

博士論文審査の結果の要旨

氏名	矢澤明喜子
学位名	博士（理学）
学位番号	甲第 141 号
論文題目	The Hessian matrices of generating polynomials associated to graphs and matroids (グラフやマトロイドに付随する母関数のヘッセ行列について)
論文審査委員	主査 沼田泰英 花木章秀 和田堅太郎 前野俊昭 (名城大学)

(博士論文審査の結果の要旨)

マトロイドとは、ベクトル空間の有限部分集合を一次独立性に着目し抽象化・公理化した対象である。ベクトル空間同様に、独立集合、従属集合、フラット(生成する部分空間)、基底などといった概念が定式化できる。マトロイド M のフラットを集めた集合 P_M は包含関係で半順序集合となるが、このように構成した半順序集合が **Geometric Lattice** と呼ばれるクラスをなすなど、マトロイドそれ自身も興味深い組合せ論的对象である。その一方で、数値解析手法の理論などにも用いられるように応用面でも重要な研究対象であり、よく研究されている。ベクトル空間の有限部分集合や有限体上のベクトル空間といったものがマトロイドの典型例であるが、連結グラフ G 内の **Spanning tree** およびその部分グラフを集めたもの M_G (グラフィックマトロイド)もマトロイドの重要な典型例の一つである。

0 標数の体を係数とする多変数多項式環の斉次元 f に対し、 f を偏微分作用素として消すような多項式を集めた集合 $\text{Ann}(f)$ は斉次イデアルとなる。さらに $\text{Ann}(f)$ による剰余環は、**Gorenstein** 代数と呼ばれるクラスをなし、**Poincaré duality** と呼ばれる構造を持つなど、コホモロジー環のもつ性質を持っており重要な研究対象である。コンパクトケーラー多様体のコホモロジー環でのケーラー形式では、**Hard Lefschetz Theorem** が成り立つことが知られているが、ケーラー形式がもつ性質を環論的に抽象化した強 **Lefschetz** 性という概念があり、'どのような **Gorenstein** 代数は強 **Lefschetz** 性をもつか'という問題がある。

これらの背景を踏まえ、審査対象の学位論文では、マトロイドの基底の情報から構成された重み付き母関数を研究対象とし、そのヘッセ行列やヘッセ行列式(ヘシアン)について主に考察されている。特に、一般のマトロイド、グラフィックマトロイド、完全グラフや完全2部グラフから定まるグラフィックマトロイド、というクラスごとにその具体性に合わせて詳細な結果が得られている。以下で結果について述べる:

完全グラフや完全2部グラフから定まるグラフィックマトロイドに付随する基底母関数については、そのヘッセ行列の固有値およびその固有空間が具体的に求められている。とくに、その固有値には 0 がなく、1つのみ符号が異なるという特徴を有する。本論文では、ブロック巡回的な行列に対する固有値の公式を導出しており、その特別な場合としてヘッセ行列の固有値を求めている。

グラフィックマトロイドに付随する基底母関数のヘッセ行列については、その固有値の具体的な値まではわからないものの、第一象限において、その固有値には 0 がなく、1つのみ符号が異なるという特徴を有することがわかる。グラフィックマトロイドに付随する基底母関数はキルヒホッフ多項式とも呼ばれている。**Matrix-Tree Theorem** という名前でも知られている公式により、キルヒホッフ多項式は行列式としての表示を持つことから、概均質ベクトル空間の相対不変式として捉えることができ、相対不変式の理論を用いこの事実を示している。

一般のマトロイドに付随する基底母関数のヘッセ行列についても、第一象限において、固有値には 0 がなく、1つのみ符号が異なるという特徴を有することがわかる。この場合には、キルヒホッフ多項式の場合のような相対不変式を用いた手法は適応できないが、サイズに関する数学的帰納法によりこの事実を示すことができる。また、基底母関数の他にも独立集合の情報から構成される母関数についても考察している。

これらの結果から、マトロイドの基底母関数のヘシアンは、恒等には 0 ではないという事実がわかる。このことから、**Watanabe-Maeno** による **Hessian** 判定法により、これらの母関数により定義される **Gorenstein** 代数が、1次の強 **Lefschetz** 性を持つことがわかる。これは、'マトロイドの基底母関数により定義される **Gorenstein** 代数が強 **Lefschetz** 性を持つか'という未解決問題の一部を肯定的に解決している。

これらの成果は公表主要論文として査読付きの雑誌にすでに出版されている。さらに、学会発表等も行っている。様々な要素を総合して、学位論文に値し「合格」と判断した。

(公表主要論文名)

Akiko Yazawa, The eigenvalues of the Hessian matrices of the generating functions for trees with k components", *Linear Algebra and its Applications*, Volume 631, pp 48-66, (December 2021).

Satoshi Murai, Takahiro Nagaoka, Akiko Yazawa, Strictness of the log-concavity of generating polynomials of matroids", *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, Volume 181, 105351, (July 2021).

Takahiro Nagaoka, Akiko Yazawa, Strict log-concavity of the Kirchhoff polynomial and its applications to the strong Lefschetz property", *Journal of Algebra*, Volume 577, pp 175-202, (July 2021).

Akiko Yazawa. The eigenvalues of Hessian matrices of the complete and complete bipartite graphs",
Journal of Algebraic Combinatorics, 54, pp. 1137-1157,(April 2021).