正を計算するため必要となるのは ϕ の2次の項までである．よって，

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma_{\text{loop}}^{(1)}[\varphi]} &= \int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]} \\ &= \left(\det \frac{-\square - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}{i} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

この両辺の自然対数をとると，

$$\begin{aligned} i\Gamma_{\text{loop}}^{(1)}[\varphi] &= \ln \left(\det \frac{-\square - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}{i} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \ln \frac{-\square - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}{i}. \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

トレースは基底に依らない量なので，ここでは位置状態を選ぶことにすると，

$$\begin{aligned} i\Gamma_{\text{loop}}^{(1)}[\varphi] &= -\frac{1}{2} \int d^4x \langle x | \ln \frac{-\square - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}{i} | x \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4k \langle x | \ln \frac{-\square - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}{i} | k \rangle \langle k | x \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4k \ln \frac{k^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}{i} |\langle x | k \rangle|^2 \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \frac{k^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}{i}. \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

途中，運動量状態の完全系を挿入した．これより， φ を定数とするとポテンシャルへの1ループ補正は，

$$-iV_{\text{loop}}^{(1)}(\varphi) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \frac{k^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}{i}, \quad (\text{C.34})$$

というように求まる。

次に、以上で得られた 1 ループ補正の情報を用いて 2 ループ補正を計算する。(C.23) より、1 ループ補正を求めた際と同様にして、

$$\begin{aligned}
e^{i(S[\varphi] + \Gamma_{\text{loop}}^{(1)}[\varphi] + \Gamma_{\text{loop}}^{(2)}[\varphi])} &= N \int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS[\varphi + \phi] - i \int d^4x \frac{\delta(S[\varphi] + \Gamma_{\text{loop}}^{(1)}[\varphi])}{\delta\varphi} \phi\right) \\
&= N \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{iS[\varphi] + i\tilde{S}[\phi] + i \int d^4x \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}\right)\right\} \\
&= N e^{iS[\varphi]} \int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]} \\
&\quad \times \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{i\tilde{S}[\phi] + i \int d^4x \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}\right)\right\}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]}}. \quad (\text{C.35})
\end{aligned}$$

途中、(C.33) より得られる、

$$\frac{\delta\Gamma_{\text{loop}}^{(1)}[\varphi]}{\delta\varphi} = -\frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}, \quad (\text{C.36})$$

を用いた。以上より、2 ループ補正は (C.35) の最後の等式の 2 行目の部分から得られる。そこで、その部分の分子において以下のような展開をする：

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{i \int d^4x \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}\right)\right\} \\
&= 1 + i \int d^4x_1 \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k_1^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2!} i \int d^4x_1 \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k_1^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}\right) \\
&\quad \times i \int d^4x_2 \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k_2^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}\right) + \dots \quad (\text{C.37})
\end{aligned}$$

2 ループ補正に関係するのは、この展開において ϕ の 6 次以下の偶数次の項であるから (奇数次の項は経路積分した際に消える)、したがって、

$$\begin{aligned}
&e^{i\Gamma_{\text{loop}}^{(2)}[\varphi]} \\
&= \int \mathcal{D}\phi \left[e^{i\tilde{S}[\phi]} \left\{ 1 + i \int d^4x_1 \left(-\frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) + \frac{1}{2!} i \int d^4x_1 \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3\right) i \int d^4x_2 \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3\right) \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{2!} i \int d^4x_1 \left(\frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k_1^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}\right) i \int d^4x_2 \left(\frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k_2^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2!} i \int d^4x_1 \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3\right) i \int d^4x_2 \left(\frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k_2^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}\right) \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2!} i \int d^4x_1 \left(\frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k_1^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}\right) i \int d^4x_2 \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!}\phi^3\right) \right\} \right] / \int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]}. \quad (\text{C.38})
\end{aligned}$$

ここで、簡略化のために以下の表記を用いることにする：

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle \equiv \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)}{\int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]}}. \quad (\text{C.39})$$

また、伝播関数についても同様に、

$$D(x_1, x_2) \equiv \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x_1-x_2)} \frac{i}{k^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2} \quad (\text{C.40})$$

