

博士論文審査の結果の要旨

氏名	田中 洋平
学位名	博士（理学）
学位番号	甲 第 140 号
論文題目	On some topological invariants for one-dimensional discrete-time quantum walks with chiral symmetry (カイラル対称性を持つ1次元離散時間量子ウォークの位相不変量)
論文審査委員	主査 鈴木 章斗 大野 博道 松澤 泰道 廣島 文生 (九州大学)

(博士論文審査の結果の要旨)

本論文において申請者は、カイラル対称性を持つ1次元量子ウォークのトポロジカル不変量について、関数解析の立場から数学的に厳密に研究を行った。

量子ウォークはランダムウォークの量子版として導入された離散時間の量子力学モデルであり、これまで主に物理学者たちによって精力的に研究されてきた。量子ウォークは実験で実装可能であるという特徴を持つ。実際、バルクエッジ対応が予言するエッジ状態が近年実験で観測されている。ここでバルクエッジ対応とは、トポロジカル不変量が自明でなければ局在した状態（エッジ状態）が現れる、という物理的な予言である。申請者の研究はこの予言に数学的な根拠を与えるものである。

量子ウォークは数学的にはヒルベルト空間上のユニタリ作用素の理論である。このユニタリ作用素が系の時間発展を表す。カイラル対称性は自己共役なユニタリ作用素によって表され、時間発展のユニタリ作用素としかるべき代数関係を満たすとき、当該の系はカイラル対称性を持つと言われる。このような設定の下で、鈴木はトポロジカル不変量のある自然に現れる作用素のフレドホルム指数として定義した。

申請者の1つ目の主結果は、一般的な1次元量子ウォークに対して（適当な仮定の下で）このトポロジカル不変量の計算公式を与えたことである。すなわち、鈴木が定義したトポロジカル不変量がある2つの閉曲線の回転数の差で表されることを証明した。この主結果から2つのことが明らかになる。まず、「2つの閉曲線の回転数の差」という量は物理学者が通常用いるトポロジカル不変量の定義であり、申請者の主結果は物理学者の定義と鈴木が定義が一致することを示している。もう一つは鈴木が先行研究の結果と合わせて、「2つの閉曲線の回転数が異なればエッジ状態が現れる」という形で1次元量子ウォークのバルクエッジ対応を数学的に厳密な形で明らかにしたことである。更に申請者は主結果をスプリットステップ量子ウォークと呼ばれるモデルに適用し、そのトポロジカル不変量を具体的に計算した。この計算結果は鈴木と申請者が2019年に Quantum Inf. Process. に発表した論文のものと一致している（計算手法は異なる）。

申請者の2つ目の主結果は、非ユニタリな量子ウォークに対してトポロジカル不変量の計算公式を証明したことである。非ユニタリな量子ウォークは量子開放系と呼ばれる、環境と相互作用する系に対応する。近年、望月-Kim-小布施が導入したモデルのエッジ状態が実験で観測されていた。しかしそのトポロジカル不変量の数学的な研究はなされていなかった。申請者は非ユニタリな場合にも鈴木が導入したトポロジカル不変量が定義可能であることに注目し、望月-Kim-小布施モデルを含む設定の下でその計算公式を導出した。1つ目の主結果と同様に鈴木がトポロジカル不変量はフレドホルム指数として定義されているが、申請者はその値がある2つの閉曲線の回転数の差として表されることを証明し、それをを用いてトポロジカル不変量の具体的な値を求めた。

以上のように、申請者の論文は量子ウォークの数学的な研究の発展に大きく貢献するものであり、学位論文として十分な内容を持つ。申請論文の成果は国際的に高く評価されている論文誌に掲載されており、早期修了の条件も満たしていると判断される。

よって申請者は博士（理学）を授与される資格があると認める。

(公表主要論文名)

1. Keisuke Asahara, Daiju Funakawa, Motoki Seki, Yohei Tanaka. An index theorem for one-dimensional gapless non-unitary quantum walks. *Quantum Inf. Process.* 20(9), 287 (2021).
2. Yohei Tanaka. A constructive approach to topological invariants for one-dimensional strictly local operators. *J. Math. Anal. Appl.* 500(1), 125072 (2021).
3. Akito Suzuki, Yohei Tanaka. The Witten index for 1D supersymmetric quantum walks with anisotropic coins. *Quantum Inf. Process.* 18(12), 377 (2019).