学位論文の審査結果の要旨

On matrix Toda brackets in the Baues-Wirsching cohomology
(Baues-Wirsching コホモロジーにおける行列型戸田の積について)

ホモトピー論は，位相空間を連続変形により同一視するというホモトピー同値のもと空間の分類を行う幾何学である。位相空間の間の２つの連続写像を考える場合，時間でパラメトライズされた同空間の間の連続写像(ホモトピーと呼ばれる)が存在して，時刻 0 で第１の連続写像，時刻 1 で第２の連続写像になる場合，その２つの連続写像はホモトピックであるという。位相空間の間の連続写像をホモトピックで同一視して得られるホモトピー集合は, 位相空間を分類するという観点から幾何学及び現代数学において非常に重要な研究対象である。実際，ユークリッド空間の開集合上で微分方程式を考察するときその解の存在性は, 開集合の幾何学的形状により決定されることが de Rham 理論により知られている。

戸田の積は，３つの合成可能な写像のうち連続する２つの合成写像が定置写像にホモトピックである場合, 第一写像の定義域空間の懸垂空間から第３の写像の値域空間へのホモトピー集合上に元を作り出す手法である。ホモトピー集合の中でも基本的かつ重要な球面のホモトピー群に非自明な元を作り出すことに，戸田の積は大いに貢献している。

Baues-Doreckmann は，トラック圏と呼ばれる特別な 2-圏において，戸田の積は完全に小圏のコホモロジー論である Baues-Wirsching コホモロジーの３次項で記述できることを示した。より厳密には，全ての戸田の積は，ある戸田圏の包含から誘導される写像を用いて，「普遍戸田の積」で記述できる。一方で，この戸田の積の概念は，Barratt により５つの連続写像，及び３つのホモトピーからなるより複雑な図式が生み出す，行列型戸田の積に一般化され，ホモトピー集合上に非自明な元を構成してきた。Hardie-Kamps-Marcum の考察により，この行列型戸田の積はより一般的な 2-圏の世界で定義可能となった。

審査論文ではトラック圏において，行列型戸田の積を考察している。主結果の一つは，行列型戸田の積がある意味分裂するという仮定の元で，上述の「普遍戸田の積」がその行列型戸田の積をも支配するということを主張している。一見仮定の分裂性は，行列型戸田の積が古典的な戸田の積の和でかけることを仮定しているようであるが，上述の主定理の利点として，行列型戸田の積の不確定項を正確に記述しできるという点，さらに，行列型戸田の積の自然性の「普遍戸田の積」による解釈がある。また鎖複体のホモトピー圏から得られる三角圏においては，一般的な行列型戸田の積が, Heller の意味の戸田の積に帰着できるという定理も示している。結果として，非自明性の考察と Baues-Doreckmann の結果から，ある行列型戸田圏を部分圏として含むトラック圏において，非自明な線型トラック拡張の存在が示せることになる。これら２つの定理を Baues-Wirsching 複体における複雑な計算を基に証明した点，さらに代数的な三角圏において非自明な行列型戸田の積の存在を示した点は大いに評価できる。審査論文の手法を発展させ，行列型戸田の積やその亜種の非自明性を考察する手法の改良も期待される。以上の審査結果により本論文は博士論文に値するものと判断する。

公表主要論文名

・ Yasuhiro Momose and Kenichirou Shinkai, On matrix Toda brackets in Baues–Wirsching cohomology, Homology, Homotopy and Applications, 20 (2018), 315 – 339.