と表すことにする。これより、(C.38) の各項を計算していく。第1項は自明であるから、第2項より考えていくと、

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\phi \left[e^{i\tilde{S}[\phi]} \left\{ i \int d^4 x_1 \left(-\frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \right\} \right] / \int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]} \\ &= -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4 x_1 \langle \phi(x_1) \phi(x_1) \phi(x_1) \phi(x_1) \rangle \\ &= -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4 x_1 3 \{ D(x_1, x_1) \}^2 \\ &= -\frac{i\lambda}{8} \int d^4 x_1 \{ D(x_1, x_1) \}^2, \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

となる。次に、第3項は、

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\phi \left[e^{i\tilde{S}[\phi]} \left\{ \frac{1}{2!} i \int d^4 x_1 \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!} \phi^3 \right) i \int d^4 x_2 \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!} \phi^3 \right) \right\} \right] / \int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]} \\ &= \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\lambda}{3!} \right)^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) \langle \phi(x_1) \phi(x_1) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_2) \phi(x_2) \rangle \\ &= \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\lambda}{3!} \right)^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) [6 \{ D(x_1, x_2) \}^3 + 9 D(x_1, x_1) D(x_2, x_2) D(x_1, x_2)] \\ &= \frac{(i\lambda)^2}{12} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) \{ D(x_1, x_2) \}^3 \\ &\quad + \frac{(i\lambda)^2}{8} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) D(x_1, x_1) D(x_2, x_2) D(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

第4項は、

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\phi \left[e^{i\tilde{S}[\phi]} \left\{ \frac{1}{2!} i \int d^4 x_1 \left(\frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k_1^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times i \int d^4 x_2 \left(\frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k_2^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2} \right) \right\} \right] / \int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]} \\ &= \frac{1}{2!} \left(\frac{i\lambda}{2} \right)^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) D(x_1, x_1) D(x_2, x_2) \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle \\ &= \frac{(i\lambda)^2}{8} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) D(x_1, x_1) D(x_2, x_2) D(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

第 5 項は,

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}\phi \left[e^{i\tilde{S}[\phi]} \left\{ \frac{1}{2!} i \int d^4x_1 \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!} \phi^3 \right) i \int d^4x_2 \left(\frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k_2^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2} \right) \right\} \right] / \int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]} \\
&= \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\lambda}{3!} \right) \left(\frac{i\lambda}{2} \right) \int d^4x_1 \int d^4x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) D(x_2, x_2) \langle \phi(x_1) \phi(x_1) \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle \\
&= \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\lambda}{3!} \right) \left(\frac{i\lambda}{2} \right) \int d^4x_1 \int d^4x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) D(x_2, x_2) \{ 3D(x_1, x_1) D(x_1, x_2) \} \\
&= -\frac{(i\lambda)^2}{8} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) D(x_1, x_1) D(x_2, x_2) D(x_1, x_2). \tag{C.44}
\end{aligned}$$

第 6 項は第 5 項と同様に,

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}\phi \left[e^{i\tilde{S}[\phi]} \left\{ \frac{1}{2!} i \int d^4x_1 \left(\frac{\lambda\varphi}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{i\phi}{k_1^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2} \right) i \int d^4x_2 \left(-\frac{\lambda\varphi}{3!} \phi^3 \right) \right\} \right] / \int \mathcal{D}\phi e^{i\tilde{S}[\phi]} \\
&= -\frac{(i\lambda)^2}{8} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) D(x_1, x_1) D(x_2, x_2) D(x_1, x_2). \tag{C.45}
\end{aligned}$$

以上の各項の計算結果をまとめると,

$$e^{i\Gamma_{\text{loop}}^{(2)}[\varphi]} = 1 - \frac{i\lambda}{8} \int d^4x_1 \{ D(x_1, x_1) \}^2 + \frac{(i\lambda)^2}{12} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) \{ D(x_1, x_2) \}^3, \tag{C.46}$$

となる. この両辺の自然対数をとると,

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{\text{loop}}^{(2)}[\varphi] &= \ln \left[1 - \frac{i\lambda}{8} \int d^4x_1 \{ D(x_1, x_1) \}^2 + \frac{(i\lambda)^2}{12} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) \{ D(x_1, x_2) \}^3 \right] \\
&= -\frac{i\lambda}{8} \int d^4x_1 \{ D(x_1, x_1) \}^2 + \frac{(i\lambda)^2}{12} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \varphi(x_1) \varphi(x_2) \{ D(x_1, x_2) \}^3. \tag{C.47}
\end{aligned}$$

