

樹下の θ -グラフから導かれるハンドル体 タングルの量子不変量の値

——種数 2 のハンドル体タングルの量子不変量の応用——

阿部 翠空星

キーワード：樹下の θ -グラフ 山田多項式 ハンドル体タングル ハンドル体タングルの量子不変量

概要

樹下の θ -グラフは非自明な空間グラフであり、ハンドル体結び目とみなすと自明なハンドル体結び目である。しかし、 θ -グラフから導かれる 3 つのハンドル体タングルの組では非自明なハンドル体タングルの組があることを示した。また、このような θ -グラフは無限に存在することも示した。

1. イントロダクション

コンパクトな境界が 4 つある 3 次元球体を $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ に埋め込むことを考える。埋め込むときに 2 つの境界が $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ と $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ に異なるように埋め込む。埋め込んだ像を種数 2 のハンドル体タングルという。3 次元空間に埋め込まれた 2 つのハンドル体タングルが同型（アンビエント・イソトピック）であるかを判定することは重要な問題である。ハンドル体タングルの不変量とは、ハンドル体タングル全体の集合にある値またはローラン多項式を対応させる写像であって、同値なハンドル体タングルに対しては同じ値またはローラン多項式をとるものをいう。

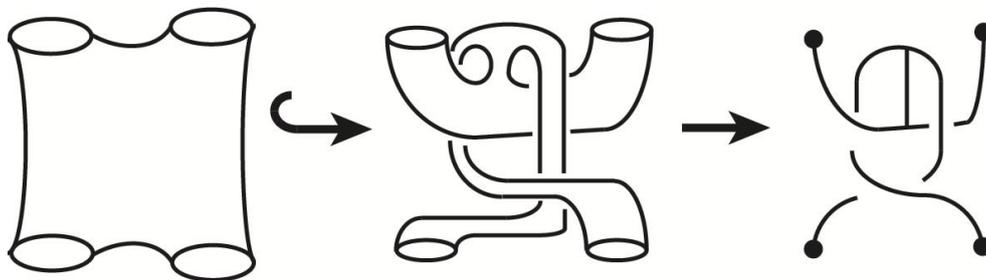


図 1: ハンドル体タングルとその図式の例

次の定理を得た。

定理 1.1. θ -グラフで非自明な空間グラフであり、自明なハンドル体結び目となるもので、非自明なハンドル体タングルの組を持つものが無限に

存在する.

本論文では空間グラフは θ -曲線を \mathbb{R}^3 に埋め込んだ像で樹下の θ -グラフを扱う. θ -グラフはハンドル体結び目とみなすと自明なハンドル体結び目である. 空間グラフに対して, 山田多項式 [11] は大変強い不変量である. これにより, 樹下の θ -グラフは非自明な空間グラフであることが知られている. しかし, ハンドル体結び目とすると自明なハンドル体結び目となる. そこで, 樹下の θ -グラフから導かれる以下の 3つのハンドル体タングルの組を扱う. 全てのハンドル体タングルが自明なハンドル体タングルのとき θ -グラフは自明なハンドル体タングルの組を持つとする. 我々は樹下の θ -グラフを種数 2 のハンドル体タングルの組としては自明なハンドル体タングルではないことを示す.

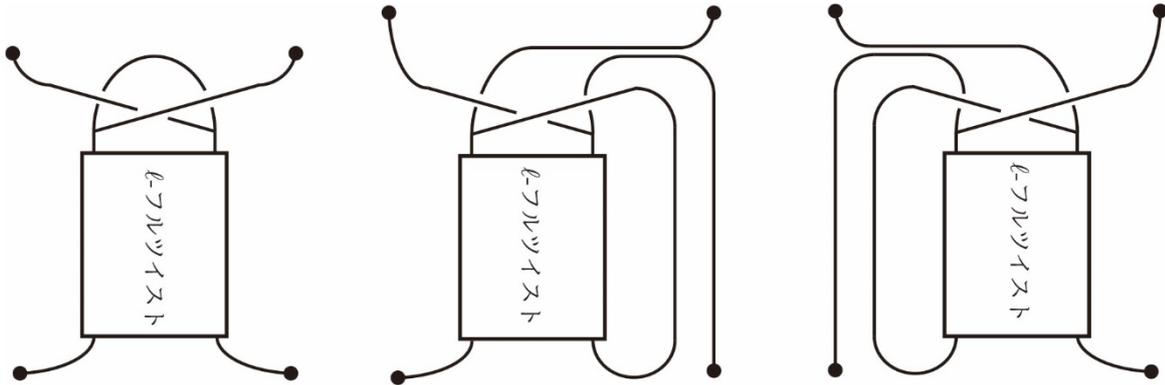


図 2 : 左から θ -グラフから得られるハンドル体タングル Γ_1 と Γ_2 と Γ_3

この 3つのハンドル体タングルは閉包が全て同じ空間グラフまたはハンドル体結び目となるため [3, 4, 5, 6, 7, 10, 12] では判別できない. 本定理では, この 3つのハンドル体タングルのうち Γ_1 は自明なハンドル体タングルで, Γ_2 と Γ_3 は非自明なハンドル体タングルであることを示す.

