教職研究　第15号（2024）　pp. 1-14

【原　　著】

令和５年度信州大学工学部入試における数学の現状と課題

大野　博道（信州大学　学術研究院工学系）
福田　一貴（信州大学　学術研究院工学系）

1. はじめに

本稿では，信州大学工学部の入試における数学科目に関する試験結果の分析を行う．受験者の答案を詳細に分析することで，高校生を中心とする受験者が入試問題に関する内容をどの程度理解しているのかを考察する．特に，正答を導いた答案と誤答との分岐はどこで多く見受けられるか，受験者が陥りやすい誤答例は何なのか，誤答に至る原因はどこにあるかなどを調べることで，受験者が入試問題を解く上で不足していると考えられる数学の素養を明らかにしたい．教育の現場で実際に受験指導をする教員の多くは，日常の指導や模擬試験の結果等を通して学生の実力を把握していると思われるが，入試という特別な状況下における学生の実態を直接目にする機会は，表面的な合否や点数を除けば非常に少ないのではないだろうか．本研究の内容が，工学部における大学入試の現状と課題を伝えるものとなり，そうした現場の教員や大学の工学部で数学科目を指導する教員の目に留まり，大学入試に留まらない幅広い数学指導のための参考資料となることで，今後の高校および大学教育の発展に寄与することを期待している．

まず，今回の分析対象となる入試の基本情報と，前提となる注意事項について幾つか説明をしておく．今回は，令和５年に行われた，信州大学工学部における前期入試の数学科目に対する結果について調べている．令和５年度入試では，前期入試の数学科目の問題は全部で７問であり，その中から志望学部学科ごとに解く問題が指定されている．工学部では全学科が，数学Ⅰ･Ⅱ･Ⅲ･Ａ･Ｂの全てを出題範囲とする大問３～大問６の全４問，試験時間は２時間であったので，１問あたりにかけられる時間はおよそ30分である．さらに，受験者は入試という特別な状況下における緊張状態で解答していることにも注意が必要である．今回分析の対象としたのは，ある特定の学科の受験者100名程度で，４問全てに対して，各問題ごとに全数調査を行った．なお，問題については以下の分析の際に各節で記載しているが，入試時の注意事項等を含むオリジナルの問題冊子については，信州大学工学部のホームページから閲覧することができる．また，参考までに各問題に対する公式の出題意図も転載しているが，以下の本文における問題の解説は公式のものではなく，あくまで著者らの独自のものであることを断っておく．解答例も本文で紹介していくが，公式の模範解答ではないということと，細かい計算等は省略している場合があることに注意する．

2. 大問 3：対数関数を含む方程式に関する問題

本節では，前期入試の**大問 3** について分析する．前期入試の大問 3 は以下の通りである．

問題

方程式

$$\log_a(x-3) = \log_a(x+2) + \log_a(x-1) + 1$$

が解をもつとき，定数 a のとり得る値の範囲を求めよ．

出題意図：対数関数を含む方程式の解法の習熟度を確認する．

この問題では，はじめに与式を対数方程式から二次方程式に変形して解くことが鍵となる．そのためには，上式が対数方程式であることから，まず真数条件と底の条件より，

$$x > 3 \quad \text{かつ} \quad a > 0,\ \ a \neq 1$$

の範囲に注意して考えなければならないことに注意する．これは，解をもつための範囲を特定する際に本質的に関係してくる重要なことであるが，このことに正確に言及できている答案は少なかった．より正確には，真数条件については多くの受験者が理解できていたが，底の条件をきちんと理解していると判断できる答案は非常に少なかった．実際，全答案の内で真数条件と底の条件を正確に記載できている答案は 13%，真数条件のみが正しいものが 47%，底の条件のみ正しいものが 7%，それ以外の 33% は何も言及がないか不正確または中途半端な記載のものであった．なお，底の条件を不正確に答えたものの中では，$a > 0$ のみを記載し，$a \neq 1$ を見落としているものも少なくなく，そのような答案は全体の 34% を占めている．真数や底については難しい概念ではなく，対数の意味・定義を考えれば自然に分かることであると思われる．実際，学習指導要領 (第 2–2–(3)–イ–(ア)) においても「対数の意味とその基本的な性質について理解し，簡単な対数の計算をすること」と記載があり，対数の意味への理解が重要視されている．機械的な式変形で難しい問題を解くことばかりに目を向けるのではなく，概念や定義を理解させるような指導も大切であると言える．