2 行目においては,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \tag{C.48}$$

というテイラー展開をして, 2 ループ補正に関する第 1 項のみを取り出した. したがって, φ を定数とするとポテンシャルに対する 2 ループ補正は,

$$\begin{aligned}
-iV_{\text{loop}}^{(2)}(\varphi) &= -\frac{i\lambda}{8} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2} \frac{i}{k_2^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2} \\
&\quad + \frac{(i\lambda)^2}{12} \varphi^2 \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3) \\
&\quad \times \frac{i}{k_1^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2} \frac{i}{k_2^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2} \frac{i}{k_3^2 - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2}, \tag{C.49}
\end{aligned}$$

というように求まる. 途中,

$$\int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{-ik_1(x_1-x_2)} e^{-ik_2(x_1-x_2)} e^{-ik_3(x_1-x_2)} = \int d^4x (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3), \tag{C.50}$$



図 C.1 ポテンシャルへの 2 ループ補正を表す図

となることを用いた。

以上のように得られた (C.49) の各項をファインマン図によって表すということを考えてみる。そのとき、第 1 項は図 C.1 の左の図、第 2 項は右の図のように描くことが出来る。つまり、ポテンシャルに対する高次の量子補正は、その理論から考えられる 1-PI の真空泡の図を計算することで求められる。

最後に、ループ展開そのものがどのような展開であるのか、ということについて少し考えてみる。まずその準備として、図に含まれる部分同士の間関係を見る。今、考える図に含まれる内線の本数を I 、頂点の本数を V 、そして、ループの本数を L とする。これらの量について計算の中での役割を考えてみると、 I は変数の数、 V は各頂点における運動量保存による式の数、そして、 L は独立な積分の数である。このとき、 V 個の式を適当に書き換えると、その中の 1 つは全運動量の保存を表す式となり、これは内線を拘束しない。つまり、独立な式の本数は $V - 1$ となる。よって、一般に、

$$\begin{aligned} L &= I - (V - 1) \\ &= I - V + 1, \end{aligned} \tag{C.51}$$

という関係が存在する。

次に、ファインマン核においてプランク定数 \hbar をあらわに書いてみると、

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}\right)\right\}, \tag{C.52}$$

となる。 \mathcal{L}_0 と \mathcal{L}_{int} はそれぞれ、ラグランジアン of 自由な部分と相互作用の部分である。これより、伝播関数は \hbar に、頂点は \hbar^{-1} に比例する寄与を与えることが分かる (なぜならば、伝播関数は場の 2 次項の演算子の逆数で与えられるからである)。つまり、考える図における \hbar の次数を H とすると、それは、

$$H = I - V, \tag{C.53}$$

というように得られる。この式に (C.51) を代入し、 H と L の関係を求めると、

$$H = L - 1, \tag{C.54}$$

となる。よって、 L 個のループを含むような図は、 \hbar^{L-1} に比例する寄与を与える。ただし、(C.52) において作用全体に \hbar^{-1} が掛かっているため、結局のところ L ループの図は \hbar^L に比例すると考え

られる。したがって、作用 (またはポテンシャル) のループ展開は \hbar の冪での展開だと理解することが出来る。

付録 D

無限和に関する公式

高次元ゲージ場の余剰次元成分に由来するヒッグス場 θ の有効ポテンシャルを計算する際には、余剰次元方向の運動量が空間のコンパクト化により離散化されるため、その運動量積分が無限和になる。ここでは、そのようにして現れる無限和を含むような関数についての幾つかの公式を示す。

はじめに以後頻繁に使う事になるポアソン再和の公式について説明する。今、フーリエ (逆) 変換を以下のように与える：

$$\begin{cases} F(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{F}(k), \\ \hat{F}(k) = \int dx e^{-ikx} F(x). \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

このとき関数 F と \hat{F} は、

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{F}(2\pi m), \quad (\text{D.2})$$

という関係を持つ。(D.2) をポアソン再和の公式と呼ぶ。以降では簡略化のために、この公式を使った場合でも無限和の変数は変更しないことにする。

ここからは実際に θ の有効ポテンシャルを計算する際に現れる関数について見ていくことにする。まずは以下の関数 $f(\theta)$ を計算する：

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \ln \left\{ p_E^2 + \left(\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R} \right)^2 \right\}. \quad (\text{D.3})$$

この関数 $f(\theta)$ は 1 ループ補正の計算において現れる。今、(D.3) における自然対数をパラメータを用いて、

$$\ln \alpha = - \int_0^{\infty} ds s^{-1} e^{-s\alpha} + \text{const.}, \quad (\text{D.4})$$