2. 山田多項式とイェーガー多項式

以下, 空間グラフ G とは θ -曲線を \mathbb{R}^3 に埋め込んだ像 (θ -グラフ) をいい, G の正則図を D とする. G の 3 成分の associated 絡み目を L とし, L の結び目成分を K_1, K_2, K_3 とし, これらの正則図を D_1, D_2, D_3 とする. また, G の辺を e_1, e_2, e_3 とし, $\mathcal{K}_1 = e_1 \cup e_2, \mathcal{K}_2 = e_2 \cup e_3, \mathcal{K}_3 = e_3 \cup e_1$ とし, これらの正則図を $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ とする. さらに, ω_{ij} を e_i と e_j の交差符号和 ($i \neq j$), ω_{ii} を e_i 自身の交差符号和,

$$\omega_i = -\omega_{ii} + \frac{\omega_{ij} + \omega_{ik} - \omega_{jk}}{2}, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$$

とし,

$$\omega(D) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

とする.

定理 2.1. 2つの空間グラフ G_1 と G_2 が同型 (アンビエント・イソトピック) である必要十分条件は正則図 D_1 と D_2 が向きを保つ平面の同相写像とライデマイスター移動 $R1, R2, R3$,

R4, R5を有限回使って互いに移りあうことである。

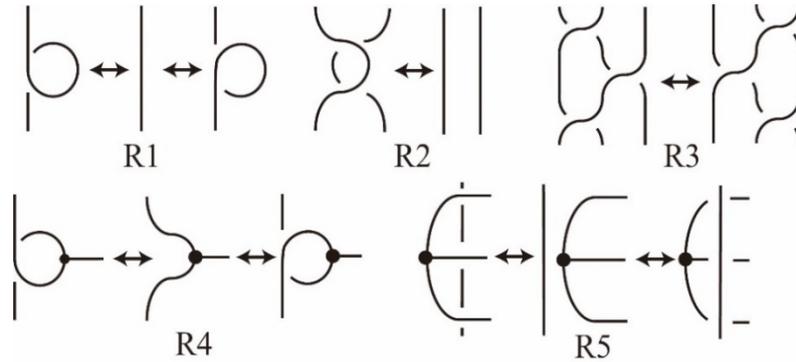


図 3 : ライデマイスター移動 R1, R2, R3, R4, R5

2. 1. 山田多項式

空間グラフの図式に対して、ライデマイスター移動 R1~R5 で不変である山田多項式を定義する。この不変量は $(-A)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) をかけることを除いて空間グラフの不変量となる。

山田多項式は空間に埋め込む前の有限グラフ G に対し 2 変数多項式から定義される。

定義 2.2 ([11]). $\beta_i(G)$ をグラフ $G = \{V, E, \phi\}$ の i 次元ベッチ数とする。 G に対して、 x, y を不定元とする多項式を $f(G) = x^{\beta_0(G)} y^{\beta_1(G)}$ として、

$$h(G) := \sum_{F \subset E} (-1)^{|F|} f(G - F)$$

と定める。ただし、 F は辺集号 E の部分集合で $G - F$ は $F = \phi, F = E$ の場合も含む。また、 $|F|$ は集合 F の元の個数を表す。

定義 2.3 ([11]). 空間グラフ G の図式を D とする。 D の交差点を図 4 のように正スピン S_+ 、負スピン S_- 、0 スピン S_0 に置き換えて得られる平面グラフを状態といい、全ての状態の集合を $S(D)$ とする。このとき、 D の交差点が n 個のとき、 3^n 個の状態が得られる。状態 $S \in S(D)$ に含まれる正スピン、負スピンの個数をそれぞれ p, q として、 $\{D|S\} = A^{p-q}$ とする。このとき、

$$R(D; A) = \sum_{S \in S(D)} \{D|S\} h(S) (-1, -(A + 2 + A^{-1}))$$

を不定元 A とするローラン多項式 $R(D; A)$ を図式 D の山田多項式という。

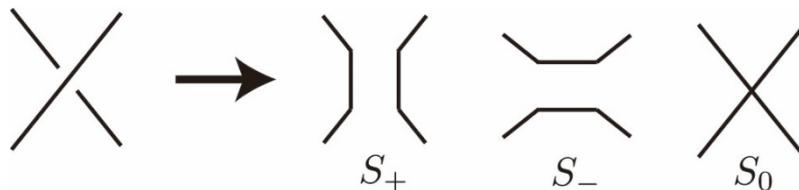


図 4 : 3 つのスピン

実際にこの定義に従って、山田多項式を計算することは難しい。山田多項式には以下の補題の関係式が成り立つことが知られている。

補題 2.4 ([11]). 空間グラフ G の図式 D のある 1 つの交差点の近くで図 5 のようになっている、それ以外のところではまったく同じになっている 4 つの空間グラフの図式を表している。 $R(D:A) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ は以下の性質がある：

$$\begin{aligned}
 1. \quad & R\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = AR\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) R\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) + A^{-1}R\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right). \\
 2. \quad & R\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) R\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) + R\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right). \\
 3. \quad & R\left(\bigcirc\right) = A + 1 + A^{-1}.
 \end{aligned}$$

4. 図式が非交和 $D_1 \sqcup D_2$ になっているとき $R(D_1 \sqcup D_2) = R(D_1)R(D_2)$.
5. 連結和 $D_1 \# D_2$ になっているとき $R(D_1 \# D_2) = (A + 1 + A^{-1})^{-1}R(D_1)R(D_2)$.
6. 図式が 1 点共有和 $D_1 \vee D_2$ になっているとき $R(D_1 \vee D_2) = -R(D_1)R(D_2)$.