次に，詳細な答案の分析に移る．この問題を解くためには，まず真数条件と底の条件の下で，与式を以下の同値な方程式に変形することが必要となる．

$$ax^2 + (a-1)x + 3 - 2a = 0 \quad \text{または} \quad \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = a.$$

この変形までは多くの受験者 (全体の約 90%) がたどり着いていた．ここから先の解答としては，見当違いなものを除いて，以下の 2 通りの方針に分かれた．

方針 (1)：$f(x) = ax^2 + (a-1)x + 3 - 2a$ とおき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点を調べる問題に帰着させ，二次関数の知識を利用して解く．

方針 (2)：$f(x)=\dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}$ とおき，$y=f(x)$ のグラフと $y=a$ との共有点を調べる問題に帰着させる．$y=f(x)$ のグラフの概形を描くのには微分法の知識を利用する．

答案の中で最も多かったのは (1) の方針で解くもので，誤答も含めれば全体の 48%を占めていた．なお，この方法での正答例は以下の通りである．

方針 (1) での解答例． 二次関数 $f(x)=ax^2+(a-1)x+3-2a$ の判別式を D とおくと，

$$D=(a-1)^2-4a(3-2a)=9a^2-14a+1.$$

$y=f(x)$ のグラフと x 軸が共有点をもつには $D \geqq 0$ であればよいので，これを解くと，

$$a \leqq \frac{7-2\sqrt{10}}{9}, \quad \frac{7+2\sqrt{10}}{9} \leqq a.$$

また，$f(3)=9a+3(a-1)+3-2a=10a>0$ より，$y=f(x)$ のグラフが $x>3$ の範囲で x 軸と共有点をもつためには，グラフの軸が $x=3$ より右側になければならない．従って，

$$-\frac{a-1}{2a}>3 \quad \Leftrightarrow \quad a<\frac{1}{7}.$$

これと底の条件 $a>0$ かつ $a \neq 1$ を考慮すれば，$0<\dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}<\dfrac{1}{7}<1$ より，求める a の範囲は次で与えられる．

$$0<a \leqq \frac{7-2\sqrt{10}}{9}. \qquad \square$$

この方法で解答したものの内，完全な正答にたどり着いたのはたったの 2%であった．最も多かった誤答は概ね以下の二つのようなもので，計算ミスや底の条件の誤認などによる若干の数字違いなど全ても含めれば，合わせて答案全体の 43%を占める．

誤答例 1． 二次関数 $y=ax^2+(a-1)x+3-2a$ のグラフと x 軸が共有点をもつには $D \geqq 0$ であればよいので，これを解いて $a \leqq \dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}$, $\dfrac{7+2\sqrt{10}}{9} \leqq a$，としてしまうもの．

誤答例 2． (上記の判別式の話に続いて $\cdots$) また，底の条件から $a>0$ より，先程の範囲と合わせて，求める範囲は $0<a \leqq \dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}$, $\dfrac{7+2\sqrt{10}}{9} \leqq a$，とするもの．

なお，43%の内訳は誤答例 1 が 16%で，誤答例 2 が 27%である．その他の誤答では，真数条件 $x>3$ に着目して，軸の位置をきちんと考察する答案もあったが (およそ 3%)，逆にそれらは判別式を無視したものが多かった．大多数の誤答であった上の二つは，本質的には「判別式に当てはめて解いただけ」であった．このことと，先述した真数条件や底の条件に関する理解度などを踏まえると，受験者の多くが問題を「機械的に解いている」ことが窺える．真数条件 $x>3$ を正しく書けている答案の数に比べて，軸の位置を考察している答案が少ない理由には,「グラフと軸との共有点＝判別式」と「対数方程式＝真数や底の条件を確認」という操作を機械的に行なっていることから，両者が繋がらなかったことなどが考えられるのではないだろうか．なお，高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編 (以下，学習指導要領解説と示す) には「二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が二次関数 $y=ax^2+bx+c$

のグラフと x 軸との交点の x 座標でとらえられることを理解させる」との記載があり，実際の教科書の問題でもそれに関連するものは多く，今回の分析でもそれを理解できている受験者は多かったと言える．しかし，現行のカリキュラムでは，こうした「対数関数」と「二次関数」のような複合的な要素を含む問題は入試問題等にならないと登場しないように見える．結局は「慣れ」の問題なのであろうが，大学以降の数学の多様性を踏まえれば，多角的な視点で複数の要因に対処できる力を養うような指導も大切だと著者は考える．