というように書き換える。(D.4) は両辺を α で微分すると共に $1/\alpha$ になり、正しいことが示せる。これより、

$$f(\theta) = - \frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} ds s^{-1} e^{-s \{ p_E^2 + (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2 \}}, \quad (\text{D.5})$$

となる。このとき、 θ に無関係な定数項は無視した。さらに、運動量積分について 4 次元極座標 ($d^4 p_E = 2\pi^2 r^3 dr$) を用いると、

$$\int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} e^{-s p_E^2} = \frac{1}{16\pi^2} s^{-2}, \quad (\text{D.6})$$

となることから、

$$f(\theta) = -\frac{1}{32\pi^3 R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} ds s^{-3} e^{-s(\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2}. \quad (\text{D.7})$$

ここで、(D.7) に含まれる無限和について、はじめに示したポアソン再和の公式 (D.2) を用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-s(\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R \sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s} - im\theta} \\ &= R \sqrt{\frac{\pi}{s}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}} \{ \cos(m\theta) - i \sin(m\theta) \} \\ &= R \sqrt{\frac{\pi}{s}} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}} \cos(m\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

途中、 m の奇関数の部分はなくなり、偶関数部分のみが残っている。また、第 1 項は θ に無関係なので無視することになると、

$$f(\theta) = -\frac{\sqrt{\pi}}{16\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(m\theta) \int_0^{\infty} ds s^{-\frac{7}{2}} e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}}. \quad (\text{D.9})$$

最後にパラメータとして導入した s に関する積分を実行するために、 $s = \pi^2 R^2 m^2 / y$ という変数変換をすると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} ds s^{-\frac{7}{2}} e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}} &= \frac{1}{(\pi R m)^5} \int_0^{\infty} dy y^{\frac{3}{2}} e^{-y} \\ &= \frac{1}{(\pi R m)^5} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{1}{(\pi R m)^5} \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

ここで、 Γ はガンマ関数を表す。以上より、1 ループ補正の計算に関する関数 $f(\theta)$ は、

$$f(\theta) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{3}{32\pi^6 R^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\theta)}{m^5}, \quad (\text{D.11})$$

というように正規化することが出来た。

次に、ゲージボソンが関係するような 2 ループ補正の計算において現れる関数、

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2}, \quad (\text{D.12})$$

について考える．今， $f(\theta)$ の場合と同様にパラメータ s を導入すると，

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= \frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} ds e^{-s\{p_E^2 + (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2\}} \\
&= \frac{1}{32\pi^3 R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} ds s^{-2} e^{-s(\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{16\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(m\theta) \int_0^{\infty} ds s^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}}. \tag{D.13}
\end{aligned}$$

途中，(D.8) を用いた．ただし， θ に無関係な項は既に落としてある． s の積分についても同様にすると，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} ds s^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}} &= \frac{1}{(\pi R m)^3} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{(\pi R m)^3} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{D.14}
\end{aligned}$$

よって，正則化された関数 $g(\theta)$ は，

$$g(\theta) = \frac{1}{4\pi^2 (2\pi R)^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\theta)}{m^3}. \tag{D.15}$$

最後に，重力子が関係するような 2 ループ補正の計算において現れる関数，

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R}}{p_E^2 + (\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2}, \tag{D.16}$$

について考える．これについても以上の場合と同様に，パラメータ s を導入すると，

$$h(\theta) = \frac{1}{32\pi^3 R^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(m - \frac{\theta}{2\pi}\right) \int_0^{\infty} ds s^{-2} e^{-s(\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2}. \tag{D.17}$$

このとき，第 2 項の無限和は (D.8) によって書き換えられる．そこで，第 1 項の無限和についてポアソン再和の公式 (D.2) を用いると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=-\infty}^{\infty} m e^{-s(\frac{m}{R} - \frac{\theta}{2\pi R})^2} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R \sqrt{\frac{\pi}{s}} \left(\frac{\theta}{2\pi} - \frac{i\pi R^2 m}{s}\right) e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s} - im\theta} \\
&= R \sqrt{\frac{\pi}{s}} \left[\frac{\theta}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}} \{\cos(m\theta) - i \sin(m\theta)\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{i\pi R^2}{s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}} \{\cos(m\theta) - i \sin(m\theta)\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R\sqrt{\frac{\pi}{s}} \left[\frac{\theta}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}} \cos(m\theta) \right\} - \frac{i\pi R^2}{s} 2 \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}} \{-i \sin(m\theta)\} \right] \\
&= R\sqrt{\frac{\pi}{s}} \left[\frac{\theta}{2\pi} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}} \left\{ \frac{\theta}{2\pi} \cos(m\theta) - \frac{\pi R^2}{s} m \sin(m\theta) \right\} \right]. \tag{D.18}
\end{aligned}$$