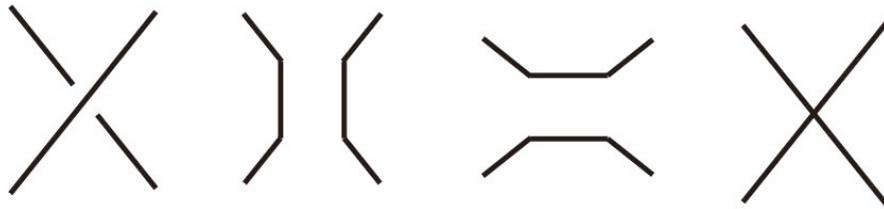


図 5 : 4 つの空間グラフの図式

ここで、1. の式を変形すると次の関係式が得られる。

$$R\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) - R\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = (A - A^{-1})\left(R\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) R\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - R\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right)\right).$$

これはドゥブロブニク多項式である。よって、頂点がない絡み目の図式のときはドゥブロブニク多項式を計算すればよい。

次に空間グラフに対して、「 $(-A)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) をかけること」をなくすために以下のように山田多項式を補正する。

補題 2.5 ([11]). 以下の式は空間グラフ G から一意に定まる不変量である.

$$Y(D; A) := (-A)^{2\omega(D)} R(D; A) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}].$$

2. 2. イェーガー多項式

次に山田多項式と空間グラフと相性がよい, イェーガー多項式を定義する. 空間グラフの山田多項式はイェーガー多項式で表せる. まず, 空間グラフ G のバー図式 D_B を定義する.

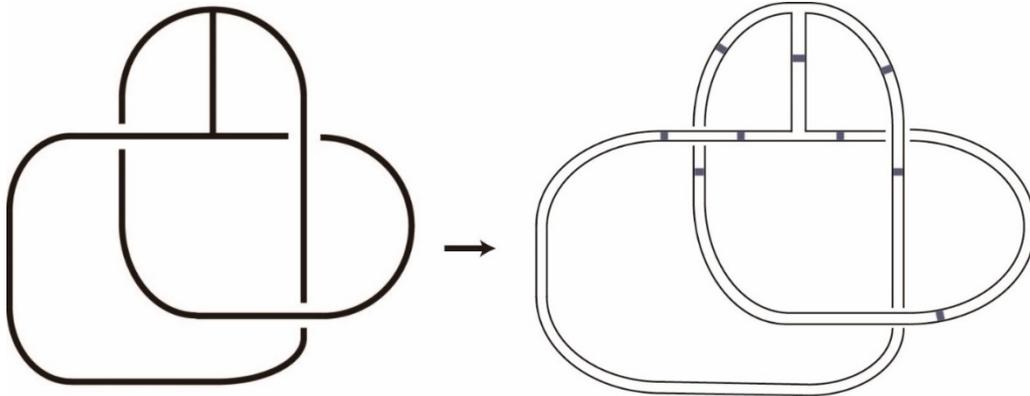
定義 2.6. 図6のように空間グラフから絡み目の図式をつくる. また, 交点と頂点を除いた辺にバーを付ける. これを空間グラフのバー図式 D_B という.



図6: 空間グラフの図式から得られる絡み目の図式

例 2.7. 空間グラフの図式からバー図式を定める例. バーを付ける位置に注意する.

図7: 空間グラフの図式から得られるバー図式



定義 2.8. イェーガー多項式はバー図式 D_B に対して, バーに関する次の漸化式で定義される 2 変数ローラン多項式である. ここで, D はバーがない図式を表し, $\Lambda(a, z)$ はドゥブロブニク多項式を表す.

$$1. \quad J\left(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}\right) = \frac{1}{t+t^{-1}} \left(J\left(\begin{array}{|c|} \hline \diagup \diagdown \\ \hline \end{array}\right) + t^{-1} J\left(\begin{array}{|c|} \hline \diagdown \diagup \\ \hline \end{array}\right) + \frac{t-t^{-1}}{1-at} J\left(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}\right) \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}\right) \right).$$

$$2. \quad J(D) = \Lambda(a, z = t - t^{-1})$$

山田多項式とイェーガー多項式の関係は以下の定理が成り立つことが知られている。

定理 2.9 ([2]). 空間グラフ G の図式を D とするとき,

$$R(D; A^4) = -(A^2 + A^{-2})^{|E(G)| - |V(G)| + 1} \mathcal{J}(D_B)(a = -A^3, t = A).$$

ここで, $|E(G)|$ は G の辺の数, $|V(G)|$ は G の頂点の数を表す. さらに, θ -グラフに対して, 補正したイェーガー多項式は以下のように計算できる.