次に，(2) の方針で解答した答案の分析に移ろう．この方針での答案は全体の 32%であった．なお，この方法での正答例は以下の通りである．

方針 (2) での解答例． $f(x) = \dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}$ $(x>3)$ とおき，その導関数を求めると，

$$f'(x) = \frac{x^2+x-2-(x-3)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = -\frac{x^2-6x-1}{(x^2+x-2)^2}.$$

$f'(x)=0$ とすると，$x>3$ の範囲では $x=3+\sqrt{10}$ となる．故に，この範囲で $f(x)$ の増減を調べれば，$f(x)$ は $x=3+\sqrt{10}$ で極大値 $f(3+\sqrt{10}) = \dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}$ を取ることが分かる．さらに，$\lim_{x\to 3} f(x) = 0$ かつ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ を踏まえれば，$x>3$ では $f(x)>0$ となることに注意する．従って，$y=f(x)$ のグラフと $y=a$ が共有点を持つためには，

$$0 < a \leqq \frac{7-2\sqrt{10}}{9}$$

となればよい．なお，底の条件の $a \neq 1$ にも注意する必要があるが，$\dfrac{7-2\sqrt{10}}{9} < 1$ であることから，上式がそのまま求める a の範囲となる．　□

こちらの方針では，関数を微分して増減表を書いてグラフの概形を描くという，標準的な流れでより機械的に解答できるためか，二次関数の問題として解いたものと比べてミスが少ないものが多かった．また，関数のグラフの概形が正しく描ければ，見かけ上は底の条件に触れなくても正答にたどり着けるため，最終的に正しい答えが記載されている答案も少なくなかった．実際，そのような答案は全体の 11%を占めていた．この他，計算ミスが無ければ正しく解答できたと思える答案が 8%ほどあった．一方で少数ではあるが，真数条件を無視したことや，$x\to 3$ や $x\to\infty$ での $f(x)$ の情報を調べていないことにより，範囲を間違えてしまう解答が 8%程度あった．例えば，次のようなものである．

誤答例 3． $f(x)$ が $x=3+\sqrt{10}$ で極大値 $f(3+\sqrt{10}) = \dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}$ を取り，$x=3-\sqrt{10}$ で極小値 $f(3-\sqrt{10}) = \dfrac{7+2\sqrt{10}}{9}$ を取るとして，求める範囲を次のようにしてしまうもの．

$$0 < a \leqq \frac{7-2\sqrt{10}}{9}, \quad \frac{7+2\sqrt{10}}{9} \leqq a.$$

誤答例 4． $f(x)$ が $x=3+\sqrt{10}$ で極大値 $f(3+\sqrt{10}) = \dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}$ を取る $\cdots$ までは正しいが，$x\to 3$ や $x\to\infty$ での情報を調べないまたは誤認し，$f(x)$ が $-\infty$ となっているとして，範囲は $a \leqq \dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}$ であるとしてしまうもの．

これらの誤答についてもやはり，関数を微分して増減表を書いてグラフの概形を描くという機械的な操作以外の，細かい条件などをケアできなかったことによるミスであると言える．結局，日頃の演習から流れ作業で問題に取り組むのでなく，細かい条件などを確認する癖がついているかどうかが，正答か否かをわけたと言えよう．

3. 大問4：余りによる整数の分類と素数に関する問題

本節では，前期入試の**大問4**について分析する．前期入試の大問4は以下の通りである．

問題

3つの自然数 p，$p+10$，$p+20$ がすべて素数となるような p がただ1つ存在することを示せ．

出題意図：余りによる整数の分類と素数に関する理解度を確認する．

この問題は整数の基本的な性質を問うものであり，学習指導要領解説にも記載の「二つの整数 a, b $(a>0)$ について，$b=aq+r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, a-1)$ という表現や割り算の余りによる分類を利用して整数の性質を考察させる」という点に，まさに準拠した問題だと言える (詳しい内容は下記を参照)．この問題に対して，最も多かった正答例は次の通りであり，このような方針の解答は全答案の内の24%であった．

