

令和 2 年 6 月 6 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17612

研究課題名(和文) 粒子と量子場の相互作用系に対する束縛条件の導出と繰り込みの研究

研究課題名(英文) Research on the binding condition and the renormalization for a quantum system of Bose field coupled to a particle

研究代表者

佐々木 格 (Sasaki, Itaru)

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号：50558161

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：(1)周期グラフにグラフ摂動を加えた離散ラプラシアンの本質的スペクトルを特定する定理を証明した。(2)高次の相互作用を付け加えたRabiモデルの基底状態エネルギーを考察した。このモデルが強結合領域において、基底状態がドレスされた光子を纏うことを証明した。(3)減衰するポテンシャルを持ち相対論的シュレディンガー作用素で正エネルギーの埋蔵固有値を持つものを構成した。(4)量子ウォークの時間作用素の理論を構築し、様々な例を構成した。また、ワインディングナンバーと時間作用素の自己共役拡大の関係を明らかにした。(5)代数的Bogoliubov変換の一般論を構築した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

上の成果の(1)は物性物理学に関連する結果であり、周期構造を持つグラフの本質的スペクトルが特定されることにより、本質的スペクトルの外にある固有値の数値計算が保証されるようになる。(2)は量子デバイスに関連する数学的結果である。(3)(4)(5)は量子物理系の数学的構造に関する研究である。

研究成果の概要(英文)：(1) We proved a theorem that identifies the essential spectrum of discrete Laplacian by adding graph perturbation to a periodic graph. (2) We consider a generalized Rabi model, and we proved that the dressed photon appears in the ground state in a deep-strong coupling regime. (3) It is constructed that Schrodinger operators with slowly decaying potential that has a positive energy embedded eigenvalue. (4) Time operators for quantum walks are considered, and various examples are constructed. It is clarified that the relationship between the winding numbers and self-adjoint expansions of a time operator. (5) Algebraic Bogoliubov transformations that diagonalize the Hamiltonian of a pair theory are developed.

研究分野：数理物理学

キーワード：数理物理 スペクトル解析 Rabiモデル Bogoliubov変換 時間作用素 自己共役作用素

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

この研究は、量子力学的粒子と量子ボース場からなる量子系を主な研究対象としている。そのような量子系の典型例が量子電磁力学である。そこでは粒子系は荷電粒子、ボース場は量子輻射場であり、相互作用の形はゲージ不変性により定められる。光のようにボース粒子が質量を持たない場合には、すべての非摂動系の固有値は連続固有値に埋蔵されるため、量子系のスペクトル解析は非常に難しい問題である。これらを進展させるためにはシュレディンガー作用素に対して発展した手法や汎関数積分法(確率論)など様々な手法を用いて、粒子と量子ボース場が相互作用する量子系のスペクトル解析を進展させる必要がある。

粒子と量子場が相互作用する量子系において基底状態は最も安定な状態である。基底状態の存在は原子、分子の存在に関わる問題であり、これを証明することはこの分野の主要な問題になっている。多くの系について基底状態の存在は束縛条件と呼ばれる不等式の証明に帰着される事が知られている。また、基底状態の存在のためには赤外発散が起こらないという条件が必要であり、赤外発散が起こらないことも合わせて証明する必要がある。相対論的粒子と量子場が相互作用する系に対しては未解決の部分が多い。量子場には赤外発散の他に紫外発散と呼ばれる困難がある。現在の量子場の数学的研究では、紫外切断と呼ばれる正則化を行い、これを固定した上で作用素論的解析を行っている。この正則化を除去することができるかという問題は非常に難しい問題として知られており、モデルに含まれる定数を無限大に発散させながら正則化を行うことが必要である。これを繰り込みの問題という。相互作用を持つ量子場のくりこみはいくつかの具体的なモデルに対して示されているが、場の2次の相互作用を持つ Nelson モデルや Pauli-Fierz モデルの繰り込みは未解決である。

2. 研究の目的

1 つめの研究目的は相対論的粒子と量子場が相互作用する系に対して、束縛条件を証明する事である。また、電磁相互作用する模型に対しては粒子の質量がゼロであっても、赤外発散が起きず基底状態が存在することが予想される。この研究の目的の一つはこれを示すことである。他には、場の二次の相互作用を持つ Nelson モデルの繰り込みを解決することや Coulomb ゲージの QED のスペクトル解析を行う問題がある。

3. 研究の方法

粒子と量子場の相互作用系に対して、束縛条件を示すための一般的方法は知られないが、非相対論的粒子に対する結果を相対論的な場合にまで一般化することが可能であるかを調査することが最初の方法として考えられる。また、赤外発散の問題や基底状態の存在を調べるためには Pull-through 公式を用いた評価が有効であると考えられる。非相対論的粒子に対してこれらの評価を正しく行う技術を確立する必要がある。

4. 研究成果

質量ゼロの荷電粒子と量子電磁場が相互作用する量子系に対して、基底状態の存在を証明することに成功した(廣島氏, 日高氏との共同研究, arXiv: 1609.07651(math-ph), この論文は 2016 年に最初に投稿されたが, その後の研究によって 2019 年に大幅に修正された)。そこでは、はじめに光に質量 m をもたせて、基底状態の存在を確立した後で m をゼロにする極限が存在することを証明する。そこでは基底状態が纏う光の数の評価することが重要となる。評価を行うに当たっては、粒子の質量がゼロであることから様々な困難が生じるが、それらの障害を回避して必要な評価を得ることに成功した。1 つめの障害は Pull-through 公式の正当化であるが、これは調和振動子の基底状態に $|x|$ を乗じた関数はハミルトニアン²の定義域には含まれないが運動量作用素の定義域には含まれることから類推した評価を導くことで突破することが出来た。もう一つの障害は赤外正則な評価を得ることであるが、これは廣川氏(現九州大学)が非相対論的 QED に対して考案した双極近似を用いて赤外光子の個数を評価する方法を相対論的な場合まで拡張することで解決された。