定理 2.10 ([2]). 空間グラフ G の図式を D , バー図式を D_B とする. $V(L)_{t^{1/2}=A^{-2}}$ を associated 絡み目 L のジョーンズ多項式とする. このとき, 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}(D_B) &= (-A^4)^{2\omega(D)} \mathcal{J}(D_B) \\ &= \left(\frac{1}{A^2 + A^{-2}} \sum_{i=1}^3 A^{-8\omega(D_i)} \mathcal{J}(D_i) - \frac{1}{(A^2 + A^{-2})^2} + V(L) \right). \end{aligned}$$

この定理により \mathcal{D}_i がすべて自明な結び目な場合の山田多項式は空間グラフ G の associated 絡み目 L のジョーンズ多項式の値によって定まる.

例 2.11. 以下の図 8 の樹下の θ -グラフの associated 絡み目 L の補正した山田多項式は

$$(-A)^3(-A^{-5} - 2A^{-4} - 3A^{-3} - 3A^{-2} + 2 + 3A - A^4 - A^5 - A^6 + A^8)$$

であり, 空間グラフとしては非自明な θ -グラフである.

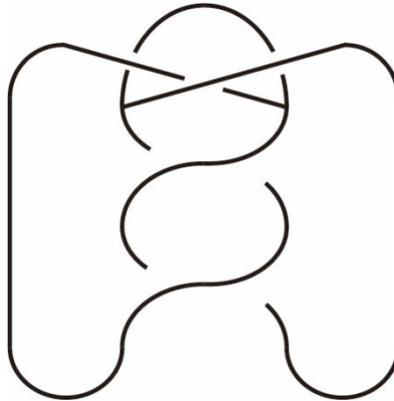


図 8 : 樹下の θ -グラフ

3. 種数 2 のハンドル体タングルの量子不変量

[1]により, 種数 2 のハンドル体タングル Γ の量子不変量が以下で定義されている. ハンドル体タングルの閉包は空間グラフ G なので associated 絡み目 $L = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ が存在する. この絡み目のうち $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ のなかにある辺に $2n$ または $2n + 1$ のハーフツイストがある 2 成分の絡み目を $(K_1 \cup K_2)_n$ とする. ここで, n は $K_1 \cup K_2$ の K_1 と K_2 の共通の辺に表われる $2n$ または $2n + 1$ のハーフツイストである. また, 量子整数

を $[m] = (q^{m/2} - q^{-m/2}) / (q^{1/2} - q^{-1/2})$ と定める.

定理 3.1. 2つのハンドル体タングル Γ_1 と Γ_2 が同型(アンビエント・イソトピック)である必要十分条件は正則図 D_1 と D_2 が向きを保つ平面の同相写像とライデマイスター移動 RI, RII, RIII, RIV, RV, RVI を有限回使って互いに移りあうことである.

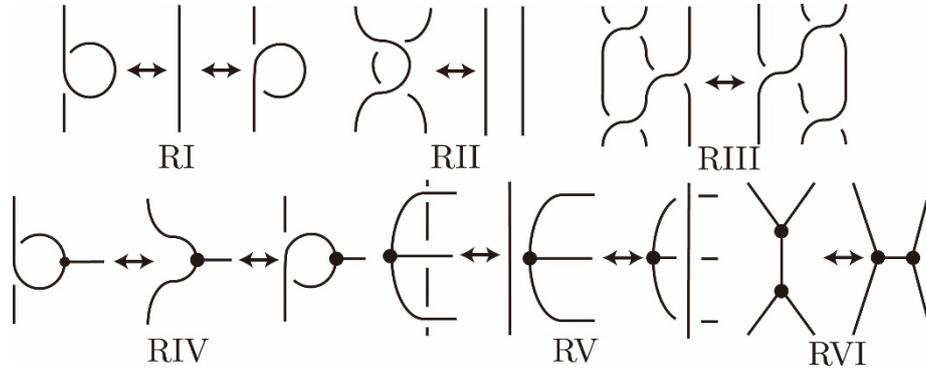


図9 : ライデマイスター移動RI, RII, RIII, RIV, RV, RVI

定理 3.2 ([1]). $(K_1 \cup K_2)_n$ の図式を $(D_1 \cup D_2)_n$, $(D_1 \cup D_2)_n$ の全ての交点の上下を入れかえた図式を $\overline{(D_1 \cup D_2)_n}$, $Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}, V_{n_2}}((D_1 \cup D_2)_n)$ を絡み目 $(K_1 \cup K_2)_n$ の量子 $(\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}, V_{n_2})$ 不変量, p を3以上の整数, $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)$ とし,

$$c_{\pm} := \sum_{1 \leq m \leq p-1} [n] Q^{\mathfrak{sl}_2, V_m}(U_{\pm}) = \frac{\mp 2\zeta^{\mp 3/4}}{\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \zeta^{\pm m^2/4}$$

$$c = (c_+ \cdot c_-)$$

とするとき,

$$\varphi_p^{\mathfrak{sl}_2}(\Gamma) := c^{-1} \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq p-1} Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}, V_{n_2}}((D_1 \cup D_2)_n) Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}, V_{n_2}}(\overline{(D_1 \cup D_2)_n}) |_{q=\zeta}$$

はハンドル体タングル Γ の不変量である.

本定理の重要なことは $\varphi_p^{\mathfrak{sl}_2}(\Gamma)$ の値が n の値によらないことである. さらに, この定理は K_1 または K_2 が自明な結び目であるときに簡単に計算できるように以下の定理が知られている.