解答例． $p=3m+1$ とすると，$p+20=3(m+7)$ となるため不適．$p=3m+2$ とすると，$p+10=3(m+4)$ となるため不適．$p=3m$ のとき，p が素数となるのは $m=1$ のみ．また，$p=3$ のときは $p+10=13$，$p+20=23$ で，3つとも素数となる．以上より，題意を満たす p は3のみである． □

他の正答として，(1) $p=10m+k$ としてから3で割って余りを考えるもの，(2) mod 3 を用いるもの，(3) $p=6m\pm1$ とおくもの，(4) 各位の和が3の倍数になるとその数自身も3の倍数になることを用いるもの，(5) 連続する3つの数に必ず3の倍数が含まれることを使うものなどがあった．

この問題は，

「任意の自然数 n に対し，n，$n+1$，$n+2$ のいずれかが3の倍数になる」

ことを知っているかどうか，また思いつけるかどうかによって難易度が大きく異なると思われる．実際に，p，$p+10$，$p+20$ の内の一つが3の倍数であることに気づいた受験者の内，正しい解答方法にたどり着けたものの割合は85%であった．このことから，誤答してしまった受験者の多くは「3の倍数」に気づかなかったと思われる．ちなみに，このような性質は，複数の教科書で扱われている基本的な内容である．なお，p，$p+10$，$p+20$ がすべて素数となる p は $p=3$ であるが，これには多くの受験者 (92%) がたどり着いていた．

一方で，最も多かった誤答は以下のようなもので，同様の解答がおよそ20%あった．

誤答例． 3つの自然数が素数のとき，pも素数であるので$p = 2, 3, 5, 7, 11, 13 \cdots$ である．$p = 2$のときは$p + 10 = 12$となり不適．$p = 3$のときは$p + 10 = 13$，$p + 20 = 23$となり適．$p = 5$のときは$p + 10 = 15$となり不適．以下同様にすると，$p \geqq 7$のときは，$p + 10$と$p + 20$のどちらかが素数ではないので不適．よって3つの自然数がすべて素数になるのは$p = 3$のみである．　□

この誤答例では，「$p + 10$と$p + 20$のどちらかが素数ではない」ことを証明できていないため，誤答となっている．「いくつかのpに対して成り立つから，全てのpに対して成り立つ」という論法は，当然ながら成り立たない．

一方で，pに具体的な数字を当てはめて調べてみるというのは非常に有効なやり方でもある．ただし，その場合は当てはめて得られた結果から，何らかの法則を見つけることが重要である．実際，ごく少数であるが，pにいくつかの値を入れた後，素数になっていない数が3の倍数であることに気づき，正答にたどり着いたものもあった．なお，この問題では実際に当てはめることで$p = 3$を見つけることもできる．

2番目に多かった誤答 (正答にたどり着けなかった解答) は$p = 2m+1$とおくもので，これが17%であった (誤答例との重複を含む)．pが奇数であることはすぐに分かるため，このようにおくのも自然に思われるが，多くの解答はこの後が続かなかった．このようにおいたあと，誤答例のような論法をした解答もあれば，$p = 2m+1$にあるmを3で割った余りに注目して正答にたどり着いた解答もあった．

これ以外の少数 (1%～2%) の誤答として，例えば3つの数を足したり，掛けたり，割ったり，$p = 2k + 3m$とおいたりするものがあった．色々と試行錯誤していることが伺えたが，どれも正答にはたどり着けなかった．結局のところ「3の倍数」に思い至れるかが問題を解く鍵になったと思われる．

4. 大問5：数列と区分求積法に関する問題

本節では，前期入試の**大問5**について分析する．前期入試の大問5は以下の通りである．

問題

数列$\{a_n\}$は，すべての項が正であり，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 2n^2 + n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

を満たすとする．$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\sqrt{n}}$を求めよ．

出題意図：数列と区分求積法の習熟度を確認する．

この問題は,「前半：a_n の導出」と「後半：極限の計算」の二つのパートに分かれていると言える．まず，a_n については以下のように求めることができる．

前半の解答例． まず，与式を用いると，$n = 2, 3, 4, \cdots\cdots$ に対して，次が成り立つ．

$$a_n^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 2n^2 + n - \left\{2(n-1)^2 + (n-1)\right\} = 4n - 1.$$

また，与式に $n = 1$ を代入すると，$a_1^2 = 3$ となるので，上式は $n = 1$ でも成立することに注意する．従って，これと $\{a_n\}$ のすべての項が正であることから，次が得られる．

$$a_n = \sqrt{4n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots). \qquad \square$$