ここでも、(D.8)と同様に m の偶関数部分のみが残っている。したがって、(D.17)に (D.8) と (D.18) を代入すると、

$$\begin{aligned}
h(\theta) &= -\frac{\sqrt{\pi}R}{16\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} m \sin(m\theta) \int_0^{\infty} ds s^{-\frac{7}{2}} e^{-\frac{\pi^2 R^2 m^2}{s}} \\
&= -\frac{3}{4\pi^2(2\pi R)^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\theta)}{m^4}. \tag{D.19}
\end{aligned}$$

s の積分については (D.10) を用いた。

以上より、 θ の有効ポテンシャルを計算する際に現れる、無限和を含むような関数を全て正則化することが出来た。

参考文献

- [1] F. Englert and R. Brout, *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321.
- [2] P.W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508.
- [3] G. Guralnik, C. Hagen and T. Kibble, *Global Conservation Laws and Massless Particles*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 585.
- [4] K. Sato, *First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **195** (1981) 467.
- [5] A.H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, *Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.* **3** (1987) 139.
- [6] A.D. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems*, *Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.* **3** (1987) 149.
- [7] G. Nordstrom, *On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields*, *Phys. Z.* **15** (1914) 504 [[physics/0702221](#)].
- [8] G. Nordstrom, *On a theory of electricity and gravitation*, [physics/0702222](#).
- [9] G. Nordstrom, *On a possible foundation of a theory of matter*, [physics/0702223](#).
- [10] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik*, *Int. J. Mod. Phys. D* **27** (2018) 1870001 [[1803.08616](#)].
- [11] O. Klein, *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English)*, *Z. Phys.* **37** (1926) 895.
- [12] O. Klein, *The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law*, *Nature* **118** (1926) 516.
- [13] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G.R. Dvali, *The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, *Phys. Lett. B* **429** (1998) 263 [[hep-ph/9803315](#)].
- [14] L. Randall and R. Sundrum, *A Large mass hierarchy from a small extra dimension*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370 [[hep-ph/9905221](#)].
- [15] H. Hatanaka, T. Inami and C. Lim, *The Gauge hierarchy problem and higher*

- dimensional gauge theories*, *Mod. Phys. Lett. A* **13** (1998) 2601 [[hep-th/9805067](#)].
- [16] A. Hebecker and J. March-Russell, *The structure of GUT breaking by orbifolding*, *Nucl. Phys. B* **625** (2002) 128 [[hep-ph/0107039](#)].
- [17] N. Haba, Y. Kawamura and K.-y. Oda, *Dynamical Rearrangement of Theta Parameter in Presence of Mixed Chern-Simons Term*, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 085021 [[0803.4380](#)].
- [18] Y. Abe, Y. Goto, Y. Kawamura and Y. Nishikawa, *Conjugate boundary condition, hidden particles, and gauge-Higgs inflation*, *Mod. Phys. Lett. A* **31** (2016) 1650208 [[1608.06393](#)].
- [19] Y. Kawamura and T. Miura, *Soft Supersymmetry Breaking Masses and μ Parameter from Dynamical Rearrangement of Exotic $U(1)$ Symmetries*, *Int. J. Mod. Phys. A* **26** (2011) 4405 [[1106.0374](#)].
- [20] Y. Kawamura and T. Miura, *μ Parameter from Dynamical Rearrangement of $U(1)$ and θ Parameter*, *Int. J. Mod. Phys. A* **27** (2012) 1250023 [[1108.1004](#)].
- [21] K. Kojima, K. Takenaga and T. Yamashita, *Grand Gauge-Higgs Unification*, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 051701 [[1103.1234](#)].
- [22] Y. Kawamura and Y. Nishikawa, *On diagonal representatives in boundary condition matrices on orbifolds*, *Int. J. Mod. Phys. A* **35** (2020) 2050206 [[2009.10958](#)].
- [23] Y. Aharonov and D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, *Phys. Rev.* **115** (1959) 485.
- [24] Y. Hosotani, *Dynamical Mass Generation by Compact Extra Dimensions*, *Phys. Lett. B* **126** (1983) 309.
- [25] Y. Hosotani, *Dynamical Gauge Symmetry Breaking as the Casimir Effect*, *Phys. Lett. B* **129** (1983) 193.
- [26] Y. Hosotani, *Dynamics of Nonintegrable Phases and Gauge Symmetry Breaking*, *Annals Phys.* **190** (1989) 233.
- [27] N. Manton, *A New Six-Dimensional Approach to the Weinberg-Salam Model*, *Nucl. Phys. B* **158** (1979) 141.
- [28] D. Fairlie, *Higgs' Fields and the Determination of the Weinberg Angle*, *Phys. Lett. B* **82** (1979) 97.
- [29] D. Fairlie, *Two Consistent Calculations of the Weinberg Angle*, *J. Phys. G* **5** (1979) L55.
- [30] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, P. Creminelli and L. Randall, *Extra natural inflation*, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 221302 [[hep-th/0301218](#)].
- [31] Y. Hosotani, *Dynamical gauge symmetry breaking by Wilson lines in the electroweak theory*, in *2004 International Workshop on Dynamical Symmetry Breaking*, pp. 17–34, 4, 2005 [[hep-ph/0504272](#)].
- [32] Y. Hosotani, *All-order Finiteness of the Higgs Boson Mass in the Dynamical Gauge-Higgs Unification*, [hep-ph/0607064](#).