定理 3.3 ([1]). 定理 3.2. と同じ記号のもとで, K_2 が自明な結び目とすると,

$$\begin{aligned} & c^{-1} \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq p-1} Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}, V_{n_2}}((D_1 \cup D_2)_n) Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}, V_{n_2}}(\overline{(D_1 \cup D_2)_n}) |_{q=\zeta} \\ &= c^{-1} \sum_{1 \leq n_1 \leq p-1} Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}}(D_1) Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}}(\overline{D_1}) |_{q=\zeta}. \end{aligned}$$

証明. $\Delta_m = (-1)^m [m + 1]$, $\theta(i, j, k) = \frac{\Delta_{x+y+z}! \Delta_{x-1}! \Delta_{y-1}! \Delta_{z-1}!}{\Delta_{y+z+1}! \Delta_{x+z-1}! \Delta_{x+y-1}!}$, $x = (j + k - i)/2$, $y = (i +$

$k - j)/2$, $z = (i + j - k)/2$ としてすべての $\theta(i, j, k)$ は以下の不等式を満たす:

$$i \leq j + k, j \leq i + k, k \leq i + j, i + j + k \in 2\mathbb{Z}, i + j + k \leq 2(p - 1).$$

以下の等式変形で $\theta(i, j, k)$ は上記の和をとっている:

$$\begin{aligned} & c^{-1} \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq p-1} Q^{s l_2, V_{n_1}, V_{n_2}} ((D_1 \cup D_2)_n) Q^{s l_2, V_{n_1}, V_{n_2}} (\overline{(D_1 \cup D_2)_n}) |_{q=\zeta} \\ &= c^{-1} \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq p-1} Q^{s l_2, V_{n_1}, V_{n_2}} \left(\begin{array}{c} \overbrace{\left| \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right|}^m \\ \hline \left| \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right| \end{array} \right) Q^{s l_2, V_{n_1}, V_{n_2}} \left(\begin{array}{c} \overbrace{\left| \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right|}^m \\ \hline \left| \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right| \end{array} \right) |_{q=\zeta} \\ &= c^{-1} \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq p-1} [n_2] Q^{s l_2, V_{n_1}, V_{n_2}} \left(\begin{array}{c} \overbrace{\left| \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right|}^m \quad \overbrace{\left| \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right|}^m \\ \hline \left| \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right| \end{array} \right) |_{q=\zeta} \quad (1) \\ &= c^{-2} \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq p-1} \sum_{x_1, \dots, x_l} \frac{\Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_{m-1}} \Delta_{x_m} \cdots \Delta_{x_l}}{\theta(n_1, n_1, x_1) \cdots \theta(x_{m-2}, n_1, x_{m-1}) \theta(x_{m-1}, n_1, x_m) \cdots \theta(x_l, n_1, n_1)} \\ &\times [n_2]^2 Q^{s l_2, V_{n_1}, V_{n_2}} \left(\begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right]}^m \quad \overbrace{\left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right]}^m \\ \hline \left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right] \end{array} \right) |_{q=\zeta} \quad (2) \\ &= c^{-2} \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq p-1} \sum_{x_1, \dots, x_l} \frac{\Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_{m-1}} \Delta_{x_m} \cdots \Delta_{x_l}}{\theta(n_1, n_1, x_1) \cdots \theta(x_{m-2}, n_1, x_{m-1}) \theta(x_{m-1}, n_1, x_m) \cdots \theta(x_l, n_1, n_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times [n_2] Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}, V_{n_2}} \left(\begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad\quad}^m \quad \quad \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^m \\ \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bullet \bullet \bullet \\ | \\ x_1 \quad \quad \quad x_{m-1} \quad \quad \quad x_m \quad x_{m+1} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bullet \bullet \bullet \\ | \\ x_1 \quad \quad \quad x_{m-1} \quad \quad \quad x_m \quad x_{m+1} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \end{array} \right) \Big|_{q=\zeta} \\ & = c^{-1} \sum_{1 \leq n_1 \leq p-1} \sum_{x_1, \dots, x_l} \frac{\Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_{m-1}}^2 \Delta_{x_m} \cdots \Delta_{x_l}}{\theta(n_1, n_1, x_1) \cdots \theta(x_{m-2}, n_1, x_{m-1}) \theta(x_{m-1}, n_1, x_m) \cdots \theta(x_l, n_1, n_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}} \left(\begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad\quad}^m \quad \quad \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^m \\ \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bullet \bullet \bullet \\ | \\ x_1 \quad \quad \quad \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bullet \bullet \bullet \\ | \\ x_1 \quad \quad \quad \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \end{array} \right) \Big|_{q=\zeta} \quad (3) \\ & = c^{-1} \sum_{1 \leq n_1 \leq p-1} \sum_{x_1, \dots, x_l} \frac{\Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_{m-1}} \Delta_{x_m} \cdots \Delta_{x_l}}{\theta(n_1, n_1, x_1) \cdots \theta(x_{m-2}, n_1, x_{m-1}) \theta(x_m, n_1, x_{m+1}) \cdots \theta(x_l, n_1, n_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}} \left(\begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad\quad}^m \quad \quad \quad \overbrace{\quad\quad\quad}^m \\ \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bullet \bullet \bullet \\ | \\ x_1 \quad \quad \quad \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bullet \bullet \bullet \\ | \\ x_1 \quad \quad \quad \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \end{array} \right) \Big|_{q=\zeta} \quad (4) \\ & = c^{-1} \sum_{1 \leq n_1 \leq p-1} Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}}(D_1) Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}}(\overline{D_1}) \Big|_{q=\zeta}. \end{aligned}$$