前半については，正確な a_n の一般項が求まっている答案は全体の 54%ほどあったが，正しい議論がなされているものは少なかった．実際，完全に正しい解答は 17%，解答例で $n = 1$ の場合に言及できていないものなどの惜しい答案が 12%で，それ以外の 25%は不十分または正しくないものであった．その中で最も多かったものは，与式に $n = 1$，$n = 2$，$\cdots$ と順次代入していき，そこから a_n^2 の一般項を予想するというものであったが，予想が正しいことを証明できていないものが殆どで (正しくできているものは上の 17%に計上)，そもそも証明していないものが多かった．このような答案は全体の 23%を占める．学習指導要領解説にも「漸化式と数学的帰納法」の箇所にて,「漸化式を用いて表される数列の一般項を推測し，数学的帰納法を用いてその推測が正しいことを証明することも考えられる」と記載があるように,「漸化式 → 推測 → 証明」というのは基本的な流れであると言える．一方この分析を見る限りでは，その考え方はあまり定着していないように見える．単に時間がなかっただけなのかもしれないし，部分点狙いで分かった所だけを書いたのかもしれないが,「予想」がそのまま「答え」として認められることはないということはしっかり理解する必要があるし，教える側もそれを意識して指導するべきである．

一方，少数ではあるが，完全な誤答とは言い難いものの，議論が少し不十分である次のような解答が 2%ほど見受けられた．

前半：議論が不十分な解答． 一般に，数列 $\{c_n\}$ の一般項が $c_n = pn + q$ と表されるとき，その和は,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} (pk + q) = \frac{pn(n+1)}{2} + qn = \frac{p}{2}n^2 + \left(\frac{p}{2} + q\right)n$$

のように二次式となる．いま，$b_n = a_n^2$ とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = 2n^2 + n$ と二次式になるので，上式と係数を比較すると，$p = 4$，$q = -1$ となり，$b_n = 4n - 1 \cdots$ (後は上と同様). $\square$

この解答では,「数列の和が二次式のとき，元の数列は一次式である」ことを用いていると思われる．しかし,「数列が一次式なら和が二次式になる」が正しいことは示していても，その逆にあたる「数列の和が二次式のとき，元の数列は一次式である」が真であることの

議論はなされていない．b_n が一次式になることが証明できていれば上の解答でも完全な正答と言えるが，その証明なしに $b_n = c_n$ と結論付けてしまうのは，解答としては説明不足である．なお，今回の場合は実際にこの事実が正しく，その証明も簡単に与えることができるが，一般に，ある命題が真であるときに，その逆も真であるとは限らない．そのため，命題の逆を用いる場合には十分な注意が必要である．ちなみに，高校数学における「命題」に関しては，基本的には「集合」の単元で取り扱われており，必要条件・十分条件などの内容も含めて，学習指導要領解説では「図表示による集合の包含関係と関連付けるなどして，直観的に理解させる」と述べられている．従って，受験者が上記のような数列の話を命題であると認識するのは少々難しいことかもしれないが，もっと先の大学数学との接続まで考えれば，そうした「必要性と十分性」を意識した指導も重要なのではないだろうか．

後半については正答率が非常に低く，最終的な答えに到達している答案は全体の 10%あったが，その答えに至るまでを正しく議論できているものは 0%であった．なお，後半の正答例については以下の通りである．

後半の解答例． 前半の結果から，求める極限は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4k-1}{n}}$ となる．いま，すべての自然数 n に対して，次の不等式が成り立つことに注意する．

$$\sqrt{\frac{4(k-1)}{n}} < \sqrt{\frac{4k-1}{n}} < \sqrt{\frac{4k}{n}} \quad (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{†}$$

ここで，区分求積法を用いると，以下の結果が得られる．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4k}{n}} = 2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4(k-1)}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1}\sqrt{\frac{4l}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sqrt{\frac{4l}{n}} - \frac{2}{n}\right) = 2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx.$$

従って，はさみうちの原理より，求める極限は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4k-1}{n}} = 2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}. \qquad \square \tag{$*$}$$