- [33] Y. Hosotani, N. Maru, K. Takenaga and T. Yamashita, *Two Loop finiteness of Higgs mass and potential in the gauge-Higgs unification*, *Prog. Theor. Phys.* **118** (2007) 1053 [0709.2844].
- [34] J. Hisano, Y. Shoji and A. Yamada, *To be, or not to be finite? The Higgs potential in Gauge Higgs Unification*, *JHEP* **02** (2020) 193 [1908.09158].
- [35] Y. Nishikawa, *Graviton loop contribution to Higgs potential in gauge-Higgs unification*, *PTEP* **2021** (2021) 013B07 [2010.10116].
- [36] J.F. Donoghue and B.R. Holstein, *Low Energy Theorems of Quantum Gravity from Effective Field Theory*, *J. Phys. G* **42** (2015) 103102 [1506.00946].
- [37] K. Shiraishi and S. Hirenzaki, *Vacuum energy for Yang-Mills fields in $R(d) \times S(1)$: One loop, two loop, and beyond*, *Z. Phys. C* **53** (1992) 91 [1803.00670].
- [38] N. Maru and T. Yamashita, *Two-loop Calculation of Higgs Mass in Gauge-Higgs Unification: 5D Massless QED Compactified on S^{*1}* , *Nucl. Phys. B* **754** (2006) 127 [hep-ph/0603237].
- [39] Y. Abe, T. Inami, Y. Kawamura and Y. Koyama, *Radion stabilization in the presence of a Wilson line phase*, *PTEP* **2014** (2014) 073B04 [1404.5125].
- [40] Y. Abe, T. Inami, Y. Kawamura and Y. Koyama, *Inflation from radion gauge-Higgs potential at Planck scale*, *PTEP* **2015** (2015) 093B03 [1504.06905].
- [41] K. Agashe, R. Contino and A. Pomarol, *The Minimal composite Higgs model*, *Nucl. Phys. B* **719** (2005) 165 [hep-ph/0412089].
- [42] Y. Hosotani, K. Oda, T. Ohnuma and Y. Sakamura, *Dynamical Electroweak Symmetry Breaking in $SO(5) \times U(1)$ Gauge-Higgs Unification with Top and Bottom Quarks*, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 096002 [0806.0480].
- [43] S. Funatsu, H. Hatanaka, Y. Hosotani, Y. Orikasa and T. Shimotani, *Novel universality and Higgs decay $H \rightarrow \gamma\gamma$, gg in the $SO(5) \times U(1)$ gauge-Higgs unification*, *Phys. Lett. B* **722** (2013) 94 [1301.1744].
- [44] R. Jackiw, *Functional evaluation of the effective potential*, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 1686.
- [45] J. Iliopoulos, C. Itzykson and A. Martin, *Functional Methods and Perturbation Theory*, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 165.