$\langle \rangle$ を通常のカウフマンブラケットとすると、式(1)と式(3)は以下の式から成立する：

$$\sum_{0 \leq j \leq p-2} \Delta_i \Delta_j \left\langle \begin{array}{c} i \quad i \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ j \\ \text{---} \\ \text{---} \\ i \end{array} \right\rangle = c \cdot \left\langle \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ \text{---} \\ i \end{array} \right\rangle$$

図式を連結するときはこの式を使用する。式(2)は以下の式から成立する [10]：

$$\left\langle \begin{array}{c} i_1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ i_k \end{array} \right\rangle = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_l} \frac{\Delta_{x_1} \Delta_{x_2} \cdots \Delta_{x_l}}{\theta(i_1, i_2, x_1) \cdots \theta(x_l, i_{k-1}, i_k)} \left\langle \begin{array}{c} i_1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ i_k \end{array} \right\rangle$$

式(4)は $\theta(i, j, k) = \theta(j, k, i) = \theta(k, i, j) = \theta(j, i, k) = \theta(i, k, j) = \theta(k, j, i)$ と以下の式から成立する [8]：

$$\left\langle \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ j \end{array} \right\rangle = \sum_k \frac{\Delta_k}{\theta(i, j, k)} \left\langle \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ k \\ \text{---} \\ j \end{array} \right\rangle$$

最後の式は式(4)のすべての3価頂点に上記の式を適用すれば求められる。 □

上記の定理で重要なのは2成分絡み目 L の量子 $(\mathfrak{sl}_2, V_{n_1}, V_{n_2})$ 不変量は2成分の絡み目の各成分にジョーンズ-ウェンツェル冪等元を代入したカウフマンブラケットと以下の関係があることである：

$$Q^{\mathfrak{sl}_2, V_{n_1+1}, V_{n_2+1}}(L) = (-1)^{n_1+n_2} \langle L^{[n_1, n_2]} \rangle.$$

例 3.4. 2成分の絡み目の各成分にジョーンズ-ウェンツェル冪等元を代入するとは以下のような操作のことである。

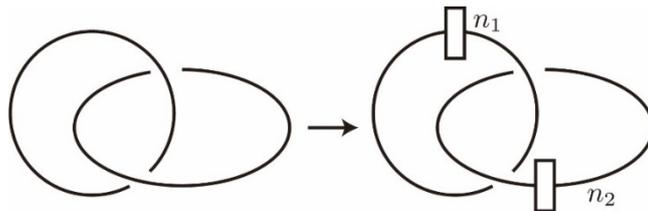


図10：絡み目図式にジョーンズ-ウェンツェル冪等元を代入する例

4. 主結果

空間グラフ G から得られるハンドル体タングルの組を定義する. 樹下の θ -グラフを G とすると G の辺を2つ選びカットしてタングルにすることができる. このタングルは G から3つできる. これを G から得られるハンドル体タングルの組 $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ という. $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ がすべて自明なハンドル体タングルとなるとき, $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ は自明なハンドル体タングルの組という.

定理 4.1. θ -グラフ G で非自明な空間グラフであり, 自明なハンドル体結び目であるもので, $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ が非自明なハンドル体タングルの組となるものが存在する.

証明. 例2.11より以下の θ -グラフは非自明な空間グラフである.

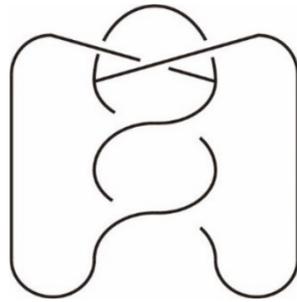


図11 : 樹下の θ -グラフ

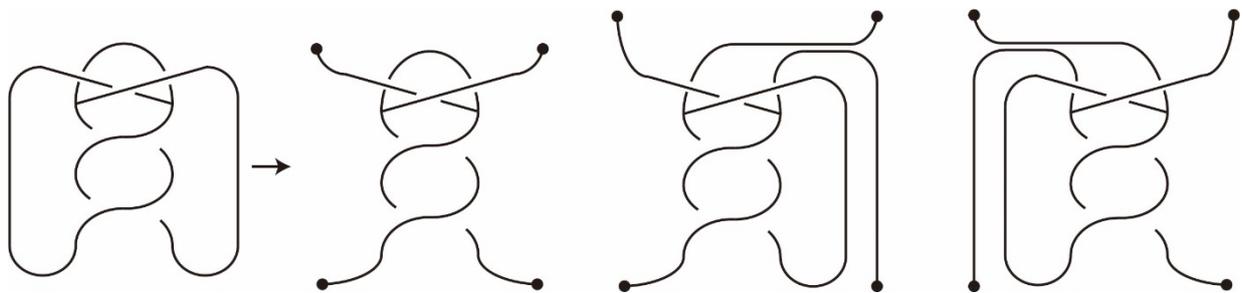


図12 : 樹下の θ -グラフから得られるハンドル体タングルの組 $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$