なお，最も多かった誤答は，区分求積法により上の式 $(*)$ が成り立つと即座に結論してしまうもので，そのような答案は最後の計算をミスしたものも含めれば，全体の 16%を占める．式 $(*)$ は確かに成り立つ式であるから，これだけが答案に書かれていても，それは数学的には間違いではない．しかし，それが正しいと結論付けるためには，式 (†) のように不等式評価を用いて，はさみうちの原理を適用する必要がある．今回調査した答案には，不等式評価を試みている答案は一つも存在しなかったため，受験者がこの手の問題に慣れていないことが読み取れる．なお，不等式評価は高校では殆ど扱われていないし，はさみうちの原理についても学習指導要領にはその名は取り上げられておらず，教科書でも極限を求めるためのテクニックとしてしか登場しない．しかし，大学数学まで目を向ければ，こ

の手の不等式評価や極限操作は非常に重要となってくるものである．また，区分求積法については学習指導要領の本文には登場せず，学習指導要領解説でも「面積や体積に関連して，区分求積法の考えに基づいて定積分を理解させたり，積分法の記号の意味を理解させたりすることも考えられる」と少しの記載のみである．一方，本来のリーマン積分の定義を見ればその数学的な重要度は明らかである．このように学習指導要領ではその内容が希薄なものであっても，大学以降の数学では重要度の高い内容も数多く存在する．従って，指導者は高校数学と大学数学の接続を意識した指導をすることも時には大切であり，そうした指導の一つ一つが，受験者がこの手の問題を突破する力にも繋がるのではないだろうか．

5. 大問6：同じものを含む順列に関する問題

本節では，前期入試の**大問6**について分析する．前期入試の大問6は以下の通りである．

問題

数字の1が書かれたカードが2枚，2が書かれたカードが3枚，3が書かれたカードが4枚の計9枚のカードがある．この9枚のカードのすべてを横一列に並べるとき，次の問いに答えよ．

(1) 並べ方は全部で何通りあるか．

(2) 数字の3が書かれたカードが隣り合わないような並べ方は何通りあるか．

(3) 同じ数字が書かれたカードが隣り合わないような並べ方は何通りあるか．

出題意図：順列・組み合わせ問題に対する習熟度を確認する．

まず，(1)については同じものを含む順列の計算方法から

$$\frac{9!}{4!3!2!} = 1260\text{ 通り}$$

となるが，このような計算で正答した受験者は91%と非常に多かった．誤答は，計算ミス(4%)と9!を答えた(5%)ものがあった．

次に，(2)については，大きく分けて3通りの解答方針があった．最も多かったのは次のようなもので，誤答を含めて全体の60%を占めていた．

解答例(2) その1． まず，1と2の合わせて5枚のカードを先に並べ，そこに3のカードを入れることを考える．すなわち，

○　□　○　□　○　□　○　□　○　□　○

の□に1または2を入れ，その後に○に3を入れる．まず，□に1または2を入れる入れ方は

$$\frac{5!}{3!2!} = 10\text{ 通り}$$

ある．さらに，そのそれぞれに対し，6 個ある○のうち 3 を入れる 4 個を選ぶ選び方は ${}_6\mathrm{C}_4 = 15$ 通りある．よって求める並べ方は $10 \times 15 = 150$ 通りである．　□

この解答方法は正答率が 78%であり，他の 2 つの解答方法に比べ非常に良い正答率であった．

2 番目に多かった解答方針は，3 の位置を決めてからその間に 1 と 2 のカードを入れるもので，全体の 28%であった．

解答例 (2) その 2. まず，4 枚の 3 を並べ，その間に 1 と 2 のカードを入れる．すなわち，

$$\square \quad 3 \quad \square \quad 3 \quad \square \quad 3 \quad \square \quad 3 \quad \square \tag{$\star$}$$

の□に 1 と 2 のカードを入れていく $\cdots$ (続く)．　□

この解答で注意することは，□には 1 と 2 のカードが複数入って良いということである．この解答方法での正答率は 7%と低かったが，多くの誤答は複数入ってよいことを理解していなかったり，理解していても全通りを数え切れていなかったりしていた．すなわち，次のような誤答である．

誤答例 (2) その 1 (解答例 (2) その 2 からの続き). □に 1 と 2 を入れる入れ方は

$$\frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ 通り}$$

なので，答えは 10 通りである．　□

誤答例 (2) その 2. 3 のカードを固定して，その間に 1 と 2 のカードを入れる．1 と 2 のカードを○で表すと，並べ方は

3○3○3○3○○　　○3○3○3○3○　　○○3○3○3○3

の 3 通りだけである．ここに 1 と 2 を入れる入れ方はそれぞれ $5!/2!3! = 10$ 通りなので，求める答えは $3 \times 10 = 30$ 通りである．　□