しかし当初目標としていた束縛エネルギーの導出については、 N 個の相対論的粒子が統計を持たない場合の証明には成功しているが、フェルミオン系に対する問題は現在も未解決のままである。

上述の研究は相対論的シュレディンガー作用素の解析に深く関連している。純粋に場を含まない相対論的シュレディンガー作用素の研究も行い、ゆっくりと減衰するポテンシャルを持つ相対論的シュレディンガー作用素で正エネルギーの埋蔵固有値を持つものがあることを示した(J. Lorinczi 氏との共同研究)。これは研究当初の計画にはないものであったが、関連する作用素を調べているときに解法を思いつき解決することが出来た。

また、当初の研究計画通りの問題が解けなかったため、量子ウォークに対する時間作用素や Bogoliubov 変換を研究した。その結果、ある量子ウォークの時間作用素が離散スペクトルを持つ自己共役になることを発見した(arXiv:1901.10665, 船川氏, 松澤氏, 鈴木氏, 寺西氏との共同研究)。これは量子ウォークにおいて、時間作用素も量子化されることを意味する。また Bogoliubov 変換の研究に関しては、対相互作用模型を対角化する代数的な Bogoliubov 変換を構成することに成功した(arXiv:1910.13487(math-ph), 松澤氏との共同

研究)。これは量子場の繰り込みの研究に使えることが期待できる。特にこれは場の 2 次の相互作用を持つ Nelson モデルの繰り込みに使える可能性がある。

当初予定していた、準相対論的 Pauli-Fierz モデルのポーラロンの研究、及び Coulomb ゲージの QED の解析は行うことが出来なかった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|--|-------------------------------|
| 1. 著者名 Hirokawa Masao, Moeller Jacob S, Sasaki Itaru | 4. 巻 50 |
| 2. 論文標題 A mathematical analysis of dressed photon in ground state of generalized quantum Rabi model using pair theory | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical | 6. 最初と最後の頁 184003 ~ 184003 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/aa677c | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|--|---------------------------|
| 1. 著者名 Lorinczi Jozsef, Sasaki Itaru | 4. 巻 273 |
| 2. 論文標題 Embedded eigenvalues and Neumann-Wigner potentials for relativistic Schrodinger operators | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis | 6. 最初と最後の頁 1548 ~ 1575 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2017.03.012 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Itaru Sasaki, Akito Suzuki | 4. 巻 446 |
| 2. 論文標題 Essential spectrum of the discrete Laplacian on a perturbed periodic graph | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications | 6. 最初と最後の頁 1863-1881 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.09.063 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 6件/うち国際学会 4件）

| |
|---|
| 1. 発表者名 佐々木格 |
| 2. 発表標題 Existence of ground state of the model of a massless charged particle interacting with the quantized radiation field |
| 3. 学会等名 量子場の数理とその周辺（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Itaru Sasaki |
| 2. 発表標題 Existence of ground state of massless relativistic Pauli-Fierz model |
| 3. 学会等名 ICMP (国際数理物理学会) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐々木格 |
| 2. 発表標題 Existence of ground state in the massless semi-relativistic Pauli-Fierz model |
| 3. 学会等名 The 16th Linear and Nonlinear Waves (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐々木格 |
| 2. 発表標題 On the spectral analysis of the semi-relativistic Pauli-Fierz model |
| 3. 学会等名 スペクトル・散乱理論とその周辺 (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 佐々木格 |
| 2. 発表標題 準相対論的 Pauli-Fierz モデルにおける粒子の束縛について |
| 3. 学会等名 新井朝雄先生退職記念研究集会 (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 佐々木格 |
| 2. 発表標題 準相対論的 Pauli-Fierz モデルの基底状態について---粒子が質量を 持たない場合--- |
| 3. 学会等名 Workshop on Analysis in Kagurazaka 2018 (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Itaru Sasaki |
| 2. 発表標題 On the embedded eigenvalue of relativistic Schrodinger operator |
| 3. 学会等名 Aarhus University, Math/Phys Seminar |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Itaru Sasaki |
| 2. 発表標題 Embedded Eigenvalue and von Neumann-Wigner Potential for the Relativistic Schrodinger Operator |
| 3. 学会等名 University of Lorraine, Spectral Theory and Mathematical Physics |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Itaru Sasaki |
| 2. 発表標題 Embedded Eigenvalues and Neumann-Wigner Potentials for Relativistic Schrodinger Operators |
| 3. 学会等名 QMath13: Mathematical Results in Quantum Physics (国際学会) |
| 4. 発表年 2016年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Itaru Sasaki |
| 2. 発表標題 Embedded Eigenvalues and Neumann-Wigner Potentials for Relativistic Schrodinger Operators |
| 3. 学会等名 Physical and mathematical approaches to interacting particle systems In honer of 70th birthday of Herbert Spohn (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2017年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

| |
|--|
| 佐々木格のホームページ http://math.shinshu-u.ac.jp/~isasaki/index.html 信州大学研究者総覧SOAR: 佐々木格 http://soar-rd.shinshu-u.ac.jp/profile/ja.HFAVjFkV.html 研究業績 (佐々木格) http://math.shinshu-u.ac.jp/~isasaki/gyoseki.html 信州大学研究者総覧 http://soar-rd.shinshu-u.ac.jp/profile/ja.HFAVjFkV.html |
|--|

| | | |
|---------|---------------------------|-----------------------|
| 6. 研究組織 | | |
| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) |
| | | 備考 |