以下の変形によりハンドル体結び目では自明なハンドル体結び目である :

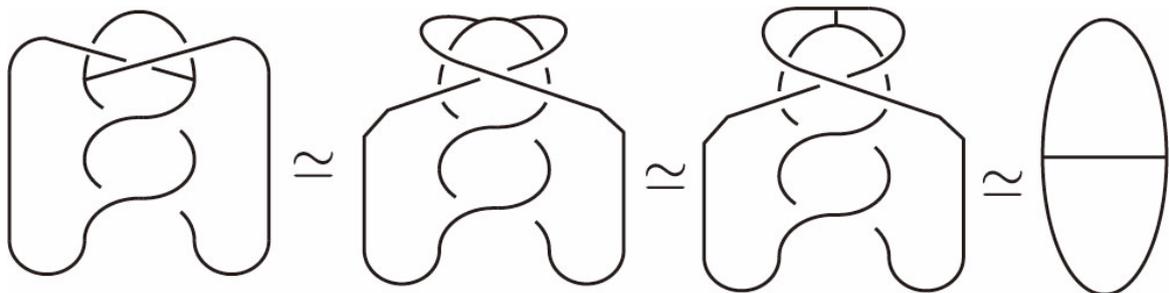


図13 : 樹下の θ -グラフは自明なハンドル体結び目となる

同様の変形により Γ_1 は自明なハンドル体タングルである。しかし,

$$\varphi_5^{sl_2}(\Gamma_2) = \varphi_5^{sl_2}(\Gamma_3) = \frac{3}{10} \left(-7 - \sqrt{5} - \sqrt{-1} \left(\sqrt{\frac{85}{2} + \frac{31\sqrt{5}}{2}} \right) \right)$$

である。従って, $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ は非自明なハンドル体タングルの組である。 □

定理4.2. 定理1.1. は正しい。

証明. 以下の θ -グラフを考えれば良い。 $\ell = 1$ のときは定理4.1. で示されているので, $\ell \geq 2$ の場合を示す。

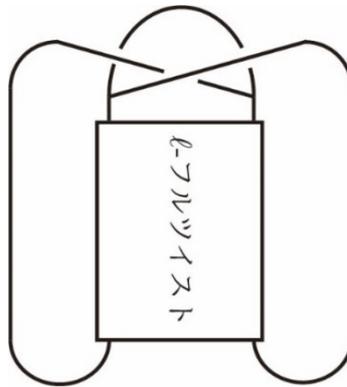


図14: 白い箱には 2ℓ 個の交点がある。

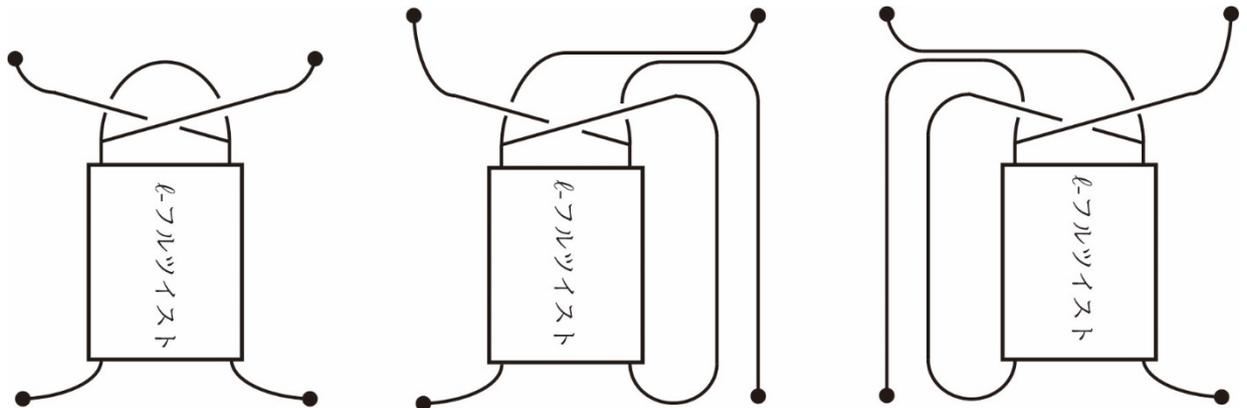


図15: 樹下の θ -グラフから得られるハンドル体タングルの組 $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$

山田多項式の定義から以下の式(5)が成り立つ:

$$R \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = (A^2 + A^{-2} + A^{-4}) R \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) + (-1 - A^{-2} + A^{-6}) R \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) + A^{-4} R \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right). \quad (5)$$

この式より $\ell = 2$ のとき補正した山田多項式は以下の式になり非自明な空間グラフで

ある.

$$(-A)^3(-1 - A^{-9} - 3A^{-8} - 5A^{-7} - 8A^{-6} - 5A^{-5} - 3A^{-4} + 2A^{-3} + 2A^{-2} + 2A^{-1} + A^2 + 2A^3 - A^7 - A^8 + A^{10}).$$

$\ell = 3$ のとき補正した山田多項式は以下の式になり非自明な空間グラフである.