正答を導いた解答例は，次の通りであった．

解答例 (2) その 2 の続き. □のうち，3 に挟まれている 3 つには，少なくとも 1 つ数字が入らなくてはならない．また，他の 2 つの□には数字が入っても入らなくてもよい．このことを考えて数えると，1 と 2 が入るスペースの入れ方は

○○3○3○3○3　○3○○3○3○3　○3○3○○3○3　○3○3○3○○3
○3○3○3○3○　3○○○3○3○3　3○○3○○3○3　3○○3○3○○3
3○○3○3○3○　3○3○○○3○3　3○3○○3○○3　3○3○○3○3○
3○3○3○○○3　3○3○3○○3○　3○3○3○3○○

の15通りである．よって求める答えは

$$15 \times \frac{5!}{3!2!} = 150 \text{ 通り}$$

である． □

この解答の中で出てくる15通りのすべてを正確に数えられたものは前述の通り非常に少なかった．このような全通りを数え上げる解答の内,「思いついた順に書いた」と思える解答，言い換えれば「法則性が見いだせない」解答の場合は，正答から遠いものが多かった．逆になんらかの法則性をもとに数え上げた解答の場合，数え上げが間違ったとしても，例えば13通り，14通りのように正答に近いものが多かった．このことからも，多くのものを数え上げる場合は，法則性を見出して数えることが必要だと考えられる．実際，学習指導要領解説においても，場合の数を数え上げる際には「あるものに着目して分類・整理すること」が有用であると述べられており，単にがむしゃらに問題演習を繰り返えさせるだけでなく，やはりそのような指導が大切であると言えるだろう．

3番目に多かった解答方針は，全ての並べ方から3が隣り合う並べ方を引くというもので，全体の10%であり，この解答方法での正答率は9%であった．よく見られた誤答例は以下の通りである．

誤答例 (2) その3 (途中まで)． 3が隣り合う並べ方を考える．3が4枚かたまっている並べ方は，この4枚の3をひとかたまりと考えて

$$\frac{6!}{3!2!} = 60 \text{ 通り}$$

である．次に，3が3枚かたまって，それと離れて3が1枚いるような並べ方は，3枚の3をひとかたまりと考えて数えたあと，3枚と1枚が隣り合って4枚になるものを引けばよい．これより，

$$\frac{7!}{3!2!} - 60 = 360 \text{ 通り}$$

となる $\cdots$ (解答は続くが，本稿での紹介はここまで)． □

この誤答例のように，3を (3枚，1枚) と組にして並べる場合，並べ方によっては3が4枚ひとかたまりになる．上記の解答ではその分の60通りを引いているが，この解答では3枚と1枚を区別して計算する必要があるため，

$$\frac{7!}{3!2!} - 60 \times 2! = 300 \text{ 通り}$$

とするのが正答である．3が隣り合うように組を作ると，他に (2枚，2枚) と (2枚，1枚，1枚) があり，これらを正しく計算するためには，それぞれ，

$$\frac{7!}{3!2!2!} - 60 = 150 \text{ 通り}, \qquad \frac{8!}{3!2!2!} - 60 \times 3 - 300 \times 2 - 150 \times 2 = 600 \text{ 通り}$$

とする必要がある．しかし，これを正確に計算するのは，他の解答方法に比べて難易度が高いように思える．なお，唯一あった正答例は以下のようなものであった．

解答例 (2) その 3 (誤答例 (2) その 3 の途中から)**.** 次に，3 が 3 枚かたまって，それと離れて 3 が 1 枚いるような並べ方を数える．3 枚かたまっている 3 が端にある場合は，例えば

3 3 3 × ○○○○○

となるが，このときもう一枚の 3 は丸に入ることになる．333 が右端に来るときも同様なので，このような並べ方は，

$$5 \times \frac{5!}{3!2!} \times 2 = 100 \text{ 通り}$$

である．また，3 が端にない場合は，例えば

× 3 3 3 × ○○○○

となる．このような並べ方は

$$4 \times \frac{5!}{3!2!} \times 5 = 200 \text{ 通り}$$

である．よって，(3 枚，1 枚) の並べ方は 300 通りである $\cdots$ (解答は続くが，本稿での紹介はここまで)．□

(2) については，その解答方法によって正答率が大きく異なった．より簡単に計算できるやり方を見つけられるかどうかが，この問題を解くための鍵になったと思われる．

最後に，(3) については様々な試行錯誤がみられたが，やはり (2) と同様の方針をとっているものが多かった．まず，解答例 (2) その 1 のように，1 と 2 を固定してその間に 3 を入れるような解答は全体の 14%であり，正答率は 20%であった．正答としては，次のようなものがあった．