$$(-A)^5(-A^{-13} - 3A^{-12} - 7A^{-11} - 13A^{-10} - 13A^{-9} - 14A^{-8} - 3A^{-7} - A^{-6} + 5A^{-5} - 4A^{-4} - A^{-3} - 4A^{-2} + A + A^2 + 2A^4 + 2A^5 - A^9 - A^{10} + A^{12}).$$

$\ell = 4$ のとき補正した山田多項式は以下の式になり非自明な空間グラフである.

$$(-A)^7(-A^{-17} - 3A^{-16} - 9A^{-15} - 19A^{-14} - 25A^{-13} - 35A^{-12} - 23A^{-11} - 24A^{-10} - 8A^{-9} - 23A^{-8} - 10A^{-7} - 21A^{-6} + 3A^{-5} + 3A^{-4} + 11A^{-3} - 6A^{-2} - 2A^{-1} + 2A - A^2 + A^3 + 3A^4 - 2A^5 + 2A^7 + 2A^8 - A^{11} - A^{12} + A^{14}).$$

以下, $\ell \geq 5$ の場合を考える. ℓ -フルツイストした図14の空間グラフの山田多項式に $A = \sqrt{-1}$ を代入した値を $a_{2\ell}$ とする. 自明な空間グラフならば $a_{2\ell} = 0$ である. 式(5)から以下の漸化式が成り立つ:

$$a_{2\ell} = -a_{2\ell-2} - a_{2\ell-4} + a_{2\ell-6}.$$

$a_{2\ell} = 0$ と仮定すると, $a_{2\ell-2} + a_{2\ell-4} = a_{2\ell-6}$ が成り立つ. さらにこの漸化式を計算して $a_{2\ell}$ の値を求める.

$$a_{2\ell-2} + a_{2\ell-4} = -a_{2\ell-4} - a_{2\ell-6} + a_{2\ell-8} + a_{2\ell-4}$$

$$a_{2\ell-6} = -a_{2\ell-6} - a_{2\ell-8}$$

$$a_{2\ell-6} = \frac{1}{2} a_{2\ell-8}$$

$$a_{2\ell} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1} \neq 0$$

よって, 任意の $\ell \geq 5$ に対して, $a_{2\ell} \neq 0$ なので任意の $\ell \geq 2$ に対して図14の空間グラフは非自明な空間グラフである. 次に定理4. 1. の図 13 と同様の变形で自明なハンドル体結び目となる. 同様の变形で Γ_1 は自明なハンドル体タングルとなる.

Γ_2 と Γ_3 は $(D_1 \cup D_2)_n$ と $\overline{(D_1 \cup D_2)_n}$ を適切に連結してカービー移動のハンドルスライドとフェンルーク移動と定理3. 3. を使うと, $(K_1 \cup K_2)_n$ は成分が1つ減り, $(2\ell, 2)$ -トラス結び目となる. c を $(2\ell, 2)$ -トラス結び目のアレクサンダー多項式 $\Delta(t)$ の零点の1つとすると

$$\text{f-lim} \varphi_p^{\text{sl}_2}(\Gamma_2) = \text{f-lim} \varphi_p^{\text{sl}_2}(\Gamma_3) = \frac{(1 - c^{-1})^4}{16\Delta'(c)}.$$

従って, $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ は非自明なハンドル体タングルの組である. □

参考文献

1. S. Abe, New quantum invariants of theta-curve with base points, *Topology and its Applications* 301 (2021) 107489
2. Y. Huh, Yamada polynomial and associated link of θ -curves, arXiv:2206.11450
3. A. Ishii, A multiple conjugation quandle and handlebody-knots, *Topology Appl.*, 196 (2015), 492–500.
4. A. Ishii and M. Iwakiri, Quandle cocycle invariants for spatial graphs and knotted handlebodies,

- Canad. J. Math., 64 (2012), 102–122.
5. A. Ishii, M. Iwakiri, Y. Jang and . Oshiro, A -family of quandles and handlebody-knots, Illinois J. Math., 57 (2013), 817–838.
 6. A. Ishii and . Kishimoto, The quandle coloring invariant of a reducible handlebody-knot, Tsukuba J. Math., 35 (2011), 131–141.
 7. A. Ishii and . Kishimoto, A finite type invariant of order at most 4 for genus 2 handlebody-knots is a constant map, Topology Appl., 159 (2012), 1115–1121.
 8. Kauffman, L.H., Lins, S. L. Temperley-Libe recoupling theory and invariants of 3-manifolds, Annals of Math. Studies 134, Princeton Univ. Press, 1994.
 9. W.B.Raymond Lickorish, An Introduction Knot Theory Graduate Texts in Math. 175, Springer-Verlag, (1997).
 10. A.Mizusawa, J. Murakami, Invariants of handelbody-knots via Yokota’s invariants, J. Knot Theory Ramifications, 22 (2013),1350068.
 11. S. Yamada, An invariants of graphs, J. Graph Theory 13 (1989), no.5, 537–551.
 12. Y.Yokota, Topological invariants of graphs in 3-space, Topology 35 (1996), 77–87.

(阿部 翠空星 信州大学 総合人間科学系 全学教育機構 特任講師)
2023年2月3日受理 2023年2月26日採録決定