解答例 (3) その 1. まず 1 と 2 を並べ，その 1 と 2 の位置に関して場合分けを行う．例えば 11222 のように，1 が 2 つ，2 が 3 つ並ぶような並び方は 2 通りあり，このとき，同じ数字が並んだ間に 3 が入る必要があるため，4 つの 3 のうち，3 つは入る場所が決まる．そのため，このような場合の並べ方は

$$2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 6 \text{ 通り}$$

となる．他に，21122，12221，12122，21212 の場合などを考えると，それぞれ，

$$2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 12 \text{ 通り}, \quad 1 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 6 \text{ 通り}$$

$$4 \times {}_5\mathrm{C}_3 = 40 \text{ 通り}, \quad 1 \times {}_6\mathrm{C}_4 = 15 \text{ 通り}$$

となり，あわせて 79 通りである．□

誤答例は，ほとんどがこの全通りの内の一部分を計算したものであった．例えば，次のようなものである．

誤答例 (3)． 1と2は隣り合ってはいけないので，1と2の並びは21212でないといけない．このとき，ここに3を入れる入れ方は ${}_6\mathrm{C}_4 = 15$ 通りであるので，答えは15通りである．□

次に，解答例 (2) その2のように，3を固定してその間に1と2を入れる方針の解答は全体の35%であり，正答率は3%であった．正答，誤答ともにその内容はおおよそ (2) と同様であったため，ここでは省略する．

最後に，隣り合う場合を引くという方針の解答は全体の20%で，正答率は0%であった．(2) よりさらに複雑になるので，1，2，3のそれぞれについて隣り合う並べ方を数えるやり方で正答にたどり着くのは難しいと思われる．ただし，惜しい解答として，3を固定するやり方とあわせた方法を考えた解答もあった．

解答例 (3) その2． 解答例 (2) その2のように，まず4枚の3を並べ，その間に1と2のカードを入れることを考える．3のカードが隣り合わず，かつ1か2のカードが隣り合う場合，図 ($\star$) の□に，次のいずれかが入ることになる．

$$11, \quad 22, \quad 112, \quad 211, \quad 122, \quad 221, \quad 222.$$

例えば112が入るとき，残り2つの2はそれぞれ1つずつ□に入ることになるので，このような並べ方は3通りとなる．(中略) このような並べ方はあわせて71通りであり，これを (2) の150通りから引くと，答えは79通りとなる．□

この問題で正答を導くには，2つのことが必要だったように思われる．一つは，より簡単な計算で答えを導ける方法を見つけられることで，もう一つは，場合分けの全通りを正しくリストアップできることである．(2) では簡単な方法を見つけられれば計算自体は簡単なため，正答率が高かったが，(3) はどのやり方でも複雑な場合分けが必要であるため，低い正答率になったと考えられる．

6. 終わりに

本研究では，信州大学工学部の前期入試における数学の答案を詳細に分析することで，受験者の高校の学習内容に対する理解度を考察した．正答率や誤答例を詳しく紹介したため，受験者に足りていないと思われる数学的な素養が問題ごとに見えるものになったと思われる．これらの情報が指導者の今後の教育活動の一助になれば幸いである．一方，今回の研究では，分析結果に基づいた著者ら独自の教育への提言はしているものの，この分析を具体的にどのように実際の指導へと活かすのかというところまでの考察は十分に行えなかった．それらは今後の課題であると言えよう．大学で数学教育を担当する教員として，今後のさらなる指導改善に向けて，引き続き調査および研究を行っていく所存である．

参考文献

高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編，平成 21 年 12 月，文部科学省．

大野博道

E-mail: h_ohno@shinshu-u.ac.jp

福田一貴

E-mail: i_fukuda@shinshu-u.ac.jp

信州大学 工学部 工学基礎部門 数学教室

〒 380–8553 長野県長野市若里 4–17–1